HOOFDSTUK 1. RECURRENTE RIJEN.

In het college Discrete Wiskunde is hier al aandacht aan besteed. Hier werken we de theorie van een belangrijke klasse van recurrente rijen verder uit, nl. van de lineaire recurrente relaties met constante coëfficiënten. Deze theorie is geheel analoog aan de theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

Stel gegeven zijn vaste getallen $a_1, \dots, a_r$ en de beginwaarden $u_0, \dots, u_{r-1}$. Definiëren we u_n inductief door

(1) $$u_n = -a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} \cdots - a_r u_{n-r} \qquad (n = r, r+1, \dots),$$

dan is daarmee de rij $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ geheel bepaald. Een voorbeeld van zo'n rij is de rij van Fibonacci, waarnaar zelfs een tijdschrift genoemd is: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.
Er volgt $u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, \dots$
De hoofdstelling over deze rijen luidt:

<u>Stelling 1.1.</u> Stel complexe getallen $a_1, \dots, a_r$ en $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$ zijn gegeven (met $a_r \neq 0$) en $u_r, u_{r+1}, \dots$ worden recursief door (1) gedefinieerd. Zij

$$z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r = \prod_{j=1}^{s} (z - \alpha_j)^{e_j},$$

met $\alpha_i \neq \alpha_j$ voor $i \neq j$. (Dus $e_1 + \dots + e_s = r$.) Dan is u_n te schrijven als

(2) $$u_n = \sum_{j=1}^{s} P_j(n)\, \alpha_j^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

waarbij P_j een polynoom van graad $< e_j$ is, waarvan de coëfficiënten uit $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, a_1, \dots, a_r$ berekend kunnen worden en daardoor eenduidig vastgelegd zijn.

<u>Voorbeeld 1.</u> De rij van Fibonacci. Het „karakteristieke polynoom" is $z^2 - z - 1$. Hieruit volgt $e_1 = e_2 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dus

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n .$$

In het bijzonder

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2 = 0 \\ u_1 &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Dus} \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \; c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Hieruit volgt

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Merk op dat $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ en dat de tweede term dus zeer snel naar 0 convergeert.

<u>Voorbeeld 2.</u> Stel $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 11$ en $u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-3}$ voor $n \geq 3$. Dan volgt $P(z) = z^3 - 3z + 2 = (z-1)^2(z+2)$. Dus $\alpha_1 = 1, e_1 = 2, \alpha_2 = -2, e_2 = 1$. Volgens de stelling geldt

$$u_n = c_0 + c_1 n + c_2(-2)^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Uit

$$\left.\begin{aligned} 0 = u_0 &= c_0 \phantom{{}+c_1} + c_2 \\ 1 = u_1 &= c_0 + c_1 - 2c_2 \\ 11 = u_2 &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 \end{aligned}\right\} \text{ volgt } \quad c_0 = -1, \; c_1 = 4, \; c_2 = 1.$$

Dus

$$u_n = 4n - 1 + (-2)^n .$$

<u>Bewijs van Stelling 1.1.</u>

Zij $|z| < \min_j |\alpha_j|^{-1}$. We definiëren $a_0 = 1$, $a_{r+1} = a_{r+2} = \ldots = 0$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \qquad k(z) = \sum_{i=0}^{r} a_i z^i = \prod_{j=1}^{s} (1 - \alpha_j z)^{e_j}.$$

Dan volgt

$$g(z) \cdot k(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n\right)\left(\sum_{i=0}^{r} a_i z^i\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (u_m + u_{m-1}a_1 + \ldots) z^m$$

$$= \sum_{m=0}^{r-1} \underbrace{(u_m + a_1 u_{m-1} + \ldots + a_m u_0)}_{h_m} z^m =: \sum_{m=0}^{r-1} h_m z^m .$$

We gaan nu breuksplitsen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{\sum_{m=0}^{r-1} h_m z^m}{k(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{r-1} h_m z^m}{\prod_{j=1}^{s} (1-\alpha_j z)^{e_j}} \overset{e_1+\ldots+e_s=r}{=} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{(1-\alpha_j z)}$$

voor zekere complexe getallen β_{ij}, die éénduidig bepaald zijn. Omdat $|z|$ voldoende klein is, kunnen we $(1-\alpha_j z)^{-i}$ in een machtreeks ontwikkelen. Er is absolute convergentie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{e_j} \beta_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-i}{n} (-\alpha_j z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{e_j} \beta_{ij} \binom{n+i-1}{n} \alpha_j^n \right) z^n .$$

Door de coëfficiënten te vergelijken vinden we

$$u_n = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{e_j} \beta_{ij} \binom{n+i-1}{i-1} \alpha_j^n .$$

We definiëren $P_j(z) = \sum_{i=1}^{e_j} \beta_{ij} \frac{(z+i-1)(z+i-2)\cdots(z+1)}{(i-1)!}$ $(j=1,\dots,s)$.

P_j is een polynoom van graad kleiner dan e_j, dat éénduidig bepaald is. Verder geldt

$$u_n = \sum_{j=1}^{s} P_j(n) \alpha_j^n \qquad (n=0,1,\dots). \qquad \square$$

De omgekeerde bewering dat elke rij $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ gedefinieerd door (2) voldoet aan de overeenkomstige recurrentierelatie (1) is ook waar. (Opgave.)

De analogie met differentiaalvergelijkingen gaat ook door voor inhomogene relaties. Stel gegeven zijn vaste getallen $a_1,\dots,a_r$, beginwaarden $u_0,\dots,u_{r-1}$ en een functie P. We definiëren de rij $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ door

(3) $\qquad u_n = -a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} \cdots - a_r u_{n-r} + P(n) \qquad (n=r, r+1, \dots).$

Stel we hebben twee rijen $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ die aan (3) voldoen. Dan voldoet de rij $\{v_n - w_n\}_{n=0}^{\infty}$ aan (1). Dus we vinden de algemene oplossing van (3) door bij een particuliere oplossing van (3) de algemene oplossing van (1) op te tellen. De particuliere oplossing is te bepalen door slim te proberen. Bij gegeven beginwaarden $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$ is de oplossing dan expliciet te berekenen.

<u>Voorbeeld 3.</u> $u_n = 2u_{n-1} + n, \qquad u_0 = 1.$

De homogene vergelijking is $u_n = 2u_{n-1}$ met als oplossing $u_n = c.2^n$. Een particuliere oplossing vinden we door $u_n = an+b$ te substitueren. Dit levert dat $u_n = -n-2$ voldoet. De algemene oplossing is dus

$$u_n = c.2^n - n - 2.$$

Door $u_0 = 1$ in te vullen vinden we $c = 3$ en dus $u_n = 3.2^n - n - 2$.

<u>Voorbeeld 4.</u> $u_0 = 1, \qquad u_n = u_{n-1} + n.$

De homogene vergelijking is $u_n = u_{n-1}$ met als oplossing $u_n = c$. Een particuliere oplossing vinden we door $u_n = an^2 + bn$ te substitueren. Een oplossing is $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. De algemene oplossing is dus $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c$. Uit $u_0 = 1$ vinden we nu $u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$

<u>Voorbeeld 5.</u> $u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-3} + 9(-2)^n + 6,$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 11.$$

De homogene oplossing is in voorbeeld 2 uitgerekend:

$$c_0 + c_1 n + c_2(-2)^n.$$

(De waarden van c_0, c_1 en c_2 kloppen natuurlijk niet meer!)

Een particuliere oplossing vinden we door te substitueren:

$$u_n = an^2 + bn(-2)^n.$$

Een rekenpartij, iets te vereenvoudigen door

$$u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n + 9(-2)^{n+3} + 6$$

te beschouwen, levert als oplossing $a = 1, b = 4$. (Reken na)

Zo vinden we als algemene oplossing van de inhomogene vergelijking:

$$u_n = c_0 + c_1 n + c_2(-2)^n + n^2 + 4n(-2)^n.$$

Door de beginwaarden in te vullen vinden we

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_0 + c_2 \\ 1 &= c_0 + c_1 - 2c_2 - 7 \\ 11 &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 36. \end{aligned}\right\} \quad \text{en dus } c_0 = \frac{41}{9},\ c_1 = \frac{-17}{3},\ c_2 = \frac{-41}{9}$$

De gezochte oplossing is dus

$$u_n = \boxed{n^2 - \frac{17}{3}n + \frac{41}{9} + \left(4n - \frac{41}{9}\right)(-2)^n}$$