

## Tentamensommen over Hoofdstuk 1

1. In een biologisch experiment wordt een grootheid  $p \approx 0.01$  gemeten. Van de gemeten waarde  $\tilde{p}$  is bekend dat zij een relatieve fout bezit, die in absolute waarde ten hoogste  $10^{-2}$  is. We zijn geïnteresseerd in de waarde  $y = 1 - \sqrt{1 - p}$ .

- (a) Bepaal het conditiegetal van  $y$  met betrekking tot  $p$ , en leid hieruit af dat de relatieve nauwkeurigheid waarmee  $y$  te bepalen is in absolute waarde (ongeveer) ten hoogste  $10^{-2}$  is.

Voor de berekening van een benadering  $\tilde{y}$  van  $y$  gebruiken we een representatie met grondtal  $B = 10$  en aantal cijfers  $t$ . Met  $\ominus$  en SQRT noteren we de machine-versies van de rekenkundige operaties ‘ $-$ ’ en ‘ $\sqrt{\phantom{x}}$ ’. Er geldt dus voor alle representeerbare  $a$  en  $b$ :  $a \ominus b = \text{fl}_t(a - b)$  en  $\text{SQRT}(a) = \text{fl}_t(\sqrt{a})$ . We zullen de volgende algoritme gebruiken:

$$A : \tilde{y} = 1 \ominus (\text{SQRT}(1 \ominus \tilde{p})).$$

- (b) Bepaal de conditiegetallen van algoritme A.

In het volgende mag worden aangenomen dat  $\tilde{p}$  representeerbaar is.

- (c) Leid af hoe groot het aantal cijfers  $t$  van de representatie minstens moet zijn opdat voor de met algoritme A verkregen benadering  $\tilde{y}$  geldt:  $|\tilde{y} - y|/|y| \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$ .

2. Beschouw de opgave om voor gegeven  $x \in (0, 1)$  de waarde  $y = 1 - \sqrt{1 - x}$  te berekenen.

- (a) Bepaal het conditiegetal van  $y$  met betrekking tot  $x$ .

- (b) Voor welke waarden  $x \in (0, 1)$  is bovenstaande opgave slecht geconditioneerd?

3. Voor een gegeven waarde  $r \approx 0$  ( $r \neq 0$ ) bekijken we de berekening van de waarde

$$y = \exp(r) - 1.$$

- (a) Bereken het conditiegetal van  $y$  m.b.t.  $r$ .

- (b) Is de opgave  $y$  te berekenen goed geconditioneerd?

Zij  $\tilde{r}$  een benadering van  $r$ .

Ter berekening van  $y$  is een algoritme A voorhanden. De operaties bij deze algoritme worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal  $B = 10$  en aantal cijfers  $t$ . Met EXP noteren we de machine-versie van de functie ‘exp’. Algoritme A luidt als volgt:

$$A : \tilde{y} = \text{EXP}(\tilde{r}) \ominus (1).$$

- (c) Bepaal de conditiegetallen, uitgedrukt in  $r$ , behorend bij algoritme A.

Veronderstel dat  $r \approx 0.009$ , dat  $\left| \frac{\tilde{r} - r}{r} \right| \leq 2 \cdot 10^{-6}$  en dat  $\tilde{r}$  representeerbaar is.

- (d) Hoe groot moet het aantal cijfers  $t$  van de representatie minstens zijn opdat voor de met deze algoritme verkregen benadering  $\tilde{y}$  geldt:  $\left| \frac{\tilde{y} - y}{y} \right| \lesssim 10^{-5}$ .

4. Voor  $0 < x < \pi$  definiëren we  $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$ . We bekijken de opgave voor gegeven  $a \in (0, \pi)$  de waarde  $f(a)$  te berekenen. Het conditiegetal van  $f$  in  $a$  duiden we aan als  $\gamma_a$ .

Bepaal  $\gamma_a$  als functie van  $a$ . Toon aan dat de opgave  $f(a)$  te bepalen goed geconditioneerd is voor  $a \simeq 0$ .