Tentamensommen over Hoofdstuk 2

1. De vergelijking

$$x = g(x), \text{ met } g(x) = \tfrac{1}{10}\big(1 + \mathrm{e}^x - x^3\big)$$

heeft precies één dekpunt in $[0,1]$. Noem dit dekpunt x^*.
Beschouw het iteratieve proces, uitgaande van een startwaarde $x_0 \in [0,1]$,

(1) $$x_{k+1} = g(x_k)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

(a) Bewijs dat

$$|g(\widetilde{x}) - g(x)| \le 0.3 \cdot |\widetilde{x} - x| \quad \text{voor alle } \widetilde{x}, x \in [0,1].$$

(b) Zij $x_0 \in [0,1]$. Bepaal op grond van de in het collegedictaat vermelde *a-priori afschatting* bij iteratieve processen een zo klein mogelijke waarde k waarvoor

$$|x_k - x^*| \le 5 \cdot 10^{-3}.$$

(c) Voer het iteratieve proces (1) uit met startwaarde $x_0 = 0$ en beëindig de iteratie zodra voor een berekende x_k op grond van de in het collegedictaat vermelde *a-posteriori afschatting* bij iteratieve processen geldt dat

$$|x_k - x^*| \le 5 \cdot 10^{-3}.$$

2. We zoeken een nulpunt van de functie $f(t) = t - \mathrm{e}^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$.
We bekijken daartoe de volgende methode:

$$\begin{cases} t_{k+1} = g(t_k) & (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ t_0 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

waarbij $g(t) = \frac{2}{5}(\frac{3}{2}t - \log(t)) \quad (t > 0)$.

(a) Toon aan dat $g(t) \in [\frac{1}{2}, 1]$ voor elke $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(b) Toon aan dat er precies één dekpunt is van g op $[\frac{1}{2}, 1]$. Noem dit dekpunt t^*.

(c) Laat zien dat t^* een nulpunt is van f.

(d) Veronderstel dat bij gegeven $t_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ de punten t_1, t_2, t_3, t_4 berekend zijn en dat blijkt dat $|t_4 - t_3| \le 5 \cdot 10^{-4}$.
Geef een zo klein mogelijke index k waarvoor geldt dat $|t_k - t^*| \le 5 \cdot 10^{-8}$.