Uitwerking Tentamen Analyse 2-A **20 maart 2003, 9.00-11.00 uur**

1. Zij gegeven de kromme in parametervorm $\mathbf{r}(t) = (2t^2, 1 - t^2, 2t^2 + 2t)$ en het punt $P = (2, 0, 4)$.

   Het punt $P = (2, 0, 4)$ wordt bereikt voor $t = 1$.
   Er geldt $\mathbf{r}'(t) = (4t, -2t, 4t + 2)$ en $\mathbf{r}''(t) = (4, -2, 4)$.

   (a) Bereken de raakvector $\mathbf{T}(t)$ in het punt P aan de kromme.

   $$\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{r}'(1)}{|\mathbf{r}'(1)|} = \frac{(4, -2, 6)}{\sqrt{56}} = \frac{(2, -1, 3)}{\sqrt{14}}.$$

   (b) Bereken de normaalvector $\mathbf{N}(t)$ in P op de kromme.

   $$\mathbf{T}(t) = \frac{(4t, -2t, 4t + 2)}{\sqrt{(4t)^2 + (2t)^2 + (4t + 2)^2}} = \frac{(2t, -t, 2t + 1)}{\sqrt{9t^2 + 4t + 1}}$$

   Zij $u = \sqrt{9t^2 + 4t + 1}$. Dan

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{T}'(t) &= \frac{(2u - 2t\frac{18t+4}{2u}, -u + t\frac{18t+4}{2u}, 2u - (2t + 1)\frac{18t+4}{2u})}{u^2} \\
   &= \frac{(2u^2 - 2t(9t + 2), -u^2 + t(9t + 2), 2u^2 - (2t + 1)(9t + 2))}{u^3} \\
   &= \frac{(4t + 2, -2t - 1, -5t)}{u^3}
   \end{aligned}$$

   en dus

   $$\mathbf{T}'(1) = \frac{(6, -3, -5)}{14\sqrt{14}}.$$

   De noemer is irrelevant voor de berekening van $\mathbf{N}$: alleen de richting telt!

   $$\mathbf{N}(1) = \frac{\mathbf{T}'(1)}{|\mathbf{T}'(1)|} = \frac{(6, -3, -5)}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-5)^2}} = \frac{(6, -3, -5)}{\sqrt{70}}$$

   (c) Bereken de binormaalvector $\mathbf{B}(t)$ in P op de kromme.

   Omdat $|\mathbf{B}(1)| = 1$ berekenen we eerst de richting.

   $$\mathbf{B}(1) = \mathbf{T}(1) \times \mathbf{N}(1) = c \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

   met c een constante. $|\mathbf{B}(1)| = 1$, dus

   $$\mathbf{B}(1) = \frac{(1, 2, 0)}{\sqrt{5}}.$$

(d) Bereken de kromming κ van de kromme in P.

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(1)|}{|\mathbf{r}'(1)|} = \frac{\sqrt{36+9+25}}{14\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{70}}{28 \cdot 14} = \frac{\sqrt{70}}{392}.$$

2. Zij gegeven het oppervlak $x^2 - y^2 - 3z^2 = 2$.

(a) Bereken het raakvlak aan het oppervlak in het punt $(3, 2, -1)$.

Zij $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 3z^2$. De normaalvector van het raakvlak aan het oppervlak in het punt (x_0, y_0, z_0) is $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, -2y_0, -6z_0)^T$. De vergelijking van het vlak wordt nu

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \quad &+ \quad F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = \\ 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - 6z_0(z - z_0) \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Uitwerken geeft

$$3x - 2y + 3z = 2.$$

(b) Bereken $\frac{\partial y}{\partial x}$ in het punt $(3, 2, -1)$.

Beschouw y als functie van x en z. Dan volgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}.$$

Invullen van het punt $(3, 2, -1)$ geeft $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3}{2}$.

3. Bepaal de vergelijking in rechthoekige coördinaten van het oppervlak dat in bolcoördinaten wordt gegeven door

$$\tan\phi \cos\theta = 1.$$

We schrijven de vergelijking om:

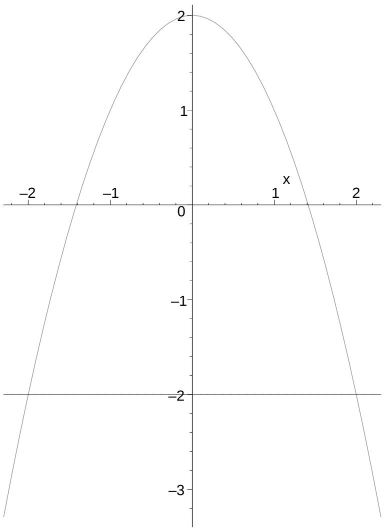
$$\begin{aligned} \tan\phi\cos\theta \quad &= \quad \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cos\theta \quad = \\ \frac{\rho\sin\phi\cos\theta}{\rho\cos\phi} \quad &= \quad \frac{x}{z} \quad = \quad 1. \end{aligned}$$

Het door de vergelijking gegeven vlak is dus het vlak $x = z$.

4. Bepaal de lokale en absolute extrema van de functie

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3y^2$$

op het gesloten gebied begrensd door de lijn $y = -2$ en de parabool $x^2 + y = 2$.



In de afbeelding is het gebied te zien, van boven begrensd door de (berg)parabool $y = 2 - x^2$ en van onderen begrensd door de lijn $y = -2$.

Eerst bepalen we de singuliere inwendige punten: $f_x = 3x^2 - 6xy = 0$. Dus $x = 0$ of $x = 2y$. $f_y = -3x^2 - 6y = 0$. Als $x = 0$, dan $y = 0$. Als $x = 2y$ dan $y = 0$ of $y = -\frac{1}{2}$. De singuliere punten zijn dus $(0,0)$ en $(-1, -\frac{1}{2})$. Uit de tekening blijkt dat dit beide inwendige punten zijn van het gebied. Echter, $f(x, 0) = x^3$ zodat $(0,0)$ geen lokaal extremum is en de Hessiaan in $(-1, -\frac{1}{2})$ is $(-3)(-6) - (-6)^2 = -18 < 0$, dus voor $(-1, -\frac{1}{2})$ is er een zadelpunt.

Beschouw nu de rand:
Voor $y = -2$ vinden we $f(x, -2) = x^3 + 6x^2 - 12$. Voor $y = 2 - x^2$ vinden we ook $x^3 + 6x^2 - 12$. De functie $x^3 + 6x^2 - 12$ neemt op het open interval $(-2, 2)$ alleen een extremum aan als $3x^2 + 12x = 0$, dus voor $x = 0$. We hoeven dus alleen de randpunten $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(0,2)$ en $(0,-2)$ te beschouwen. De functiewaarden in deze punten zijn $f(-2,-2) = -8 + 24 - 12 = 4$, $f(2,-2) = 8 + 24 - 12 = 20$, $f(0,2) = -12$ en $f(0,-2) = -12$. Dus het absolute maximum is 20 in $(2,-2)$ en het absolute minimum is -12 in $(0,2)$ en $(0,-2)$. Resteert het punt $(-2,-2)$. Zij S het deel van het gebied waarvoor $x \leq 0$. S is een gesloten, begrensd gebied, dus f neemt op S een maximum en een minimum aan. Aangezien f in het inwendige van S geen extrema heeft moet het maximum van f op S op de rand van S liggen. Er geldt $f(0, y) \leq 0$. We hebben al gezien dat er geen extrema worden aangenomen op de randen als $-2 < x < 0$. Dus $f(-2,-2) = 4$ is een absoluut maximum op S en dus een lokaal maximum op het hele gebied.

N.B. Waardering: vraagstukken 1, 2 en 3 elk 10 punten, vraagstuk 4 echter 20 punten.