Tentamen Numerieke Wiskunde voor Informatici
dinsdag 14 augustus 2001, 10.00 - 13.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.

(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.

---

1. Voor een gegeven waarde $r \approx 0$ ($r \neq 0$) bekijken we de berekening van de waarde

$$y = \frac{1 - \cos(r)}{\sin(r)}.$$

(a) Bereken het conditiegetal van y m.b.t. r.

(b) Is de opgave y te berekenen goed geconditioneerd?

Zij $\widetilde{r}$ een benadering van r.
Ter berekening van y is een algoritme A voorhanden. De operaties bij deze algoritme worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Met COS en SIN noteren we de machine-versies van de functies 'cos' en 'sin'. Algoritme A luidt als volgt:

$$\mathrm{A}\ :\ \widetilde{y} = \big(1 \ominus \mathrm{COS}(\widetilde{r})\big) \oslash \mathrm{SIN}(\widetilde{r}).$$

Veronderstel dat $r \approx 0.009$, dat $\left|\dfrac{\widetilde{r} - r}{r}\right| \leq 2 \cdot 10^{-6}$ en dat $\widetilde{r}$ representeerbaar is.

(c) Bepaal de conditiegetallen behorend bij algoritme A.

(d) Hoe groot moet het aantal cijfers t van de representatie minstens zijn opdat voor de met deze algoritme verkregen benadering $\widetilde{y}$ geldt: $\left|\dfrac{\widetilde{y} - y}{y}\right| \lesssim 10^{-5}$.

2. De functie f is gedefinieerd op het interval $[-3, 2]$. In de volgende tabel staan enkele functiewaarden vermeld.

i	t_i	$f(t_i)$
1	-3	-4
2	-2	2
3	0	-4
4	1	-4
5	2	6

Zij P het polynoom van orde 5 zó dat $P(t_i) = f(t_i)$ voor $i = 1, 2, \ldots, 5$.

(a) Bepaal $P(-1)$ met de methode van Neville.

Het is bekend dat voor $k = 0, 1, 2, \ldots$ geldt dat $-\dfrac{60}{k+2} \leq f^{(k)}(t) \leq \dfrac{80}{k+2}$ voor alle $t \in [-3, 2]$.

(b) Bepaal een zo nauwkeurig mogelijke insluiting van $f(-1)$.

3. Beschouw het volgende beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 48\,t - 36, & \text{voor } t > \frac{1}{2}, \\ y(\frac{1}{2}) = -1, \ y'(\frac{1}{2}) = 2. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat (1) equivalent is met het stelsel

$$(2) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = U_2(t), \\ U_2'(t) = -U_1(t) + 2\,U_2(t) + 48\,t - 36 \end{cases} \quad \text{voor } t > \tfrac{1}{2} \text{ met} \quad \begin{cases} U_1(\frac{1}{2}) = -1, \\ U_2(\frac{1}{2}) = 2. \end{cases}$$

(b) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, een vector $u_0 \in \mathbb{R}^2$ en een $t_0 \in \mathbb{R}$ zó dat (2) equivalent is met het beginwaardeprobleem

$$(3) \qquad \begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), & \text{voor } t > t_0, \\ U(t_0) = u_0. \end{cases}$$

We beschouwen de Runge-Kutta methode behorend bij de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Bepaal met behulp van deze methode en stapgrootte $h = \frac{1}{2}$ een benadering van $U(1)$.

Toepassing van bovenstaande methode met stapgrootte h levert een benadering $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$ van $U(1)$ op.
Er geldt $T_1(\frac{1}{3}) = -0.14813$, $T_1(\frac{1}{9}) = -0.01153$ en $T_1(\frac{1}{27}) = 0.00639$.

(d) Schat met behulp van bovenstaande benaderingen van $U_1(1)$ de orde van de Runge-Kutta methode M.

Men kan bewijzen dat

$$T_1(h) = U_1(1) + \gamma^{(1)} h^2 + \gamma^{(2)} h^3 + \mathcal{O}(h^4).$$

(e) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van $U_1(1)$. Geef uw antwoorden in 5 decimalen nauwkeurig.

4. We willen de integraal $I = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$ benaderen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel. Zij N een geheel positief getal, $h = \dfrac{1}{N}$.
Zij $\widetilde{I}_N$ de benadering van I verkregen met behulp van de uitgebreide trapeziumregel met $N + 1$ equidistante steunpunten.

(a) Hoe groot moet N minimaal zijn opdat $|\widetilde{I}_N - I| \leq 5 \cdot 10^{-6}$?

(b) Bepaal $\widetilde{I}_1$ en $\widetilde{I}_2$.

Er geldt dat $\widetilde{I}_4 = 0.69702$.

(c) Bepaal uitgaande van $\widetilde{I}_1$, $\widetilde{I}_2$ en $\widetilde{I}_4$ met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een betere benadering van I. Rond uw antwoorden af op 5 decimalen.