# Tentamen Analyse II, 1 augustus 2002

Studenten die deelnemen aan het deeltentamen Analyse 2-B mogen de opgaven 3, 4, 5 en 6 maken. De andere studenten maken de opgaven 1, 2, 3, 4, 5 en 6.

1. (a) Bepaal alle punten van $[-1,1]\times[-1,1]$ waar de functie $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \ \arcsin\ (xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

continu is.

(b) Bepaal alle punten van $\mathbb{R}^3$ waar de functie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

differentieerbaar is.

2. (a) Gegeven de functie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ door $f(x,y)=\sin\,x+\sin\,y$. Bepaal de locale en globale extrema van $f$ op $\mathbb{R}^2$.

(b) Bepaal met de methode van Euler en Lagrange de globale extrema van de functie $f(x,y,z)=xyz$ op de verzameling

$$\mathcal{N} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^4+y^2+z^4=1\}.$$

3. Bereken de oppervlakte van het gebied $G$ in het eerste kwadrant, ingesloten door de krommen $x^2y=1$, $x^2y=4$, $y=x/2$ en $y=2x$. Gebruik hierbij de substitutie

$$\begin{cases} u = x^2y, \\ v = y/x. \end{cases}$$

(a) Teken de krommen in een grafiek en arceer het gebied $G$.

(b) Druk $x$ en $y$ uit in $u$ en $v$ en beschrijf $G$ in termen $u$ en $v$.

(c) Bepaal de Jacobiaan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(d) Bereken de oppervlakte van het gebied $G$.

4. Gegeven het vectorveld

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - x\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-x}{x^2+y^2} + y\right)\mathbf{j}.$$

(a) Is $\vec{F}$ conservatief op $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$? Zo ja, bepaal een potentiaalfunctie. Zo nee, laat zien waarom niet.

(b) Is $\vec{F}$ conservatief op $E=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$? Zo ja, bepaal een potentiaalfunctie. Zo nee, laat zien waarom niet.

5. Gegeven zijn de verzameling $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(-2,0),(2,0),(0,2)\}$ en de functies $P : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ en $Q : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. De functies $P$ en $Q$ hebben continue partiële afgeleiden en op $\mathcal{M}$ geldt $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Zij $C_1$ een positief georiënteerde cirkel met straal 1/2 om het punt $(-2,0)$, $C_2$ een positief georiënteerde cirkel met straal 1/2 om het punt $(2,0)$ en $C_3$ een positief georiënteerde cirkel met straal 1/2 om het punt $(0,2)$. Zij

$$I_k = \int_{C_k} Pdx + Qdy \qquad (k = 1,2,3).$$

(a) Teken de drie punten $(-2,0),(2,0),(0,2)$ en de cirkels $C_1$, $C_2$ en $C_3$. Teken ook de kromme $J$ met parameterisatie $\vec{r} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door

$$\vec{r}(t) =< 3\cos t, \sin 2t > .$$

(b) Gegeven is $I_1 = 12$, $I_2 = 10$, $I_3 = 15$. Bepaal

$$\int_J Pdx + Qdy.$$

(c) Teken een stuksgewijs gladde kromme $K$ zo dat

$$\int_K Pdx + Qdy = 1.$$

(d) Gegeven is $I_1 = 12$, $I_2 = 9$, $I_3 = 15$. Bestaat er een stuksgewijs gladddde kromme $L$ zo dat

$$\int_L Pdx + Qdy = 1?$$

6. Zij gegeven het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door

$$\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$$

en de kromme $C$ in $\mathbb{R}^3$, met de parameterisatie $\vec{r} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{r}(\phi) = (2 + \cos\,(8\phi)) < \cos\,\phi, \sin\,\phi, 1 > .$$

Bepaal

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}.$$

Cijfer $= 1 + \frac{(9+6)+(8+7)+(4+4+4+3)+(9+6)+(5+5+3+2)+15}{10}$.