Tentamen LA1NA, donderdag 10 januari 2019, 14:00 - 17:00

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1. Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de rang van A_0.

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x inverteerbaar?

Opgave 2. Bepaal de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. Laat $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M.

(b) Geef een matrix C en een diagonaalmatrix D met $M = CDC^{-1}$.

De rij $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots$ is gegeven door $G_0 = 1$, $G_1 = -1$ en voor $k \geq 2$:

$$G_k = G_{k-1} + \frac{3}{4} G_{k-2}.$$

(c) Geef een directe formule voor G_k.

— Vergeet de opgaven op de achterkant niet! —

Opgave 4. Beschouw de matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Is A diagonaliseerbaar?

(b) Is B diagonaliseerbaar?

(c) Geef een matrix C van rang 2 en een diagonaalmatrix D met $BC = CD$.

Opgave 5. Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, 2, 1, 1), \\ a_2 &= (3, -4, -2, -1) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-2, 1, 3, 0). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthogonale basis van W.

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(6, 7, 1, -2)$ op W.

Opgave 6.

(a) De volgende matrix is de standaardmatrixrepresentatie van een spiegeling in een vlak V (dit hoef je niet te bewijzen):

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geef de standaardmatrixrepresentatie van de loodrechte projectie op V.
[Hint: je hoeft nauwelijks te rekenen.]

(b) De volgende matrix is de standaardmatrixrepresentatie van een rotatie met een bepaalde hoek α om een bepaalde lijn L (dit hoef je niet te bewijzen):

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie in dezelfde richting met hoek 2α om dezelfde lijn L.

— SUCCES! —