Tentamen Numerieke Wiskunde voor Informatici
maandag 8 januari 2001, 10.00 - 13.00 uur

(i) Gebruikte stellingen dienen duidelijk geformuleerd te worden. Laat bij toepassing van deze stellingen zien dat aan alle voorwaarden voldaan is. Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.

(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.

---

1. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1)\qquad \begin{cases} U_1'(t) = t + U_2(t), \quad t > 1, \\[2ex] U_2'(t) = \dfrac{U_3(t)}{t}, \quad t > 1, \\[2ex] U_3'(t) = U_1(t) - U_2(t), \quad t > 1, \\[2ex] U_1(1) = 1, \quad U_2(1) = 0, \quad U_3(1) = -1. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $u_0 \in \mathbb{R}^3$ zo dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > 1, \\[2ex] U(1) = u_0, \end{cases}$$

waarbij $U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \end{pmatrix}$.

We benaderen $U(3)$ met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De benadering van $U(3)$, verkregen door herhaalde toepassing van methode M met stapgrootte h, noteren we als $T(h)$ met $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ T_3(h) \end{pmatrix}$.

(b) Bepaal $T(2)$.

Het blijkt dat $T_1(h) = U_1(3) + \gamma h^2 + \delta h^3 + \mathcal{O}(h^4)$, waarbij γ en δ zekere constanten zijn. De waarden $T_1(\frac{2}{3})$ en $T_1(\frac{2}{9})$ zijn bekend: $T_1(\frac{2}{3}) = 4.68536$ en $T_1(\frac{2}{9}) = 4.88598$ (beide waarden in 6 cijfers nauwkeurig).

(c) Bepaal uit de waarden $T_1(2)$, $T_1(\frac{2}{3})$ en $T_1(\frac{2}{9})$ met extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van $U_1(3)$. Geef uw antwoorden in 6 cijfers nauwkeurig.

2. In een experiment wordt een grootheid $p \approx 3500$ gemeten. Van de gemeten waarde $\widetilde{p}$ is bekend dat zij een relatieve fout bezit, die in absolute waarde ten hoogste 10^{-4} is. We zijn geïnteresseerd in de waarde $y = \log(1 + \frac{1}{p})$ (hierbij is 'log' de natuurlijke logaritme).

(a) Bepaal het conditiegetal van y met betrekking tot p, en leid hieruit af dat de relatieve nauwkeurigheid waarmee y te bepalen is in absolute waarde (ongeveer) ten hoogste 10^{-4} is.

Voor de berekening van een benadering $\widetilde{y}$ van y gebruiken we een representatie met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Met $\oplus$, $\oslash$ en LOG noteren we de machine-versies van de rekenkundige operaties '+', '/' en 'log'. Er geldt dus voor alle representeerbare a en b: $a \oplus b = \mathrm{fl}_t(a + b)$, $a \oslash b = \mathrm{fl}_t(a/b)$ en $\mathrm{LOG}(a) = \mathrm{fl}_t(\log(a))$. We zullen de volgende algoritme gebruiken:

$$\mathrm{A}\ :\ \widetilde{y} = \mathrm{LOG}\big(1 \oplus (1 \oslash \widetilde{p})\big).$$

(b) Bepaal de conditiegetallen van algoritme A.

In het volgende mag worden aangenomen dat $\widetilde{p}$ representeerbaar is.

(c) Leid af hoe groot het aantal cijfers t van de representatie minstens moet zijn opdat voor de met algoritme A verkregen benadering $\widetilde{y}$ geldt: $|\widetilde{y} - y|/|y| \lesssim 2 \cdot 10^{-4}$.

3. Op het interval $[0, 1]$ zoeken we oplossingen van de vergelijking

(1) $$f(x) = 0, \text{ met } f(x) = x^2 - e^{-x}.$$

(a) Laat zien dat (1) precies één oplossing heeft op het interval $[0, 1]$.

We duiden deze oplossing aan met x^*. We kunnen x^* benaderen met behulp van de methode van Newton.

(b) Voer één stap van de methode van Newton uit met startwaarde $x_0 = 0.8000$.

Eenvoudig is in te zien dat x^* een dekpunt is van de vergelijking

$$x = g(x), \text{ met } g(x) = e^{-x/2}.$$

Beschouw het iteratieve proces, uitgaande van een startwaarde $x_0 \in [0, 1]$,

(2) $$x_{k+1} = g(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

(c) Bewijs dat x^* het enige dekpunt van g in het interval $[0, 1]$ is, en dat de rij $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ voor iedere $x_0 \in [0, 1]$ convergeert naar x^*.

Zij $x_0 = 0.8000$. Uitvoeren van iteratieproces (2) geeft de volgende, op 4 decimalen afgeronde waarden $\widetilde{x}_k = \mathrm{fl}_4(x_k)$: $\widetilde{x}_5 = 0.7030$ en $\widetilde{x}_6 = 0.7036$.

(d) Toon aan dat $|\widetilde{x}_6 - x^*| \leq 0.0008$.

4. Laat de rij t_1, t_2, t_3, t_4 voldoen aan $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq 3$. Zij de functie f op $[0,3]$ gegeven door

$$f(t) = \frac{1}{t+6}.$$

$P_{1,2,3,4}(t)$ is het interpolerende polynoom van orde 4 door de punten (t_i, η_i), waarbij $\eta_i = f(t_i)$ $(i = 1,2,3,4)$. Zij $r(t) = P_{1,2,3,4}(t) - f(t)$.

(a) Bewijs: $|r(t)| \leq \frac{1}{96}$ voor iedere $t \in [0,3]$.

We nemen in het vervolg van deze opgave: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$. Noteer de bijbehorende Lagrangepolynomen als L_i en definieer het bijbehorende interpolerende polynoom $P(t) = P_{1,2,3,4}(t)$.

(b) Bepaal $L_i(\frac{3}{2})$ $\quad (i = 1,2,3,4)$.

Gegeven zijn afrondingen $\widetilde{\eta}_i$ van η_i met de eigenschap dat $|\widetilde{\eta}_i - \eta_i| \leq \varepsilon$ $\quad (i = 1,2,3,4)$ voor zekere $\varepsilon > 0$. Zij $\widetilde{P}(t)$ het interpolerende polynoom door de punten $(t_i, \widetilde{\eta}_i)$ $\quad (i = 1,2,3,4)$.

(c) Bewijs: $|\widetilde{P}(\frac{3}{2}) - P(\frac{3}{2})| \leq \frac{5}{4}\varepsilon$.

(d) Zij $\widetilde{\eta}_i = \mathrm{fl}_m(\eta_i)$ waarbij het grondtal B gelijk is aan 10 en het aantal cijfers in de mantisse gelijk is aan m. Hoe groot moet m minstens zijn opdat $|\widetilde{P}(\frac{3}{2}) - f(\frac{3}{2})| \leq 0.02$?