Een vierkant van orde n heet <u>magisch</u> als de som van de elementen in elke rij, kolom of diagonaal hetzelfde is. We zullen hierbij aannemen dat de elementen gelijk zijn aan $1, 2, \ldots, n^2$. (Dit is de klassieke notatie; $0, 1, \ldots, n^2-1$ is meer in overeenstemming met hoofdstuk 4, maar wezenlijk maakt dit geen verschil.) Al 2200 jaar voor Christus kende een Chinese keizer het 3×3 vierkant

8	1	6
3	5	7
4	9	2

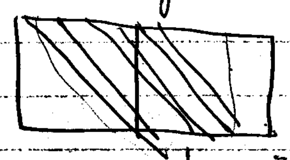
Magische vierkanten zouden bescherming bieden en werden bijvoorbeeld op een zilveren plaatje om de hals gedragen tegen de pest. Hoe meer mooie eigenschappen, des te groter de bescherming. Een uitstekend voorbeeld komt voor op de ets Melancolia van Albrecht Dürer uit 1514, dat op vele manieren 34 geeft

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Twee extra eigenschappen die (magische) vierkanten kunnen hebben zijn <u>symmetrie</u>, d.w.z. de som van twee elementen symmetrisch om het middelpunt gelegen is constant, en <u>diabolie</u>, d.w.z. alle doorlopende diagonalen hebben dezelfde som. Bovengenoemde magische vierkanten zijn symmetrisch, maar niet diabolisch. Voor $n=5$ is er een magisch, symmetrisch, diabolisch vierkant,

ook meten de "goede" som

19	8	22	11	5
12	1	20	9	23
10	24	13	2	16
3	17	6	25	14
21	15	4	18	7



$\frac{n^2(n^2+1)}{2}$

We zullen in dit hoofdstuk bewijzen dat er voor elke n een magisch vierkant van orde n is dat bovendien nog symmetrisch is als $n \not\equiv 2 \pmod 4$ en diabolisch als $2 \nmid n$, $3 \nmid n$.

Merk op dat in een magisch vierkant van orde n de rijsom = de diagonaalsom = de kolomsom $= \frac{1}{2}n(n^2+1)$ en in een symmetrisch vierkant de paarsom is n^2+1.

Bij de constructie van magische vierkanten zullen we Latijnse vierkanten gebruiken. Zo is het 5×5 vierkant op p. 27 verkregen door termsgewijs 1 op te tellen bij de orthogonale Latijnse vierkanten

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \text{en} \quad 5\times \qquad \begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Beide vierkanten zijn symmetrisch en diabolisch. We zullen dit idee uitwerken.

<u>Lemma 5.1</u>. Als A en B twee O.L.V. van orde n zijn, dan heeft het vierkant $C = nA + B + 1$ constante rijsom en kolomsom $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Bovendien komt elk getal $1, 2, \cdots, n^2$ precies éénmaal voor.
Als A en B symmetrisch zijn, dan is C dat ook.
Als A en B diabolisch zijn, dan is C dat ook.

Bewijs. Het paar (i,j) correspondeert met $ni+j+1$. Omdat elk paar (i,j) met $0 \le i < n, 0 \le j < n$ precies éénmaal voorkomt en elk getal a met $0 \le a < n^2$ precies een representatie $ni+j$ in het n-tallig stelsel heeft, komt elk getal $1, 2, \cdots, n^2$ precies éénmaal voor. Schrijven we de getallen van $C-1 = nA+B$ uit in het n-tallig stelsel, dan komt op elke rij of kolom elk cijfer éénmaal als begincijfer voor en éénmaal als eindcijfer. De rij- en kolomsom is dus $n\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n = n \cdot \frac{n^2+1}{2}$.
Als A en B diabolisch zijn, geldt hetzelfde voor elke doorgetrokken diagonaal, en is C dus diabolisch. Als de som van symmetrische elementen in A en B constant $n-1$ is, is de som van symmetrische elementen in C gelijk aan $n(n-1) + n-1 + 2 = n^2+1$. $\square$

Voor de constructie van geschikte orthogonale Latijnse vierkanten maken we gebruik van de volgende Algebra 1 -eigenschap (Opgave).
Als $(m,n) = 1$, dan is $0, m, 2m, \cdots, (n-1)m$ modulo n dezelfde verzameling als $0, 1, 2, \cdots, n-1$. Als $(m,n) > 1$ is dat niet zo.

<u>Lemma 5.2</u>. Beschouw het vierkant V gegeven door $v_{ij} \equiv ai+bj+c \pmod{n}$ voor $i,j = 0, 1, \cdots, n-1$. Hierbij zijn $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dan geldt:
V is een Latijns vierkant als $(a,n) = (b,n) = 1$.
V is symmetrisch als $a+b \equiv 2c+1 \pmod{n}$.
V is diabolisch als $(a+b, n) = (a-b, n) = 1$.

Bewijs. Als $(a,n)=1$, staat elk getal precies één keer in elke kolom. Als $(b,n)=1$, staat elk getal precies één keer in elke rij.
De som van symmetrische elementen ligt in $[0, 2n-2]$. Bovendien geldt $ai+bj+c + a(n-1-i)+b(n-1-j)+c = (a+b)(n-1)+2c \equiv n-1 \pmod n$.
Dus is de som van symmetrische elementen gelijk aan $n-1$.
Er geldt $v_{ij} = a(i-j)+(a+b)j+c \pmod n$. Op elke doorlopende diagonaal evenwijdig aan de hoofddiagonaal is $i-j$ constant. Omdat $(a+b,n)=1$, komt elk element op de diagonaal precies eenmaal voor. Wegens $(a-b,n)=1$, geldt hetzelfde voor de diagonalen in de andere richting. $\square$

STELLING 5.1. Zij $n \in \mathbb{N}$ met $2 \nmid n$, $3 \nmid n$. Zij $k = \lfloor n/3 \rfloor$.
Definieer

$$a_{ij} \equiv \begin{cases} (k+1)i + kj + k \pmod n & \text{als } n \equiv 1 \pmod 3 \\ (2k+2)i + (2k+1)j + 2k+1 \pmod n & \text{als } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

waarbij $0 \leq a_{ij} < n$ voor $i,j = 0,1,\cdots,n-1$. Dan is $[a_{ij}]$ een symmetrisch, diabolisch, ~~Latijns~~ vierkant.

Bewijs. Pas Lemma 5.2 toe. Bijvoorbeeld, als $n \equiv 1 \pmod 3$, dan is $n = 3k+1$. Er geldt $(k+1,n) \leq (3k+3, n) = (n+2,n) = (2,n) = 1$ en $(k,n) \leq (3k,n) = (3k, 3k+1) = (3k,1) = 1$. Dus $[a_{ij}]$ is een Latijns vierkant. Ga zelf de andere voorwaarden na. $\square$

Nu kunnen we bewijzen dat er een mooi magisch vierkant van orde n is als $(6,n)=1$.

STELLING 5.2. Als $2 \nmid n$, $3 \nmid n$, dan is er een symmetrisch, diabolisch, magisch vierkant van orde n.

Bewijs. Neem vierkant $[a_{ij}]$ uit Stelling 5.1 en beschouw het vierkant $[c_{ij}]$ met $c_{ij} = na_{ji} + a_{ij} + 1$. Uit Lemma 5.1 en Stelling 5.1 volgt dat $[c_{ij}]$ rijconstant, kolomconstant, symmetrisch en diabolisch is en dat de getallen $1, 2, \ldots, n^2$ elk éénmaal voorkomen mits $[a_{ij}]$ en $[a_{ji}]$ orthogonaal zijn.
Stel $n = 3k+1$. Het is voldoende te bewijzen dat alle paren (a_{ij}, a_{ji}) verschillend zijn. Stel daarentegen $(a_{ij}, a_{ji}) = (a_{i'j'}, a_{j'i'})$.
Dan is

$$\begin{cases} (k+1)i + kj + k \equiv (k+1)i' + kj' + k \pmod n \\ (k+1)j + ki + k \equiv (k+1)j' + ki' + k \pmod n. \end{cases}$$

Door optellen en aftrekken vinden we $i-j \equiv i'-j' \pmod n$ en $(2k+1)(i+j) \equiv (2k+1)(i'+j') \pmod n$. Omdat $(2k+1, n)=1$, volgt hieruit dat $i+j \equiv i'+j' \pmod n$. Door nogmaals optellen en aftrekken krijgen we $2i \equiv 2i' \pmod n$, $2j \equiv 2j' \pmod n$. Omdat $(2,n)=1$, volgt $i=i'$, $j=j'$. Dus alle ~~gaat~~ paren zijn inderdaad verschillend. Voor $n=3k+2$ gaat het bewijs analoog. □

STELLING 5.3. (De la Loubère, 1693). Zij n oneven, $n=2k+1$. Dan is er een symmetrisch, magisch vierkant van orde n.

Bewijs. We definiëren $[a_{ij}]$ door $a_{ij} \equiv i+2j-2k \pmod n$ en $[b_{ij}]$ door $b_{ij} \equiv i+j-k \pmod n$. Beide zijn symmetrische Latijnse vierkanten (pas Lemma 5.2 toe) die bovendien orthogonaal zijn (pas methode uit vorige bewijs toe). Dus is volgens Lemma 5.1 $[n b_{ij} + a_{ij} + 1]$ een rijconstant, kolomconstant, symmetrisch vierkant dat de getallen $1, 2, \cdots, n^2$ bevat. Vanwege de symmetrie zijn de sommen van beide diagonalen elk gelijk aan de rijsom. Dus is het vierkant magisch. □

Voor $n=3$ krijgen we $[a_{ij}] = \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$, $[b_{ij}] = \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$, $[c_{ij}] = \begin{matrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}$.

Voor het geval $n=4k$ geeft het vierkant van Dürer een goede aanwijzing.

STELLING 5.4. Als $n=4k$, dan is er een symmetrisch, magisch vierkant van orde n

Bewijs. Zij $n=4k$. Beschouw het vierkant $[a_{ij}]$ met $a_{ij} = ni+j$ voor $0 \leq i < \frac{n}{4}$ en $\frac{3n}{4} \leq i < n$ en $a_{ij} = ni+n-1-j$ voor $\frac{n}{4} \leq i < \frac{3n}{4}$. (d.w.z. van 0 tot n^2-1 tellen eerst $n/4$ rijen van links naar rechts, dan $n/2$ rijen van rechts naar links, dan $n/4$ rijen van links naar rechts.) Door dit opschrijven in het n-tallig stelsel te doen wordt duidelijk dat de kolommen en beide diagonalen constant som $\frac{1}{2}k(k^2-1)$ hebben en dat het vierkant symmetrisch is.

Verdeel het vierkant nu in 16 even grote subvierkanten en spiegel de 8 subvierkanten die geen diagonaalelementen bevatten om de horizontale middenas

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & 1 & 2 & b \\ \hline 3 & c & d & 4 \\ \hline 5 & e & f & 6 \\ \hline g & 7 & 8 & h \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & 7 & 8 & b \\ \hline 5 & c & d & 6 \\ \hline 3 & e & f & 4 \\ \hline g & 1 & 2 & h \\ \hline \end{array}$$

Hierdoor veranderen de kolomsommen en diagonaalsommen niet. Beschouw rij i, uitgeschreven in het n-tallig stelsel. De begincijfers vormen $n/2$ maal i en $n/2$ maal $n-i-1$ de eindcijfers elk van $0, 1, \ldots, n-1$ eenmaal. De rijsom is dus

$$n \cdot \frac{n}{2}\left(i + (n-i-1)\right) + (0 + 1 + \ldots + n-1) = \frac{1}{2} n (n^2 - 1).$$

Aangezien de spiegeling symmetrisch wordt uitgevoerd, krijgen we een rijconstant, kolomconstant, symmetrisch vierkant. Door alle elementen 1 op te hogen verkrijgen we een magisch, symmetrisch vierkant van orde n. $\square$

Voor $n=4$ levert de procedure:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Het geval $n = 4k+2$ is het lastigste. In 1897 werd nog geloofd dat het onmogelijk was. Er geldt echter:

<u>Stelling</u> 5.5. (Strachey, 1918). Voor $n = 4k+2$, $n > 2$ bestaat een magisch vierkant van orde n.

Bewijs. Neem een magisch vierkant V van orde $2k+1$. Maak een $n \times n$ vierkant $\begin{matrix} V & V+n^2/4 \\ V+3n^2/4 & V+n^2/2 \end{matrix}$ waarbij $V + \ell$ betekent dat bij elk element van V het getal ℓ wordt opgeteld. De kolomsommen zijn nu

$$2 \cdot \frac{1}{2} \frac{n}{2}\left(\frac{n^2}{4} + 1\right) + \frac{n}{2} \cdot \frac{3n^2}{4} = \frac{n}{2}\,(n^2+1),$$

de correcte waarde.

bijv. $n = 6$, $k = 1$

8	1	6	17	10	15
3	5	7	12	14	16
4	9	2	13	18	11
35	28	33	26	19	24
30	32	34	21	23	25
31	36	29	22	27	20

Neem nu in de middelste rij van V de k velden naast het meest linkse veld en verwissel die met de corresponderende velden in $V + 3n^2/4$ en neem in de overige rijen van V de k meest linkse getallen en verwissel die met de corresponderende getallen in $V + 3n^2/4$. Verwissel vervolgens de velden in de $k+2$ linkse kolommen van $V + n^2/4$ met de corresponderende velden in $V + n^2/2$. Het zo ontstane vierkant voldoet. Immers, de kolomsommen veranderen niet. Schrijven we de getallen in de vorm $a\frac{n^2}{4}+b$ met $a \in \{0,1,2,3\}$ en $b \in \{1,2,\ldots,\frac{n^2}{4}\}$, dan vinden we als rijsom in de eerste $n/2$ rijen:

$$\underbrace{k.\frac{3n^2}{4} + (k+2)\left(\frac{2n^2}{4}\right) + (k-1)\frac{n^2}{4}}_{\text{som van } \frac{an^2}{4}} + \underbrace{2.\frac{n}{4}\left(\frac{n^2}{4}+1\right)}_{\text{som van } b} = \frac{n}{2}(n^2+1)$$

en van de onderste $n/2$ rijen:

$$(k+1)\frac{3n^2}{4} + (k-1)\left(\frac{2n^2}{4}\right) + (k+2)\frac{n^2}{4} + 2\frac{n}{4}\left(\frac{n^2}{4}+1\right) = \frac{n}{2}(n^2+1).$$

De rijsommen hebben dus ook de juiste waarde.

De hoofddiagonaal levert als som

$$(k+1)\left(\frac{3n^2}{4}\right) + (k-1)\left(\frac{2n^2}{4}\right) + (k+2)\frac{n^2}{4} + 2\frac{n}{4}\left(\frac{n^2}{4}+1\right) = \frac{n}{2}(n^2+1)$$

en de nevendiagonaal

$$k\left(\frac{3n^2}{4}\right) + (k+2)\left(\frac{2n^2}{4}\right) + (k-1)\frac{n^2}{4} + 2.\frac{n}{4}\left(\frac{n^2}{4}+1\right) = \frac{n}{2}(n^2+1).$$

Het vierkant is dus magisch.

Voorbeeld (vervolg)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
8 & 1 & 6 & 17 & 10 & 15 \\
3 & 5 & 7 & 12 & 14 & 16 \\
4 & 9 & 2 & 13 & 18 & 11 \\
\hline
35 & 28 & 33 & 26 & 19 & 24 \\
30 & 32 & 34 & 21 & 23 & 25 \\
31 & 36 & 29 & 22 & 27 & 20
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccccc}
35 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\
3 & 32 & 7 & 21 & 23 & 25 \\
31 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\
8 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\
30 & 5 & 34 & 12 & 14 & 16 \\
4 & 36 & 29 & 13 & 18 & 11
\end{array}$$

magisch vierkant van orde 6.

Litteratuur over magische vierkanten:

H. M. Stark, Introduction to number theory, Markham, 1970
W. W. Rouse Ball, Recreations ..., Macmillan, 1926.
(E. Mc Clintock, Am. J. Math. 19 (1897), 99–120
D. N. Lehmer, Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 529–551)
W. S. Andrews, Magic squares and cubes, 1917. Reprint, Dover, 1960
W. H. Benson & O. Jacoby, New recreations with magic squares, Dover, 1976.