Tentamensommen over Hoofdstuk 5

1. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = (1 - w(t))U_1(t) + 3w(t), & U_1(1) = 1, \\ U_2'(t) = w(t)U_1(t) + (1 - w(t))U_2(t), & U_2(1) = -1, \\ U_3'(t) = w(t)U_2(t), & U_3(1) = 2, \end{cases}$$

waarbij w een gegeven reëelwaardige functie is.

(a) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, een waarde $\alpha \in \mathbb{R}$, een vector $u_0 \in \mathbb{R}^3$ en een vector $U(t) \in \mathbb{R}^3$ zó dat (1) equivalent is met

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)) \quad (t > 0), \\ U(\alpha) = u_0. \end{cases}$$

Neem nu aan dat $w(t) = t/2$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ en bekijk de Runge-Kutta methode met matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal de benadering van $U(3)$ die door toepassing van deze Runge-Kutta methode op (1) met stapgrootte $h = 2$ wordt verkregen.

2. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} V''(t) = 2V'(t)V(t) - t^3 + 1, \quad t > 0 \\ V'(0) = 0 \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Schrijf probleem (1) in de vorm

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > 0 \\ U(0) = u_0 \end{cases}$$

waarbij $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bepaal met de expliciete, voorwaartse methode van Euler een benadering van $U(1) = \begin{pmatrix} U_1(1) \\ U_2(1) \end{pmatrix}$. Neem als stapgrootte $h = 1$.

(c) Formuleer de Runge-Kutta methode die behoort bij de Runge-Kutta matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zij $u_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ een benadering van $U(1) = \begin{pmatrix} U_1(1) \\ U_2(1) \end{pmatrix}$ verkregen door uitgaande van $u_0 = \begin{pmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{pmatrix}$ één stap van de in (c) geformuleerde Runge-Kutta methode toe te passen met stapgrootte $h = 1$.

(d) Welk stelsel niet-lineaire vergelijkingen moet opgelost worden indien we u_1 daadwerkelijk willen berekenen?

3. Beschouw het volgende beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2\mathrm{e}^t, & \text{voor } t > 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en een vector $u_0 \in \mathbb{R}^2$ zo dat (1) equivalent is met het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), & \text{voor } t > 0, \\ U(0) = u_0. \end{cases}$$

We beschouwen de expliciete variant van de trapeziumregel, met bijbehorende matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Bepaal met behulp van deze methode en stapgrootte $h = \frac{1}{2}$ een benadering van $y(1)$ en $y'(1)$.

Toepassing van bovenstaande methode met stapgrootte h levert een benadering $T(h)$ van $y(1)$. Er geldt $T(\frac{1}{16}) = 2.698863$, $T(\frac{1}{32}) = 2.713512$ en $T(\frac{1}{64}) = 2.717068$. Men kan bewijzen dat

$$T(h) = y(1) + \gamma^{(1)} h^2 + \gamma^{(2)} h^3 + \mathcal{O}(h^4).$$

(c) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een nauwkeurigere benadering van $y(1)$.

4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) - U_2(t) = 0, \quad t > 0, \\[1em] U_2'(t) - 2U_1(t)U_2(t) + t^3 - 1 = 0, \quad t > 0, \\[1em] U_1(0) = 0, \quad U_2(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $u_0 \in \mathbb{R}^2$ zo dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > 0, \\[1em] U(0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen $U(1)$ met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We nemen als stapgrootte $h = 1$. Voor $\theta = 0$ definieert M de methode van Euler, voor $\theta = \frac{1}{2}$ de impliciete middelpuntsregel. De benadering verkregen met de methode van Euler noteren we als v_1, de benadering verkregen met de impliciete middelpuntsregel als u_1.

(b) Bepaal v_1.

(c) Laat zien dat $u_1 = (u_{1,1}, u_{1,2})^{\mathrm{T}}$ voldoet aan

$$\begin{cases} u_{1,1} - \frac{1}{2}u_{1,2} = 0 \\ u_{1,2} - \frac{1}{2}u_{1,1}u_{1,2} = \frac{7}{8}. \end{cases}$$

(d) Bepaal de oplossing(en) van het stelsel vergelijkingen uit onderdeel (c). Welke oplossing van deze vergelijkingen is de meest betrouwbare van U(1)?

5. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = \big(U_2(t)\big)^2 - 2\,t, \quad t > \frac{1}{2}, \\ U_2'(t) = -3\,t\,U_1(t)\,U_2(t) - 1, \quad t > \frac{1}{2}, \\ U_1(\frac{1}{2}) = 2, \quad U_2(\frac{1}{2}) = 1. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}^2$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ zo dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > t_0, \\ U(t_0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen $U(2)$ met behulp van de Runge-Kutta methode R met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal met methode R en $h = \frac{3}{2}$ een benadering van $U(2)$.

De benadering van $U(2)$, verkregen door herhaalde toepassing van methode R met stapgrootte h, noteren we als $T(h)$ met $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$. Gegeven is de volgende tabel met afgeronde waarden $T_2(h)$.

h	$T_2(h)$
$\frac{1}{54}$	-3.10276
$\frac{1}{162}$	-3.09715
$\frac{1}{486}$	-3.09648

(c) Schat met behulp van de waarden uit bovenstaande tabel de orde van de Runge-Kutta methode R.