Tentamen LA1NA, vrijdag 10 januari 2020, 14:15 - 17:15

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Alle opgaven zijn 15 punten waard. Om die punten te krijgen moet je de vraag duidelijk en correct beantwoorden en je antwoord duidelijk en correct motiveren, bijvoorbeeld door het volgen van de methode uit het college en erbij schrijven wat je doet. Niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard. Cijfer is punten/$10+1$.

Opgave 1.

(a) Bepaal de oppervlakte (Engels: *area*) van de driehoek met hoekpunten $(1,0,1)$, $(0,2,3)$ en $(2,-1,0)$ in $\mathbb{R}^3$.
11 punten.
Antwoord: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Aangerade methode: laat $v = (0,2,3) - (1,0,1)$ en $w = (2,-1,0) - (1,0,1)$. Dan is de gevraagde driehoek half zo groot als het parallellogram met zijden v en w, dus $\frac{1}{2}||v \times w||$.

(b) Bepaal het volume van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $(1,0,1)$, $(0,2,3)$ en $(2,-1,0)$ in $\mathbb{R}^3$.
4 punten.
Antwoord: 1.
Aangerade methode: schrijf de drie vectoren samen in één 3×3 matrix A. Dan is het volume van het parallellepipedum gelijk aan de absolute waarde van de determinant van A.

Opgave 2. Bepaal de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwoord: -6.
Aangerade methode: gebruik elementaire rij-operaties om er een bovendriehoeksmatrix van te maken. Let wel op dat (en hoe) de determinant verandert bij sommige operaties.
Veelgemaakte fouten:

1. rekenfouten,
2. niet zeggen welke rij-operaties je uitvoert,
3. teken vergeten bij verwisselingen,
4. tekens verkeerd doen bij het ontwikkelen naar een rij of kolom,
5. niet zeggen naar welke rij of kolom je ontwikkelt,

6. een permutatie uitvoeren zonder te zeggen wat het aantal verwisselingen (en dus het bijbehorende teken) is,

7. schalingsfactoren verkeerd gebruiken bij het schalen van een rij.

Opgave 3. Zij

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M.
5 punten
Antwoord: eigenwaarden zijn -2 en 1, bijbehorende eigenruimten zijn $E_{-2}(M) = \operatorname{span}(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right))$ en $E_1(M) = \operatorname{span}(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right))$.

(b) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D met $M = CDC^{-1}$.
3 punten
Antwoord: $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ en $D = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
[Alle andere goede antwoorden krijg je door kolommen van C met niet-nul factoren te schalen en/of zowel de kolommen van C als de diagonaalgetallen van D te verwisselen.]

(c) Bepaal functies $x = x(t)$ en $y = y(t)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x' &= 4x + 3y, \\ y' &= -6x - 5y, \end{cases}$$

$x(0) = 1$ en $y(0) = 1$.
7 punten
Antwoord: $x(t) = -2e^{-2t} + 3e^t$, $y(t) = 4e^{-2t} - 3e^t$.
Methode: Schrijf $X(t) = \left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$, dus $X'(t) = MX(t)$, en pas daar de methode van het boek op toe. Vergeet niet de specifieke oplossing te bepalen die aan de beginwaarden $x(0) = y(0) = 1$ voldoet.

Opgave 4. Beschouw de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

5 punten per deelopgave

(a) Is A diagonaliseerbaar?
Antwoord: Nee.
Methode: laat zien dat de som van de dimensies van de eigenruimtes slechts 2 is en geen 3, of laat zien dat er een eigenwaarde (namelijk het getal 3) is met algebraïsche multipliciteit 2 en meetkundige multipliciteit 1.

(b) Is B diagonaliseerbaar?
Antwoord: Ja.
Methode: schrijf B expliciet als $B = CDC^{-1}$, of laat zien dat de som van de dimensies van de eigenruimtes precies 3 is, of laat zien dat alle complexe eigenwaarden reëel zijn en een meetkundige multipliciteit hebben die gelijk is aan de algebraïsche multipliciteit.

(c) Geef een matrix C van rang 2 en een diagonaalmatrix D met $AC = CD$.

Antwoord: Bijvoorbeeld $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Voor het idee erachter: probeer te begrijpen hoe de stellingen over diagonaliseerbaarheid werken. De kolommen van C zijn eigenvectoren en nulvectoren; de getallen in D zijn bijbehorende eigenwaarden. Wat heeft dit met $AC = CD$ te maken?

Let op: elke goede matrix C is niet inverteerbaar, want heeft rang 2 en heeft 3 rijen, dus C^{-1} is betekenisloos. Gebruik dus geen C^{-1} in je redenering.

Opgave 5. Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,1,2,1), \\ a_2 &= (5,2,3,2) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-5,-2,1,0). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van W.

10 punten

Antwoord: Er zijn meerdere antwoorden mogelijk. Als je rechtstreeks Gram-Schmidt toepast en daarna correct schaalt, dan kom je op:

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(2,1,2,1), \\ v_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \quad \text{en} \\ v_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1). \end{aligned}$$

Let op dat er om een ortho*normale* basis gevraagd wordt, dus de antwoordvectoren moeten lengte 1 hebben.

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(4,-5,4,-1)$ op W.

5 punten

Antwoord: $(2,-1,2,3)$.

Aangerade methode: Zie de tekst over waarom Gram-Schmidt werkt, of zie de standaard-toepassingen van orthogonale bases.

Opgave 6. De matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van een rotatie om een lijn $L \subset \mathbb{R}^3$ door de oorsprong met een bepaalde hoek α (dit hoef je niet te bewijzen).

5 punten per deelopgave

(a) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de tegengestelde rotatie (dat wil zeggen, de rotatie om dezelfde lijn L met dezelfde hoek α maar nu in de andere richting).

Antwoord: Er wordt gevraagd naar de matrix van de inverse van de lineaire afbeelding, en dat is de inverse van de matrix van de lineaire afbeelding, dus

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Er zijn ook andere (ingewikkeldere) manieren mogelijk.

(b) Bepaal de lijn L.

Antwoord: $L = E_1(R) = \text{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

De matrix

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van de loodrechte projectie op een vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ door de oorsprong (dit hoef je niet te bewijzen).

(c) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de spiegeling in V.
Antwoord: Voor de spiegelingsmatrix S geldt voor alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$: $\frac{1}{2}(Sv + v) = Pv$, want de projectie ligt midden tussen v en de gespiegelde van v in (teken een plaatje). Dus $Sv + Iv - 2Pv = 0$. Haal nu P buiten haakjes, dan volgt voor elke vector v: $(S + I - 2P)v = 0$. Omdat dit voor elke vector v geldt, volgt nu $S + I - 2P = 0$, dus

$$S = 2P - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Er zijn ook andere mogelijkheden om op deze matrix S uit te komen, maar die kosten meer rekenwerk. Schrijf bijvoorbeeld $P = CDC^{-1}$ voor een diagonaalmatrix D. Op de diagonaal van D staat een 0 en twee keer een 1. Maak een matrix D' door de 0 op de diagonaal van D door -1 te vervangen en reken dan $CD'C^{-1}$ uit.]

[Hint: deze drie deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen.]

— SUCCES! —