Tentamensommen over Hoofdstuk 4

1. We willen de integraal $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ benaderen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel. Zij N een positief geheel getal, $h = \frac{1}{N}$. Definieer $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ en $\widetilde{f}(t) = \mathrm{fl}_5(f(t))$ voor alle $t \in [0, 1]$.
Zij I_N een benadering van I verkregen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten. Zij verder $\widetilde{I}_N$ een benadering van I verkregen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten waarbij de functie f vervangen wordt door de functie $\widetilde{f}$.

(a) Bepaal $\widetilde{I}_2$.

(b) Toon aan dat $|\widetilde{I}_N - I_N| \leq 5 \cdot 10^{-5}$.

(c) Hoe groot moet N minstens zijn opdat $|\widetilde{I}_N - I| \leq 10^{-4}$?

Er geldt dat $\mathrm{fl}_5(\widetilde{I}_4) = 1.4907$, $\mathrm{fl}_5(\widetilde{I}_8) = 1.4697$, $\mathrm{fl}_5(\widetilde{I}_{16}) = 1.4644$.

(d) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een betere benadering van I.

2. Gezocht zij de waarde Y.
Berekend is een aantal benaderingen $y(h)$ van Y voor een aantal waarden van h.

h	$y(h)$
1	4.92493
$\frac{1}{2}$	3.70513
$\frac{1}{4}$	3.39797
$\frac{1}{8}$	3.26731

Uit theoretische analyse is bekend dat

$$y(h) = Y + \gamma^{(1)}h + \gamma^{(2)}h^2 + \gamma^{(3)}h^3 + \gamma^{(4)}h^4 + \mathcal{O}(h^5)\,.$$

Rond bij de berekeningen in (a) en (b) af op vijf cijfers na de decimale punt.

(a) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van Y.

Nadere analyse van $y(h)$ leert dat $\gamma^{(2)} = 0$.

(b) Bepaal, door gebruik te maken van deze nieuwe informatie, opnieuw een zo nauwkeurig mogelijke benadering van Y.

3. We willen de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten gebruiken om de integraal $I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ te benaderen. De verkregen benadering wordt aangeduid als $\widetilde{I}_N$.
Er bestaat een constante K zo dat voor iedere functie $f \in C^2[0,1]$ en iedere $N \geq 1$ geldt

$$\widetilde{I}_N - I = K f''(\tau) N^{-2}$$

voor zekere $\tau \in [0,1]$.

(a) Bewijs dat $K = \frac{1}{12}$. Hierbij mag geen gebruik gemaakt worden van de algemene stelling over de fout bij de (uitgebreide) trapeziumregel.

Stel dat de functiewaarden $f(t)$ niet exact berekend kunnen worden, maar dat we wel benaderingen $\widetilde{f}(t)$ kunnen berekenen zó dat voor zekere $\varepsilon > 0$ geldt

$$|\widetilde{f}(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0,1]$$

Zij $\approx{I}_N$ de benadering van I die we krijgen als we de uitgebreide trapeziumregel met $N+1$ equidistante steunpunten toepassen op $\widetilde{f}$ in plaats van f.

(b) Toon aan dat $|\widetilde{\widetilde{I}}_N - \widetilde{I}_N| \leq \varepsilon$.

Ter benadering van $I = \int_0^1 \log(1+t)\,\mathrm{d}t$ wordt de uitgebreide trapeziumregel toegepast. In plaats van de exacte waarden wordt gebruik gemaakt van afrondingen van $\log(1+t)$ met een absolute fout die in absolute waarde hooguit gelijk is aan $5 \cdot 10^{-6}$. De verkregen benadering noemen we $\widetilde{\widetilde{I}}_N$.

(c) Bepaal een N zo dat $|\widetilde{\widetilde{I}}_N - I| \leq 6 \cdot 10^{-6}$.

4. Gezocht wordt de waarde van Y. Gegeven:

$$y(h) = Y + \gamma^{(1)} h^{p_1} + \gamma^{(2)} h^{p_2} + \gamma^{(3)} h^{p_3} + \mathcal{O}(h^{p_4})$$

met $p_1 = 3$. Verder zijn p_2, p_3 en p_4 geheel en $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$. Voor verscheidene waarden van h is $y(h)$ berekend. In onderstaande tabel staan de waarden $T_{i,o} = y(h_i)$ in 6 cijfers nauwkeurig gegeven. De waarden $T_{i,1}$ en $T_{i,2}$ zijn verkregen door extrapolatie naar $h = 0$.

i	h_i	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$
0	$\frac{1}{2}$	5.39380		
1	$\frac{1}{4}$	5.16724	5.13487	
2	$\frac{1}{8}$	5.14624	5.14324	5.14380
3	$\frac{1}{16}$	5.14407	?	

(a) Bepaal $T_{3,1}$.

(b) Wat is hoogstwaarschijnlijk het getal p_2?