HOOFDSTUK 7 BLOKDIAGRAMMEN

We introduceren configuraties die de eindige projectieve vlakken generaliseren. Elk paar lijnen snijdt elkaar in een vast aantal punten. Omdat de meetkundige taal nu eerder verwarrend, dan verhelderend werkt, spreken we nu over elementen uit een verzameling (de vroegere punten) en collecties elementen, blokken genaamd (de vroegere lijnen).

<u>Definitie.</u> Een <u>blokdiagram</u> met <u>parameters</u> $(b, v, r, k, \lambda) \in \mathbb{Z}_+^5$ is een stel van b blokken, waarbij ieder blok k elementen bevat uit een vaste verzameling V van v elementen, zó dat elk element van V in precies r blokken voorkomt, en er bij elk paar elementen van V precies λ blokken zijn waar beide elementen in liggen. Verder eisen we $v-1>k$, [redacted] om zekere ontaarde configuraties uit te sluiten.

<u>Voorbeeld 1.</u> Een projectief vlak van orde n is een blokdiagram met parameters $(n^2+n+1,\ n^2+n+1,\ n+1,\ n+1,\ 1)$ $(n \geq 2)$

<u>Voorbeeld 2.</u> $V = \{0, 1, \ldots, 10\}$

B_1:	1	3	4	5	9
B_2:	2	4	5	6	10
B_3:	3	5	6	7	0
B_4:	4	6	7	8	1
B_5:	5	7	8	9	2
B_6:	6	8	9	10	3
B_7:	7	9	10	0	4
B_8:	8	10	0	1	5
B_9:	9	0	1	2	6
B_{10}:	10	1	2	3	7
B_{11}:	0	2	3	4	8

Parameters $(11, 11, 5, 5, 2)$

<u>Voorbeeld 3.</u> $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$

B_1:	1	2	3
B_2:	4	5	6
B_3:	7	8	9
B_4:	1	4	7
B_5:	2	5	8
B_6:	3	6	9
B_7:	1	6	8
B_8:	2	4	9
B_9:	3	5	7
B_{10}:	1	5	9
B_{11}:	2	6	7
B_{12}:	3	4	8

Parameters: $(12, 9, 4, 3, 1)$

De definitie geeft overbodige informatie. Uit de overige gegevens volgt namelijk al dat elk element precies even vaak voorkomt. Immers, voor elk element $x \in V$ zijn er $v-1$ ongeordende paren x, y te vormen met $y \in V$, $y \neq x$. Elk paar komt λ keer voor. Het totaal aantal paren met een x is dus $\lambda(v-1)$. Elk blok dat x bevat, levert $k-1$ zulke paren. Dus x komt in $\lambda(v-1)/(k-1)$ blokken voor en dit aantal hangt niet van x af! We hebben dus bewezen dat $r = \lambda(v-1)/(k-1)$, ofwel

(1) $$\lambda(v-1) = (k-1)r.$$

Er is nog een simpel verband tussen de parameters. Het totaal aantal elementen van de blokken is enerzijds kb, anderzijds vr, dus

(2) $$bk = vr.$$

Er zijn nog meer restricties. ~~(We weten bijvoorbeeld al dat er geen (43, 43, 7, 7, 1)-blokdiagram bestaat.)~~ Een van de hoofdproblemen in deze theorie is te bepalen of voor gegeven parameters die voldoen aan (1) en (2) er een blokdiagram met deze parameters bestaat.

Zij gegeven een (b, v, r, k, λ)-blokdiagram. Nummer de elementen $x_1, \ldots, x_v$ en de blokken $X_1, X_2, \ldots, X_b$. We noemen twee blokdiagrammen isomorf, wanneer het ene door permutatie van de x_i's en de X_j's in het andere overgaat. Aan een blokdiagram voegen we een incidentiematrix A toe, door te definiëren

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,v \\ j=1,\ldots,b}}$$

met

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } x_i \in X_j \\ 0 & \text{als } x_i \notin X_j \end{cases}.$$

Voorbeeld 4. Het projectieve vlak op p. 33 heeft als incidentie matrix

x_i \ $l_j = X_j$	0	1	2	3	4	5	6
0	1				1		1
1	1	1				1	
2		1	1				1
3	1		1	1			
4		1		1	1		
5			1		1	1	
6				1		1	1

Verder nullen.

We leiden enkele formules over incidentiematrices af. Zij I_n de $n \times n$-eenheidsmatrix, en $J_{n,m}$ de $n \times m$-matrix met allemaal enen. Als A een matrix is, noteren we met A^T de getransponeerde (gespiegelde) matrix van A. Uit de definitie van (b,v,r,k,λ)-blokdiagram volgt dat zijn incidentiematrix A voldoet aan:

$$(3) \qquad J_{v,v}\, A = k\, J_{v,b},$$

$$(4) \qquad A\, J_{b,b} = r\, J_{v,b}$$

en

$$(5) \qquad A A^T = \begin{pmatrix} r & & \lambda \\ & \ddots & \\ \lambda & & r \end{pmatrix} = \lambda J_{v,v} + (r-\lambda) I_v .$$

Andersom is een $v \times b$ matrix A van nullen en enen die voldoet aan (3), (4) en (5) voor zekere $b, v, r, k, \lambda \in \mathbb{Z}_+^5$ met $k < v-1$ de incidentiematrix van een (b,v,r,k,λ)-blokdiagram. Immers, wegens (3) bevat elk blok k elementen, wegens (4) komt elk element in r blokken voor en wegens (5) komt elk paar elementen in λ blokken voor.

We definiëren het <u>complement</u> van een (b,v,r,k,λ)-blokdiagram als de configuratie die we krijgen door in de incidentiematrix alle nullen door enen en alle enen door nullen te vervangen. We willen bewijzen dat het complement van een (b,v,r,k,λ)-blokdiagram een $(b, v, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$-blokdiagram is. In het bewijs gebruiken we de volgende ongelijkheden, die ook op zich belangwekkend zijn.

$$(6) \qquad k > 1.$$

$$(7) \qquad r > \lambda.$$

$$(8) \qquad b-r > r-\lambda.$$

Immers, $v-1 > k > 0$ en $\lambda > 0$, dus (1) impliceert $k-1 > 0$. Dit geeft (6).
Verder volgt uit (1) dat $r/\lambda = (v-1)/(k-1) > (v-1)/k > 1$. Dit geeft (7).
Tenslotte is $k(b-r) = bk - rk \overset{(2)}{=} vr - rk \overset{(1)}{=} vr - \lambda v + \lambda - r = (v-1)(r-\lambda) \overset{(7)}{>} k(r-\lambda)$.
(8) volgt door de uiteinden door k te delen.

Stelling 7.1. Het complement van een (b, v, r, k, λ)-blokdiagram is een $(b, v, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$ blokdiagram.

Bewijs. Er zijn v elementen en b blokken. In elk blok zitten $v-k$ elementen. Elk element zit in $b-r$ blokken. Het aantal blokken waarin een gegeven paar elementen voorkomt is, volgens de regel van inclusie en exclusie, $b-2r+\lambda$. Uit $v > k+1$ en (8) volgt dat alle parameters natuurlijke getallen zijn. Uit (6) volgt dat $v-1 > (v-k)$. □

Met behulp van incidentiematrices bewijzen we nog twee ongelijkheden waaraan de parameters van een blokdiagram moeten voldoen.

Stelling 7.2. (Fisher) In een (b, v, r, k, λ)-blokdiagram geldt

(9) $\qquad b \geq v \qquad$ en $\qquad r \geq k.$

Bewijs. Stel $b < v$. Voeg aan de incidentiematrix nog $v-b$ kolommen bestaande uit nullen toe. Dan krijgen we een $v \times v$ matrix A^* met determinant 0. Door A^* en A^{*T} te vermenigvuldigen, vinden we

$$A^* A^{*T} = A A^T \overset{(5)}{=} \lambda J_{v,v} + (r-\lambda) I_v .$$

Dus

$$\det(A^*) \det(A^{*T}) = \det(A^* A^{*T}) = \det(A A^T) = \begin{vmatrix} r & & \lambda \\ & \ddots & \\ \lambda & & r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r & \lambda - r & \lambda - r & \cdots & \lambda - r \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & r-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & r-\lambda \end{vmatrix} = \big(r+(v-1)\lambda\big)(r-\lambda)^{v-1}$$

Uit (7) volgt dat $\det(A^*) \neq 0$, een tegenspraak. Dus $b \geq v$.
Uit (2) volgt nu $r \geq k$. □

We onderzoeken nu de blokdiagrammen met $\lambda=1$ en $k=2$. Uit (1) en (2) volgt dat $r=v-1$ en $b=v(v-1)/2$. De parameters zijn dus $(\binom{v}{2}, v, v-1, 2, 1)$ met $v \geq 4$. Dit betekent dat we alle paren van een verzameling van v elementen als blokken nemen.

Vervolgens beschouwen we het geval $\lambda=1$ en $k=3$. Nu volgt uit (1) $r=(v-1)/2$ (dus v oneven) en uit (2) $b=v(v-1)/6$ (dus $v \equiv 1$ of $3 \pmod 6$). De parameters zijn dus $(\frac{v(v-1)}{6}, v, \frac{v-1}{2}, 3, 1)$. Zo'n blokdiagram heet een <u>Steiner_triplet van orde v</u>. Hierbij is $v > 4$.

- Voor $v=7$ krijgen we het projectieve vlak van orde 2.
- Voor $v=9$ krijgen we als parameters $(12, 9, 4, 3, 1)$. Dit wordt gerealiseerd door het blokdiagram van voorbeeld 3 op p. 40.
- Voor $v=13$ krijgen we als parameters $(26, 13, 6, 3, 1)$. Dit wordt gerealiseerd door de blokken $[1,3,9]$ en $[2,5,6]$ cyclisch mod 13 te circuleren. (Opgave; elk verschil komt even vaak voor).

Reiss bewees in 1859 dat er voor elke v met $v \equiv 1$ of $3 \pmod 6$ en $v \geq 4$ een Steiner_triplet van orde v bestaat. Voor $v=7, 9$ is de oplossing op isomorfie na uniek, voor 13 zijn er 2 verschillende, voor $v=15$ precies 80 verschillende oplossingen. Voor $v>15$ is het aantal oplossingen onbekend.

Tenslotte zullen we het schoolmeisjesprobleem van Kirkman uit de inleiding oplossen. Gevraagd werd vijftien $=v$ meisjes elke dag van de week $(r=7)$ in rijtjes van drie $(k=3)$ te verdelen $(b=35)$ zódat elk paar meisjes een dag per week in hetzelfde rijtje loopt. De oplossing is een $(35, 15, 7, 3, 1)$ – blokdiagram, dus een Steiner_triplet. (Er moet gelden $3|v$, dus niet elk Steiner_triplet levert een Kirkman oplossing.) De oplossing van het probleem van Kirkman vinden we door circulatie mod. 7 van de rijtjes

∞	0_1	0_2	De meisjes heten dus	∞	1_1	1_2
1_1	2_1	4_1	$\infty, 0_1, 0_2, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2$	2_1	3_1	5_1
5_1	1_2	6_2	$3_1, 3_2, 4_1, 4_2, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2$.	6_1	2_2	0_2
3_1	2_2	5_2	De volgende dag is	4_1	3_2	6_2
6_1	3_2	4_2	de volgorde dus	0_1	4_2	5_2

Dit levert de oplossing (Ga na.) Dit is zo omdat elk verschil mod 7 precies éénmaal voorkomt: $0_{12}, 1_{11}, 2_{11}, 3_{11}, 1_{12}, 3_{12}, 2_{22}, 1_{21}, 2_{12}, 3_{22}, 3_{21}$, [illegible]