

HOOFDSTUK 12 Opgaven

12H1

Opgave 1. a) Hoeveel manieren kun je 5 speelkaarten uit 52 kiezen?

b) Hoe groot is de kans dat ze alle 5 harten zijn?

c) Hoe groot is de kans dat er precies 3 azen bij zijn?

2. Op hoeveel verschillende manieren kun je de letters van het woord HOOFDSTUK ordenen?

3. Hoe groot is de kans dat de cijfers van een willekeurig telefoonnummer van 7 cijfers alle onderling verschillend zijn?

4. Bereken a) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, c) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

5. Op hoeveel manieren kun je een woord van 10 letters maken uit 4 a's, 4 b's, 4 c's en 4 d's als elke letter tenminste 2 keer voorkomt.

6. Op hoeveel manieren kun je 10 ballen trekken uit een ballenbak met rode, blauwe en gele ballen met a) ≥ 5 b) ≤ 5 rode ballen?

7. Hoeveel gehele oplossingen heeft de vgl. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ als (a) $x_i \geq 0$ (b) $x_i > 0$ (c) $x_i \geq i$ voor $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

8. Hoeveel uitkomsten zijn mogelijk bij verkiezingen voor een voorzitter bij 5 kandidaten, 40 kiezers, elk 1 stem, als geen kandidaat meer dan de helft van de stemmen krijgt?

9. a) Bereken het aantal partities van n voor $n \leq 15$.

b) Bereken $p_E(n)$ en $p_O(n)$ voor $n = 7, 8, 10, 12$.

10. Zij $p_k(n)$ het aantal partities van n in precies k delen. Bewijs dat $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.

11. Bewijs:

a) Het aantal partities van n in even delen is gelijk aan het aantal partities van n waarin elke term een even aantal keren voorkomt.

b) Het aantal partities van n in ten hoogste k delen is gelijk aan het aantal partities van $n + \binom{k+1}{2}$ in k ongelijke delen.

c) Het aantal partities van n in m ongelijke delen of even delen is gelijk aan het aantal partities van $n - m^2$ in hoogstens m even delen.

12. Bewijs, zonder op convergentie te letten,

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) ; \quad b) \prod_{m=1}^{\infty} (1+x^{2^{m+1}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2^n})}$$

(waarbij voor $n=0$ de term in de som gelezen wordt als 1).

Tentameneisen voor 7 studiepunten (= 10 nieuwe studiepunten):

- alle definities, voorbeelden, stelling, vraagstukken e.d. m.u.v. p. 65
- + alle bewijzen van hfdstk. 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- met uitzondering van Stellingen 2.4, 6.5 (wel de techniek), 9.2, 10.3, 12.5, 12.6 (wel de techniek).