HOOFDSTUK 12 Permutaties en combinaties, partities.

Een permutatie van n verschillende objecten is een ordening van deze objecten in een rij. Dit kan op $n!$ manieren. Een r-permutatie uit n verschillende objecten is een ordening van r van deze objecten. Dit kan op $n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ wijzen. We schrijven $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Een r-combinatie uit n verschillende objecten is een (ongeordende) deelverzameling van r uit n objecten. Dit kan op $C(n,r) := \binom{n}{r}$ manieren. Merk op $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{P(n,r)}{r!} = C(n,n-r)$.

De binomiaalcoëfficiënten vormen samen de <u>driehoek van Pascal</u>

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Belangrijke formules zijn: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Als we er niets bij zeggen, zoals boven, bedoelen we permutaties en combinaties <u>zonder herhalingen</u>. Het is echter ook mogelijk dat herhalingen worden toegestaan. Dat vergroot natuurlijk het aantal mogelijkheden.

Een r-permutatie uit n ~~verschillende~~ objecten met herhalingen geeft elke keer n mogelijkheden, in totaal dus n^r.
Een r-combinatie uit n ~~verschillende~~ objecten met herhalingen wordt bepaald door het aantal herhalingen van elk object. Orden de objecten ~~en~~ $1, 2, \ldots, n$ en geef met kruizen aan hoeveel maal $1, 2,$ enz.
bijv 3 van 1, 2 van 2, 0 van 3 en 1 van 4 wordt $\bullet\bullet\bullet \times \bullet\bullet \times\times \bullet$
We zien dat de kruizen de uitkomst bepalen. We kiezen $n-1$ kruizen uit $n+r-1$ plaatsen. Het antwoord is dus $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$

Omdat $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-1)^r = (-1)^r\binom{-n}{r}$,

wordt de genererende functie gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-n}{r}x^r = (1-x)^{-n}.$$ (vgl. $(1+x)^n$ zonder herhalingen)

Ook voor de permutaties bestaan genererende functies, maar deze zijn van "exponentiaal type" $\sum_{n=0}^{\infty}\ldots\frac{x^n}{n!}$.
We hebben

$$\sum_{r=0}^{\infty}P(n,r)\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r = (1+x)^n \text{ en}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(nx)^r}{r!} = e^{nx}.$$

Bij combinaties met herhalingen was bepalend hoe vaak elk element voorkwam. Vaak wordt dit ook voorgeschreven bij permutaties. We hebben dit al in Hoofdstuk 2 ontmoet. Stel er zijn n objecten, i_1 van type 1, i_2 van type 2, ..., i_r van type r. Dus $i_1+i_2+\cdots+i_r$. Als er geen onderscheid te maken is tussen objecten van hetzelfde type, hoeveel verschillende rijtjes zijn dan mogelijk? Het antwoord is

$$\frac{n!}{i_1!\,i_2!\cdots i_r!} = \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-i_2\cdots-i_{r-1}}{i_r}$$

We noemen dit een multinomiaalcoëfficient, notatie $\binom{n}{i_1\,i_2\cdots i_r}$

De genererende functies is

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}\\ i_1+i_2+\cdots+i_r=n}}\binom{n}{i_1\,i_2\cdots i_r}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_r^{i_r}.$$

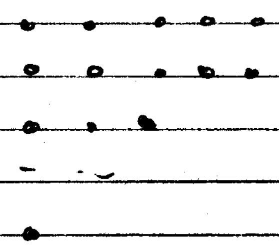
Direct volgt dat $\sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_r)\\ i_1+i_2+\cdots+i_r=n}}\binom{n}{i_1\,i_2\cdots i_r} = r^n$.

Als ook de types niet meer onderscheiden kunnen worden, komen we terecht bij de partities.

Een <u>partitie</u> van n is een rijtje getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ met $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ en $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.
Het aantal partities in k delen noteren we met $p_k(n)$.
Het totaal aantal partities van n is $p(n) := \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$.

<u>Voorbeeld</u> De partities van 5 zijn 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1. We noteren 5, (4,1), (3,2), (3,1,1), enz.
Dus $p(5) = 7$, $p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(5) = 1$.

De <u>Ferrier-graaf</u> of <u>Youngdiagram</u> van een partitie is:



a_1 stippen

a_2 stippen

a_3 stippen

a_k stippen

Partitie $(5,5,3,\ldots,1)$

<u>Stelling 12.1</u> $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k)$

<u>Bewijs</u> Laat in het Young diagram van elke rij de laatste stip weg. Dan krijgen we een partitie van $n-k$ in ten hoogste k delen. $\square$

<u>Stelling 12.2</u> Het aantal partities van n met geen deel groter dan m is gelijk aan het aantal partities van n in ten hoogste m delen.

<u>Bewijs.</u> Vergelijk het Young diagram met het gespiegelde diagram. Dit levert een bijectie tussen beide soorten partities. $\square$

Een belangrijk hulpmiddel bij bewijzen over partities zijn genererende functies. Hierbij beschouwen we producten over m van factoren

$$1 + \delta_1(m) x^m + \delta_2(m) x^{2m} + \ldots$$

met

$$\delta_i(m) = \begin{cases} 1 & \text{als } i \text{ delen } m \text{ zijn toegestaan} \\ 0 & \text{als } i \text{ delen } m \text{ niet zijn toegestaan.} \end{cases}$$

Het aantal partities $p_V(n)$ van n in onderling verschillende delen wordt gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_V(n)\, x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m)$$

Het aantal partities $p_M(n)$ van n in delen $\leq M$ wordt gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_M(n)\, x^n = \prod_{m=1}^{M} (1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+\dots).$$

Omdat het bij elke n om een eindige som gaat, kunnen we formeel met machtreeksen rekenen zonder op convergentie te letten.

Het aantal partities $p(n)$ van n wordt gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m+x^{2m}+\dots) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}.$$

De aantallen partities van n in oneven delen, $p_O(n)$, resp. even delen, $p_E(n)$, worden gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_O(n) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_E(n) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}.$$

Hierbij spreken we af dat $p_V(0) = p_M(0) = p(0) = p_O(0) = p_E(0) = 1$.

<u>Stelling 12.3 (Euler)</u> Het aantal partities van n in verschillende delen is gelijk aan het aantal partities van n in oneven delen.

<u>Bewijs</u>. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_V(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^{2m}}{1-x^m} = \prod_{\substack{m=1 \\ m \text{ oneven}}}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p_O(n)x^n$

Dus $p_V(n) = p_O(n)$ voor elke n. $\square$

We gebruikten dat de factoren $1-x^r$ met r even in teller èn noemer, met r oneven alleen in de noemer voorkomen.

Partities spelen een rol bij het tellen van permutaties. Een element $\sigma \in S_n$ is te schrijven als product van disjuncte cykels. Als die cykelsplitsing r_1 cykels van lengte 1, r_2 cykels van lengte r_2, etc. bevat, dan geldt $n = r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 2 + \dots + r_n \cdot n$. We zeggen dat dat σ cykeltype $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ heeft.

Stelling 12.4 (Cauchy) Het aantal permutaties in S_n met cykeltype $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ wordt gegeven door

$$(*) \quad a(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{n!}{1^{r_1} 2^{r_2} \cdots n^{r_n} \, r_1! \, r_2! \cdots r_n!} \qquad (\text{met } r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n)$$

Bewijs. We kunnen σ opschrijven door r_1 cykels van lengte 1, r_2 cykels van lengte 2, enz. in te vullen met de elementen $1, 2, \ldots, n$. Dat geeft a priori $n!$ mogelijkheden. Daarvan leiden een aantal tot dezelfde permutatie. Twee invullingen stellen dezelfde permutatie voor precies dan als cykels van gelijke lengte verwisseld zijn of de elementen binnen een cykel cyclisch verschoven zijn. Verwisselen van de cykels van lengte i kan op $r_i!$ manieren. Cyclisch verschuiven in een cykel van lengte i kan op i manieren. Er zijn r_i zulke cykels. Omdat dit onafhankelijke operaties zijn, geeft de noemer van $(*)$ precies het aantal verschillende invullingen voor één permutatie van cirkeltype $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. □

We leiden nu een recurrentieformule voor $p(n)$ af. We stellen $p(n) = 0$ voor $n < 0$.

Stelling 12.5 (Euler) $p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left\{ p\left(n - \frac{3k^2 - k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2 + k}{2}\right) \right\}$.

Vanaf zekere k zijn alle termen 0. De som is dus eindig. Uitgeschreven vinden we

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + p(n-35) + p(n-40) \ldots$$

Zo berekenen we inductief: $p(0) = p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$, $p(9) = 30$, $p(10) = 42$, ...

Dit is een efficiënte manier om bijv. $p(n)$ voor $n \leq 100$ te berekenen. Het zegt weinig over hoe $p(n)$ groeit als $n \to \infty$. Hardy en Ramanujan bewezen m.b.v. modulaire functies dat

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \, e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3} n}}.$$

We baseren het bewijs van Stelling 12.5 op een stelling uit 1881:

Stelling 12.6 (Franklin). $\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}\right).$

Bewijs dat Stelling 12.5 uit Stelling 12.6 volgt.

Er geldt $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots$

Volgens Stelling 12.6 geldt dan

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}\right)\right) = 1.$$

Door links en rechts coëfficiënten te vergelijken, vinden we

$$p(n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left\{p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right\} = 0.$$

Dit is de bewering van Stelling 12.5. $\square$

Bewijs van Stelling 12.6.

Er geldt
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_V(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k).$$
Hieruit volgt
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{EV}(n) - p_{OV}(n)\right)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$$

waarbij $\frac{p_{EV}(n)}{p_{OV}(n)}$ het aantal partities van n is ~~in een~~ $\frac{\text{even}}{\text{oneven}}$ aantal verschillende delen.

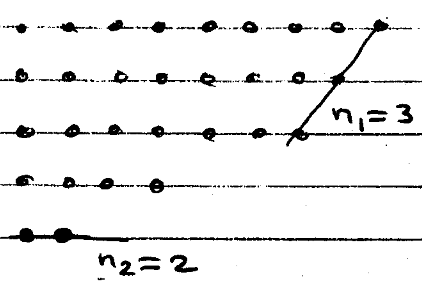
Het is dus voldoende te bewijzen dat

$$p_{EV}(n) - p_{OV}(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3k^2-k}{2} \text{ is} \\ (-1)^k & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3k^2+k}{2} \text{ is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Om dit te bewijzen construeren we een afbeelding van de partities in een even aantal delen naar de partities in een oneven aantal delen:

Trek in het Young diagram een lijn met hellingshoek 45° door het meest rechtse punt en een horizontale lijn door de onderste rij. Laat n_1 resp. n_2 het aantal stippen op deze lijnen zijn.

(i) Stel $n_2 \leq n_1$. Verwijder de stippen op de onderste rij en voeg aan de eerste n_2 rijen een stip toe. Zo vinden we een partitie in ongelijke delen met één deel minder, tenzij beide lijnen een stip gemeen hebben en $n_1 = n_2$.
Dit uitzonderingsgeval beschouwen we later.



(ii) Stel $n_2 > n_1$. Verwijder de stippen op de schuine lijn en voeg onderaan een nieuwe rij van n_1 stippen toe.
Zo vinden we een Young diagram met één rij meer, tenzij $n_1 = n_2 - 1$ en beide lijnen een stip gemeen hebben.
Dit is ook een uitzonderingsgeval.

Het is gemakkelijk te zien dat, als we niet in een uitzonderingsgeval zitten, het toepassen van (i), (ii) ~~als~~ als $n_2 \leq n_1$ en van (ii), (i) als $n_1 > n_2$ tot de oorspronkelijke situatie leidt.
Buiten de uitzonderingsgevallen is het aantal partities van n in een even aantal verschillende delen dus gelijk aan het aantal partities van n in een oneven aantal verschillende delen.

De uitzonderingsgevallen:
(i) Als $n_1 = n_2$ en beide lijnen hebben een stip gemeen, geldt

$$n = n_2 + (n_2+1) + (n_2+2) + \dots + (n_2+n_2-1) = \tfrac{1}{2} n_2 (3n_2 - 1) = \tfrac{1}{2} n_1 (3n_1 - 1).$$

Dit is een partitie in een even aantal delen als n_1 even is en in een oneven aantal delen als n_1 oneven is.

(ii) Als $n_2 = n_1 + 1$ en de lijnen een stip gemeen hebben, dan geldt

$$n = (n_1+1) + (n_1+2) + \dots + 2n_1 = \tfrac{1}{2} n_1 (3n_1 + 1).$$

Dit is een partitie in een even aantal delen als n_1 even is en in een oneven aantal delen als n_1 oneven is.

Dus

$$p_E(n) - p_O(n) = \begin{cases} (-1)^{n_1} & \text{als } n = \tfrac{1}{2} n_1 (3n_1 - 1) \quad \text{voor een } n_1 \in \mathbb{N} \\ (-1)^{n_1} & \text{als } n = \tfrac{1}{2} n_1 (3n_1 + 1) \quad \text{voor een } n_1 \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

(Merk op dat er geen getallen zijn die van beide typen zijn.) $\square$