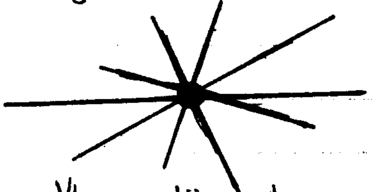
HOOFDSTUK 6 EINDIGE PROJECTIEVE VLAKKEN

Dit hoofdstuk gaat over vlakken die uit slechts eindig veel punten bestaan, maar alle karakteristieke eigenschappen van projectieve vlakken hebben.

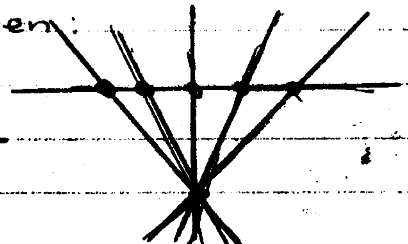
Def. Een projectief vlak π bestaat uit punten en lijnen zó dat
(a) door elk paar punten van π precies één lijn van π gaat,
(b) elk paar lijnen van π precies één snijpunt in π hebben,
(c) er vier punten in π zijn zó dat geen drie van hen op dezelfde lijn van π liggen.

Eigenschappen (a) en (b) zijn essentieel. (c) dient om de volgende uitzonderingsgevallen uit te sluiten:



Vb1. n lijnen door 1 pt.

Vb.2. n punten op een lijn



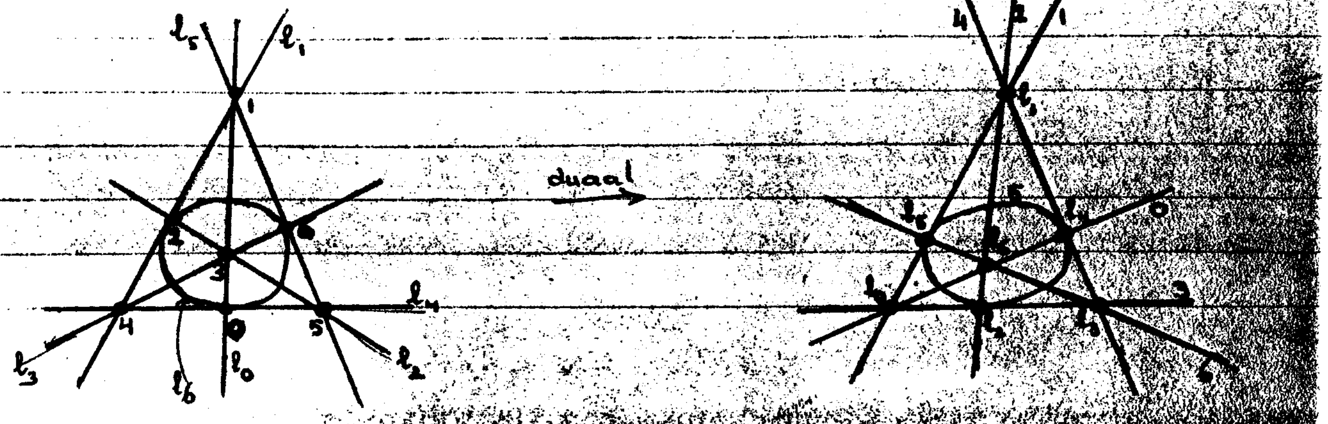
Vb.3. n punten op een lijn en elk punt verbonden met een vast punt buiten die lijn.

Elk projectief vlak heeft een duaal projectief vlak dat verkregen wordt door punten lijnen en lijnen punten te noemen, twee punten door een lijn te verbinden als de oorspronkelijke lijnen door het betreffende punt gingen en andersom.
De duale van voorbeeld 1 is voorbeeld 2, en andersom. De duale van voorbeeld 3 is voorbeeld 3.

Voorbeeld 4. Beschouw het projectieve vlak met 7 punten en 7 lijnen:

$\ell_1 = \{1,2,4\}$, $\ell_2 = \{2,3,5\}$, $\ell_3 = \{3,4,6\}$, $\ell_4 = \{4,5,0\}$,
$\ell_5 = \{5,6,1\}$, $\ell_6 = \{6,0,2\}$, $\ell_0 = \{0,1,3\}$.

Dit is een projectief vlak dat isomorfis met zijn duale vlak.



We gaan na dat de duale van een projectief vlak ook een projectief vlak is. De duale van (a) is (b) en van (b) is (a). Aan (a) en (b) is dus voldaan. Voor (c) is het voldoende te bewijzen:

Stelling 6.1. In elk projectief vlak π zijn vier lijnen te vinden zó dat geen drie van hen door eenzelfde punt gaan.

Bewijs. Kies volgens (c) vier punten A, B, C en D zó dat geen drie van hen op eenzelfde lijn liggen. Beschouw de lijnen AB, CD, AC, BD die volgens (a) gedefinieerd zijn. Stel drie van hen gaan door eenzelfde punt. Vanwege symmetrie is het geen beperking aan te nemen dat die drie lijnen AB, CD en AC zijn. Volgens (b) is dat snijpunt $AB \cap AC = A$ en $CD \cap AC = C$. Dus $A = C$. Tegenspraak. □

Het duale vlak van een projectief vlak is dus ook een projectief vlak.

Stelling 6.2. Niet alle punten van een projectief vlak π liggen op een tweetal lijnen.

Bewijs. Stel alle punten van π liggen op de lijnen ℓ en ℓ'. We kiezen m.b.v. (c) twee punten A en B op ℓ en C en D op ℓ' zó dat geen drie van hen op eenzelfde lijn liggen. Beschouw de lijnen AC en BD (we gebruiken (a)) en noem het snijpunt O (we gebruiken (b)). Er geldt $O \in \ell$ of $O \in \ell'$. Als $O \in \ell$, dan wegens $A \in \ell$ en (a), $OA = \ell$ of $O = A$. In het laatste geval vinden we $A \in BD$, tegenspraak. Als $OA = \ell$, krijgen we $OA = AC$ en dus $C \in \ell$, tegenspraak. Evenzo leidt de veronderstelling $O \in \ell'$ tot een tegenspraak. □

Door Stelling 6.2 op het duale projectieve vlak toe te passen, vinden we dat niet alle lijnen van een projectief vlak π door een tweetal punten gaan. Ga na dat Stelling 6.2, evenmin als Stelling 6.3, 6.4 gelden voor de door (c) uitgesloten configuraties uit voorbeelden 1, 2 en 3.

<u>Stelling 6.3.</u> Zij Π een projectief vlak.
(i) Op elke lijn liggen evenveel punten.
(ii) Door elk punt gaan evenveel lijnen.
(iii) Er gaan evenveel lijnen door een punt als er punten op een lijn liggen.

Bewijs. (i) Neem twee lijnen ℓ en ℓ' in Π. Volgens Stelling 6.2 is er een punt O buiten ℓ en ℓ'. Bij elk punt P op ℓ is er volgens (a) een lijn OP en volgens (b) een snijpunt P' van OP met ℓ'. Zo krijgen we een injectieve afbeelding φ van punten van ℓ naar punten van ℓ', want $\varphi(P) = \varphi(P_1) =: P' \Rightarrow P \in OP'$ en $P_1 \in OP' \overset{(b)}{\Rightarrow} P = P_1$. Het aantal punten op ℓ' is dus niet kleiner dan dat op ℓ. Door de redenering toe te passen met ℓ en ℓ' verwisseld, vinden we uiteindelijk dat ℓ en ℓ' evenveel punten hebben.
(ii) Pas (i) toe op het duale projectieve vlak van Π.
(iii) Kies een punt P en een lijn ℓ. Zij O een punt met $O \notin \ell$. Dan hoort bij elk punt Q van ℓ een lijn OQ door O en omgekeerd. Dit levert een bijectieve afbeelding van de punten op ℓ naar de lijnen door O. Volgens (ii) is er een bijectieve afbeelding van lijnen door O naar lijnen door P. Dus is er een bijectieve afbeelding van punten op ℓ naar lijnen door P. $\square$

We noemen een projectief vlak <u>eindig</u>, als Π maar eindig veel punten heeft. Volgens Stelling 6.3 liggen er op elke lijn van Π evenveel punten, zeg $n+1$. Dan noemen we n de <u>orde</u> van Π.

<u>Stelling 6.4.</u> Zij Π een projectief vlak van orde n.
(i) Het aantal punten op een lijn is $n+1$.
(ii) Het aantal lijnen door een punt is $n+1$.
(iii) Het totaal aantal lijnen is n^2+n+1.
(iv) Het totaal aantal punten is n^2+n+1.

Bewijs. (i) Gevolg van definitie van orde en Stelling 6.3 (i).
(ii) Pas Stelling 6.3 (iii) toe.
(iv) Zij $O \in \Pi$. Er zijn $n+1$ lijnen door O en elk van die lijnen

bevat nog n andere punten. Volgens (b) zijn al deze punten verschillend en volgens (a) heeft π geen andere punten. Dus is het totaal aantal punten van π gelijk aan $1 + n(n+1)$.
(iii) Volgens (i) en (ii) is het duale projectieve vlak van π ook van orde n. Dus is (iii) de duale bewering van (iv). $\square$

Een projectief vlak van orde 1 wordt gegeven door , maar is uitgesloten. Voorbeeld 4 levert een projectief vlak van orde 2. De vraag voor welke n er een projectief vlak van orde n is, wordt teruggebracht tot een reeds in hoofdstuk 4 bediscussieerd probleem door de volgende stelling.

<u>Stelling 6.5.</u> Zij $n \geq 2$. Er bestaat een projectief vlak van orde n dan en slechts dan als er een volledig stel O.L.V. van orde n bestaat.

Voor we het bewijs geven illustreren we het bewijs met de constructie van een projectief vlak van orde 3. Begin met twee O.L.V. van orde 3:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

We kunnen even goed zeggen dat de volgende vier vierkanten orthogonaal zijn:

$$\underset{R}{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}} \qquad \underset{K}{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

We schrijven de vierkanten als rijen uit

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 & Q_9 \\ \hline P_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ P_1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ P_2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ P_3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Noem dit $(b_{ik})_{\substack{i=0,1,2,3 \\ k=1,\ldots,9}}$

Noem de rijen P_0, P_1, P_2, P_3 en kolommen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$. We noemen de $3^2+3+1 = 13$ elementen de punten van ons projectieve vlak. Als lijnen nemen we $\ell = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ en de twaalf viertallen

$$\ell_{ij} = \{P_i, Q_k \text{ als } b_{ik} = j\}.$$

Dus $\ell_{01} = \{P_0, Q_4, Q_5, Q_6\}$, $\ell_{10} = \{P_1, Q_1, Q_4, Q_7\}$, $\ell_{32} = \{P_3, Q_3, Q_4,$
De zo geconstrueerde configuratie van 13 punten en 13 lijnen vormt een projectief vlak van orde 3.

Bewijs van Stelling 6.5.

$\Leftarrow$ Stel er bestaat een volledig stel O.L.V. van orde n, $[a_{ij}^{(2)}]$, $\dots$, $[a_{ij}^{(n)}]$. Construeer de bijbehorende $(n+1)\times n^2$-matrix $B=[b_{er}]$ door $R=:[a_{ij}^{(0)}]$, $K=:[a_{ij}^{(1)}]$ en de $n-1$ L.V. rij voor rij uit te schrijven. Noem de rijen $P_0, P_1, \dots, P_n$ en de kolommen $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n^2}$.

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
 & Q_1 & Q_2 & \cdot & Q_n & Q_{n+1} & Q_{n+2} & & Q_{2n} & & Q_{n^2-n+1} & Q_{n^2-n+2} & & Q_{n^2} \\
P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\
P_1 & 0 & 1 & \dots & n-1 & 0 & 1 & \dots & n-1 & \dots & 0 & 1 & \dots & n-1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \\
P_n & \dots & & & & & & & & & & & & \dots
\end{array}$$

We noemen $P_0, P_1, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n^2}$ de punten van Π_n. Als lijnen nemen we $\ell = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ en

$$\ell_{ek} = \{P_e, Q_r \text{ mits } b_{er} = k\} \qquad (e=0,1,\dots,n\,;\ k=0,\dots,n-1).$$

Het is duidelijk dat op elke lijn $n+1$ punten liggen en het is eenvoudig na te gaan dat door elk punt $n+1$ lijnen gaan.

We bewijzen dat Π_n een projectief vlak is.

(b) Stel ℓ_{ek} en $\ell_{fk'}$ zijn twee lijnen met $e \neq f$. Snijpunten zijn van de vorm Q_r en hebben dus een k op plaats (e,r) en een k' op plaats (f,r). Zij $r = in+j+1$ met $0 \leq i < n$, $0 \leq j < n$. Dan volgt $a_{ij}^{(e)} = k$, $a_{ij}^{(f)} = k'$. Omdat de L.V. orthogonaal zijn, is er precies één paar i,j, en daarmee dus één punt Q_r zodat $Q_r \in \ell_{ek} \cap \ell_{fk'}$.

Beschouw nu $\ell_{ek}, \ell_{ek'}$ met $k \neq k'$. Snijpunt is P_e en verder elk punt Q_r met een k op plaats (e,r) en een k' op plaats (e,r). Omdat $k \neq k'$, kan dit laatste natuurlijk niet.

Beschouw tenslotte ℓ en ℓ_{ek}. Het enige snijpunt is P_e.

(c) Neem de punten P_0, P_1, Q_2 en Q_{n+1}:

	Q_2	Q_{n+1}
P_0	0	1
P_1	1	0

(a) Neem een willekeurig punt O. Er gaan door O $n+1$ lijnen en op elke lijn liggen nog n andere punten. Wegens (b) zijn al deze punten verschillend. Dit zijn totaal $1+(n+1)n = n^2+n+1$ punten, dus alle punten. Dus elk punt is door een lijn met O verbonden. Wegens (b) kan geen enkel punt door twee lijnen met O verbonden zijn.

$\Longrightarrow$ Zij een projectief vlak π_n van orde n gegeven. Neem een lijn ℓ en noem de punten daarop $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Voor elke P_e nummeren we de lijnen door P_e van 0 tot en met $n-1$. We noemen de resterende punten $Q_1, \ldots, Q_{n^2}$ zó dat Q_r snijpunt is van lijn i door P_0 en lijn j door P_1 als $r = in + j + 1$ $(0 \leq i < n,\ 0 \leq j < n)$:

	Q_1	Q_2	$\ldots$	Q_n	Q_{n+1}	Q_{n+2}	$\ldots$	Q_{2n}	$\ldots$	Q_{n^2-n+1}	Q_{n^2-n+2}	$\ldots$	Q_{n^2}
P_0	0	0	$\ldots$	0	1	1	$\ldots$	1	$\ldots$	$n-1$	$n-1$	$\ldots$	$n-1$
P_1	0	1	$\ldots$	$n-1$	0	1	$\ldots$	$n-1$	$\ldots$	0	1	$\ldots$	$n-1$

Vervolgens maken we $(n+1) \times n^2$- matrix $B = [b_{er}]$ met elementen uit $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ door $b_{er} = k$ te definiëren als Q_r ligt op lijn nummer k door P_e. Door nu de rijen van B als vierkanten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ met $A_e = [a_{ij}^{(e)}]_{\substack{i=0,\ldots,n-1 \\ j=0,\ldots,n-1}}$ uit te schrijven krijgen we R, K en ,

een volledig stel O.L.V. van orde n, $A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Eerst bewijzen we dat $A_2, A_3, \ldots, A_n$ Latijnse vierkanten zijn. Kies twee elementen in dezelfde rij i van A_e. Als beide elementen gelijk aan k zijn, betekent dit voor B de volgende situatie:

	Q_r	Q_s
P_0	i	i
P_e	k	k

Dit betekent dat in π_n zowel Q_r als Q_s op lijn i door P_0 en op lijn k door P_e liggen. Maar twee lijnen in π_n hebben slechts één snijpunt. Dus op elke rij van A_e komen de getallen $0, 1, \ldots, n-1$ elk precies éénmaal voor. Om de analoge bewering voor kolommen te bewijzen, neemt men P_1 in plaats van P_0.

Vervolgens bewijzen we dat voor $2 \leq e < f \leq n$ de vierkanten A_e en A_f orthogonaal zijn. Stel dit is niet het geval. Dan zijn er twee paren (i,j) en (i',j') met $(i,j) \neq (i',j')$ zódat $a_{ij}^{(e)} = a_{i'j'}^{(e)}$ en $a_{ij}^{(f)} = a_{i'j'}^{(f)}$. Voor B betekent dit de volgende situatie

	Q_r	Q_s
P_0	i	i'
P_1	j	j'
P_e	k	k
P_f	k'	k'

$r \neq s$

$k = a_{ij}^{(e)} = a_{i'j'}^{(e)}$

$k' = a_{ij}^{(f)} = a_{i'j'}^{(f)}$

Dus Q_r en Q_s liggen op dezelfde lijn door P_e en op dezelfde lijn door P_f. Omdat Q_r en Q_s door maar één lijn verbonden zijn en $e \neq f$, krijgen we een tegenspraak. □

Door Stelling 6.5 met Stelling 4.2 te combineren vinden we dat er voor elke priemmacht p^k er een projectief vlak van orde p^k bestaat. Stelling 4.3 geeft een aantal waarden van n aan waarvoor geen projectief vlak van orde n bestaat. De tabel onderaan op p. 24 geeft de huidige stand van kennis aan betreffende het bestaan van projectieve vlakken van orde met $n \leq 30$.