HOOFDSTUK 8 SYMMETRISCHE BLOKDIAGRAMMEN

Een (b, v, r, k, λ) blokdiagram heet symmetrisch als $b = v$. Uit $bk = vr$ volgt dan $k = r$. We spreken voortaan kortweg van een (v, k, λ) – blokdiagram. Uit $\lambda(v-1) = (k-1)r$ volgt dat voor symmetrische blokdiagrammen

(1) $$(v-1)\lambda = k(k-1).$$

De ongelijkheden in het vorige hoofdstuk impliceren dat $v-1 > k > \lambda$ en $v - 2k + \lambda > 0$.

Voorbeelden worden gegeven door het projectieve vlak van orde p^k (een $(p^{2k}+p^k+1,\ p^k+1,\ 1)$ – blokdiagram) en het $(11,5,2)$ blokdiagram van voorbeeld 2 op p.40.

Stelling 8.1. (Ryser, 1950)
Zij A de incidentiematrix van een (v, k, λ)-blokdiagram. Dan geldt

(2) $$AA^T = A^TA = (k-\lambda) I_v + \lambda J_{vv}.$$

Bewijs. Uit (7.5) en het bewijs van Stelling 7.2 volgt

$$AA^T = (k-\lambda) I_v + \lambda J_{vv}$$

en $$\det(AA^T) = (k + (v-1)\lambda)(k-\lambda)^{v-1} > 0.$$

Dus $\det A \neq 0$. Matrix A heeft dus een inverse A^{-1}.
Uit (7.3) en (7.4) volgt $AJ_{vv} = J_{vv}A$. Dus $A^{-1}J_{vv}A = J_{vv}$
Nu volgt

$$A^TA = A^{-1}(AA^T)A = A^{-1}\left((k-\lambda)I_v + \lambda J_{vv}\right)A$$

$$= (k-\lambda) A^{-1}I_vA + \lambda A^{-1}J_{vv}A = (k-\lambda) I_v + \lambda J_{vv} = AA^T. \square$$

Gevolg 1. Beschouw A^T als de incidentiematrix van een configuratie. Wegens (7.4), (7.3) en Stelling 8.1 is aan (7.3), (7.4), (7.5) door A^T voldaan

Er geldt immers $J_{vv} A^T = k J_{vv} = A^T J_{vv}$ en $A^T A = (k-\lambda) I_v + \lambda J_{vv}$.
We noemen de met A^T corresponderende blokdiagram het <u>duale blokdiagram</u> van het oorspronkelijke blokdiagram.
De duale van een (v,k,λ) blokdiagram is ook een (v,k,λ)-blokdiagram.

<u>Gevolg 2.</u> Uit Stelling 8.1 volgt dat $|X_i \cap X_j| = \lambda$ als $i \neq j$. Het aantal elementen in de doorsnede van twee verschillende blokken is dus een invariant, namelijk λ. Met behulp van dit gegeven kunnen we uit een gegeven (v,k,λ)-blokdiagram twee nieuwe, niet-symmetrische blokdiagrammen construeren. Het eerste blokdiagram, het zg. <u>afgeleide diagram</u>, krijgen we door één blok apart te nemen en uit de overige blokken die elementen te nemen die in de doorsnede met dat ene blok zitten. Dit blokdiagram heeft parameters $(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1)$. Op dat dit een echt blokdiagram is, moet gelden $k \geq \lambda+2 \geq 4$. Het tweede, zg. <u>restblokdiagram</u> krijgen we door van elk blok die elementen te behouden die <u>niet</u> in de doorsnede met het ene blok zitten. Dit blokdiagram heeft parameters $(v-1, v-k, k, k-\lambda, \lambda)$. Op dat dit een echt blokdiagram is, moet gelden $v+\lambda \geq 2k+2$.

<u>Voorbeeld</u>

X_0:	0	1	2	3	4	5	6
X_1:	0	1	2	7	8	9	10
X_2:	0	1	2	11	12	13	14
X_3:	0	3	4	7	8	11	12
X_4:	0	3	4	9	10	13	14
X_5:	0	5	6	7	8	13	14
X_6:	0	5	6	9	10	11	12
X_7:	1	3	5	7	9	11	13
X_8:	1	3	6	7	10	12	14
X_9:	1	4	5	8	10	11	14
X_{10}:	1	4	6	8	9	12	13
X_{11}:	2	3	5	8	10	12	13
X_{12}:	2	3	6	8	9	11	14
X_{13}:	2	4	5	7	9	12	14
X_{14}:	2	4	6	7	10	11	13

Symmetrisch blokdiagram $(15, 7, 3)$

Uitgezonderd blok : X_0

Afgeleide diagram (linksonder) heeft parameters $(14, 7, 6, 3, 2)$

Restblokdiagram (rechtsonder) heeft parameters $(14, 8, 7, 4, 3)$

In de rest van dit hoofdstuk bestuderen we blokdiagrammen die samenhangen met Hadamard-matrices.

<u>Definitie</u>. Een $m \times m$-matrix H heet een <u>Hadamard-matrix</u> als H alleen elementen ± 1 heeft en $HH^T = m\, I_m$.

Uit de definitie volgt $(\det H)^2 = m^m$ en dus $|\det H| = m^{m/2}$. Dit is de grootste waarde die $|\det H|$ kan aannemen gegeven het feit dat de elementen ± 1 zijn. Dit betekent dat alle rijen (en ook alle kolommen) loodrecht op elkaar staan.

Voorbeelden. $m = 2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $m = 4$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Uit $HH^T = m\, I_m$ volgt $H^{-1} = \frac{1}{m} H^T$. De inverse van een Hadamardmatrix is dus simpel op te schrijven.

<u>Stelling 8.2</u> Uit een Hadamardmatrix van orde m en ℓ kan een Hadamardmatrix van orde $m\ell$ geconstrueerd worden.

Bewijs. Zij $A = (a_{ij})$ een $m \times m$-Hadamardmatrix en $B = (b_{rs})$ een $\ell \times \ell$ Hadamardmatrix. Dan is het directe product $A \times B$ gedefinieerd door

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

een Hadamardmatrix van orde $m\ell$. Er geldt namelijk (ga na)

$$(A \times B)(A \times B)^T = AA^T \times BB^T = m\, I_m \times \ell\, I_\ell = m\ell\, I_{m\ell} \quad \square$$

<u>Gevolg</u>. Voor elke macht 2^a van 2 bestaat een Hadamardmatrix van orde 2^a.

Er bestaan ook Hadamardmatrices waarvan de orde geen macht van 2 is. Wel geldt:

<u>Stelling 23.</u> Als H een Hadamardmatrix van orde $m \geq 3$ is, dan geldt $4 | m$.

Bewijs. Door een rij of kolom van een Hadamardmatrix met -1 te vermenigvuldigen gaat de matrix in een andere Hadamardmatrix over. We kunnen zo de Hadamardmatrix normeren, d.w.z. zorgen dat de eerste rij en kolom uit enen bestaat. Er is dus een genormeerde H-matrix van orde m. Omdat de eerste rij loodrecht staat op de tweede, zijn er in de tweede rij evenveel enen als min-enen. Dus m is even. Permuteer de kolommen zó dat de eerste $m/2$ elementen van de tweede rij $+1$ zijn, de laatste $m/2$ elementen -1. Beschouw nu de derde rij. Omdat deze loodrecht staat op de eerste, zijn er ook $m/2$ enen en $m/2$ min enen. Stel er zijn t enen onder de eerste $m/2$. Dan $m/2 - t$ min enen. Verder zijn er dan $m/2 - t$ enen onder de laatste $m/2$ elementen en dus t min enen. Maar de derde rij staat ook loodrecht op de tweede, dus

$$0 = t - \left(\frac{m}{2} - t\right) - \left(\frac{m}{2} - t\right) + t = 4t - m.$$

Dus $m = 4t$ is een viervoud. $\square$

Vermoed wordt dat er voor elk viervoud m een Hadamardmatrix van orde m bestaat. Het is bewezen voor de m met $m < 428$.

We zullen bewijzen dat een H-matrix in een symmetrisch blokdiagram overgaat door te normeren, de eerste rij en kolom weg te laten en de -1 overal door 0 te vervangen. Dit levert voor $m \geq 8$ de incidentiematrix van een blokdiagram.

Voorbeeld:

$H_2 \times H_4$ (projectief vlak van orde 2) parameters $(7,3,1)$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{l}
X_1 : 1\ 4\ 5 \\
X_2 : 2\ 4\ 6 \\
X_3 : 3\ 4\ 7 \\
X_4 : 1\ 2\ 3 \\
X_5 : 1\ 6\ 7 \\
X_6 : 2\ 5\ 7 \\
X_7 : 3\ 5\ 6
\end{array}$$

Eerst opmerken H is H-matrix $\Rightarrow$ H' is H-matrix

Stelling 8.4. Een genormeerde H-matrix van orde $m = 4t \geq 8$ correspondeert met een $(4t-1, 2t-1, t-1)$-blokdiagram.

Bewijs. $\Rightarrow$ Laat de eerste rij en kolom weg en vervang elke -1 door 0. Dan geldt voor de ontstane matrix H^*

$$J_{m-1,m-1} \, H^* = \underbrace{\left(\tfrac{m}{2} - 1\right)}_{\text{enen}} J_{m-1,m-1} = H^* J_{m-1,m-1}$$

en

$$H^* {H^*}^T = \underbrace{\left(\tfrac{m}{4} - 1\right)}_{m/4 \text{ enen gemeen } 2 \text{ versch. rijen}} J_{m-1,m-1} + \left(\tfrac{m}{2} - \tfrac{m}{4}\right) I_{m-1} = t \, I_{m-1} + (t-1) J_{m-1,m-1}$$

Dus H^* is de incidentiematrix van een $(4t-1, 2t-1, t-1)$-blokdiagram.

$\Leftarrow$ Na het omgekeerde proces geldt voor de ontstane matrix H

$$HH^T = (1 + (t-1) - t - t + t) J_{m,m} + m \, I_m = m \, I_m . \qquad \square$$

Het complement van een $(4t-1, 2t-1, t-1)$-blokdiagram is een $(4t-1, 2t, t)$-blokdiagram. Beide heten Hadamard-blokdiagrammen. Omdat Hadamardmatrices op verschillende wijze genormeerd kunnen worden, kunnen niet-isomorfe Hadamard-blokdiagrammen corresponderen met isomorfe Hadamardmatrices.

Gevolg van Stelling 8.4 en het Gevolg van Stelling 8.2 is dat voor elk natuurlijk getal $a \geq 2$ er een $(2^a - 1, 2^{a-1} - 1, 2^{a-2} - 1)$ en een $(2^a - 1, 2^{a-1}, 2^{a-2})$ blokdiagram bestaan.

Tenslotte geven we nog een ander verband tussen Hadamardmatrices en blokdiagrammen.

Stelling 8.5. Bij elk $(4u^2, 2u^2 \pm u, u^2 \pm u)$ blokdiagram bestaat een Hadamardmatrix van orde $m = 4u^2$.

Bewijs. Het eventueel complementaire blokdiagram heeft parameters $(4u^2, 2u^2 + u, u^2 + u)$. Vervang in de incidentiematrix elke 0 door -1. Dan ontstaat een $4u^2 \times 4u^2$ matrix H waarvoor geldt

$$HH^T = 4u^2 \, I_m + \left((u^2 + u) - u^2 - u^2 + (u^2 - u)\right) J_{m,m} = m \, I_m \qquad \square$$