Tentamen Analyse II, 11 juni 2001

Studenten die deelnemen aan het deeltentamen Analyse 2-B moeten de opgaven 3, 4, 5 en 6 maken. De andere studenten maken de opgaven 1, 2, 3, 4, 5 en 6.

1. (a) Bepaal alle punten van $\mathbb{R}^2$ waar de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin\ x)y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

continu is.

(b) Bepaal alle punten van $\mathbb{R}^2$ waar de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

differentieerbaar is.

2. Gegeven de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x, y) = xy$.

(a) Bepaal, indien het bestaat, het maximum en het minimum van de functie f op de verzameling

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + 2y^4 < 64\}.$$

(b) Bepaal, indien het bestaat, het maximum en het minimum van de functie f op de verzameling

$$\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + 2y^4 = 64\}.$$

3. Bereken de oppervlakte van het gebied G in het eerste kwadrant, ingesloten door de krommen $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ en $y = 2x$. Gebruik hierbij de substitutie

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y/x. \end{cases}$$

(a) Teken de krommen in een grafiek en arceer het gebied.

(b) Druk x en y uit in u en v en beschrijf G in termen u en v.

(c) Bepaal de Jacobiaan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(d) Bereken de oppervlakte van het gebied G.

4. Gegeven het vectorveld

$$\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + (3y^2 - \frac{x}{x^2 + y^2})\mathbf{j}.$$

(a) Is $\vec{F}$ conservatief op $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$? Zo ja, bepaal een potentiaalfunctie. Zo nee, laat zien waarom niet.

(b) Is $\vec{F}$ conservatief op $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$? Zo ja, bepaal een potentiaalfunctie. Zo nee, laat zien waarom niet.

5. Gegeven zijn het oppervlak

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 25, y \geq 1\}$$

en het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

De orientatie van S is van het punt $(0, 5, 0)$ vandaan (dus naar buiten) gericht. Bepaal

$$\int\int_S \text{curl } \vec{F} d\vec{S}.$$

6. Bepaal

$$\int\int_S \vec{F} d\vec{S},$$

waarbij

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + (z - 2xz + 2yz)\mathbf{k}$$

en het oppervlak S gegeven is als in onderstaande figuur. De orientatie van S is (zoals gebruikelijk) naar buiten gericht en alle lijnstukken staan orthogonaal.