Stel we hebben een volledige graaf op n knopen, d.w.z. dat elk paar van n knopen door een kant verbonden is waarop geen andere knoop ligt. We kleuren elke kant rood óf blauw. Is er dan zeker een monochromatische driekant, d.w.z. drie knopen die paarsgewijs met dezelfde kleur kanten verbonden zijn? Het antwoord is neen voor $n \leq 5$ en ja voor $n \geq 6$. Dit soort kleuringsproblemen beschouwen we in dit hoofdstuk en komen uiteindelijk uit bij de stelling van Ramsey uit 1930 die deze nodig had bij zijn onderzoek van de grondslagen van de wiskunde.

Zij $k \geq 2, m \geq 2$. We definiëren $n_2(k,m)$ als het kleinste aantal knopen zódat bij elke rood-blauwkleuring van de volledige graaf op die knopen er k knopen zijn die monochromatisch rood of m knopen die monochromatisch blauw **verbonden** zijn. Er geldt dus $n_2(3,3) = 6$. Het is direct duidelijk dat voor alle k en m geldt dat $n_2(k,m) = n_2(m,k)$ en $n_2(k,2) = k$, maar het is niet vanzelfsprekend dat $n_2(k,m)$ eindig is voor alle k en m. Er geldt echter:

<u>Stelling 2.1.</u> $n_2(k,m) \leq n_2(k-1,m) + n_2(k,m-1)$ $(k \geq 3, m \geq 3)$.

Bewijs. Stel we hebben een volledige graaf van $n_2(k-1,m) + n_2(k,m-1)$ knopen die rood-blauw gekleurd is. Neem een willekeurige knoop a van de graaf. Dan zijn er
- minstens $n_2(k-1,m)$ knopen met a verbonden door een rode kant of
- minstens $n_2(k,m-1)$ knopen met a verbonden door een blauwe kant.

In het eerste geval zijn er $k-1$ knopen met a en onderling verbonden door rode kanten of m knopen onderling verbonden door blauwe kanten. We vinden dus een volledig rood k-stel of een volledig blauw m-stel. Het bewijs in het tweede geval gaat analoog. □

<u>Gevolg.</u> $n_2(k,m) \leq \binom{k+m-2}{k-1}$ $(k \geq 2, m \geq 2)$

Bewijs. De ongelijkheid is juist voor $k=2$ en voor $m=2$, dus in het bijzonder voor $k+m=4$. We gebruiken nu inductie naar $k+m$. Stel de bewering is bewezen voor $k+m=r-1$, dan volgt met behulp van stelling 2.1 in geval $k+m=r$, $k\geq 3$, $m\geq 3$ dat

$$n_2(k,m) \leq n_2(k-1,m)+n_2(k,m-1) \leq \binom{k+m-3}{k-2}+\binom{k+m-3}{k-1} = \binom{k+m-2}{k-1}. \quad \square$$

We kunnen de stelling nog iets verscherpen:

<u>Stelling 2.2.</u> Als $n_2(k-1,m)$ en $n_2(k,m-1)$ beide even zijn, geldt zelfs

$$n_2(k,m) \leq n_2(k-1,m)+n_2(k,m-1)-1.$$

Bewijs. Beschouw een volledige graaf van $n_2(k-1,m)+n_2(k,m-1)-1$ knopen die rood-blauw gekleurd is. Kies een knoop b. Er zijn drie mogelijkheden:
- tenminste $n_2(k-1,m)$ knopen zijn rood met b verbonden
- tenminste $n_2(k,m-1)$ knopen zijn blauw met b verbonden
- b is met $n_2(k-1,m)-1$ knopen rood en met $n_2(k,m-1)-1$ knopen blauw verbonden.

Als er een knoop b is waarvoor het eerste of tweede geldt, dan kunnen we het bewijs voortzetten zoals in het bewijs van stelling 2.1. Het resterende geval is dat voor elke knoop b van de graaf het derde geval geldt. Dan is het aantal rode kanten in de graaf

$$\left(n_2(k-1,m)+n_2(k,m-1)-1\right)\left(n_2(k-1,m)-1\right)\ /2$$

geen geheel getal, ~~een tegenspraak~~ dus het derde geval treedt (niet) op voor elke knoop b. $\square$

Uit het bovenstaande vinden we de volgende bovengrenzen voor $n_2(k,m)$

$k \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8
2	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
3	<u>3</u>	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>14</u>	19	26	23
4	<u>4</u>	<u>9</u>	<u>18</u>	31	50	75	108
5	<u>5</u>	<u>14</u>	31	62	111	186	293

Bij de vraagstukken zullen we zien dat $n_2(3,4) \geq 9$, $n_2(3,5) \geq 14$, $n_2(4,4) \geq 18$. De onderstreepte waarden zijn dus exact. Weinig andere waarden zijn exact bekend, met name wel $n(3,6)=18$ en $n(3,7)=23$. $n(4,5)=25$ (Brendan & McKay, 1993)

Uit het Gevolg van Stelling 2.1 concluderen we dat

$$n_2(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = \binom{2k-3}{k-2} + \binom{2k-3}{k-1} \leq (1+1)^{2k-3} = 2^{2k-3}.$$

De volgende stelling geeft een ondergrens voor $n_2(k,k)$.

<u>Stelling 2.3.</u> (Erdős) $\qquad n_2(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Bewijs. Voor $k=2,3$ is de stelling juist. Stel we hebben een volledige graaf van n knopen. Dan zijn er $\binom{n}{2}$ kanten en dus $2^{\binom{n}{2}}$ kleuringen mogelijk. We schatten nu het aantal kleuringen met een monochromatisch k-stel af. Er zijn $\binom{n}{k}$ mogelijkheden om k uit n knopen te kiezen en twee mogelijkheden om de $\binom{k}{2}$ verbindingskanten monochromatisch te kleuren. De resterende $\binom{n}{2}-\binom{k}{2}$ kanten kunnen op $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ manieren gekleurd worden. In totaal zijn er dus ten hoogste

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

kleuringen met een monochromatisch k-stel. (De grens is niet exact!) Stel nu $n < 2^{k/2}$. Dan volgt

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2^{\binom{n}{2}+1}}{2^{\binom{k}{2}}} < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{\binom{n}{2}+1}}{k! \; 2^{\frac{k^2-k}{2}}} = 2^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!}.$$

Voor $k \geq 4$ geldt $2^{\frac{k}{2}+1} < k!$ (ga na). Dus, als $n < 2^{k/2}$, dan is het aantal kleuringen met een monochromatisch k-stel kleiner dan het totaal aantal mogelijke kleuringen. Er is dus minstens één kleuring zonder zo'n k-stel. Dus $n_2(k,k) \geq 2^{k/2}$. □

Merk op dat bovenstaand bewijs geen efficiënte constructie g
Een eenvoudige constructie geeft $n_2(k,k) > (k-1)^2$. Dit is nauwelijks verbeter

We beschouwen nu een veel algemenere situatie. Stel n, t en s zijn natuurlijke getallen met $t \leq n$. We hebben een verzameling S van n knopen en kennen aan elk van de $\binom{n}{t}$ deelverzamelingen van t knopen uit S een kleur uit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ toe. (Gekleurde hypergraaf of t-graaf.) Stel $k_1 \geq t$, $k_2 \geq t, \ldots, k_s \geq t$. De vraag is of er een functie $n_t(k_1, \ldots, k_s)$ bestaat zó dat als $n \geq n_t(k_1, \ldots, k_s)$ er een kleur α_j en een k_j-tal knopen $T \subset S$ is zó dat alle $\binom{k_j}{t}$ deelverzamelingen van t punten uit T de kleur α_j hebben. De situatie die we tot nog toe beschouwden correspondeert met $t = s = 2$.

Stelling 2.4. (Ramsey, 1930) $n_t(k_1, \ldots, k_s)$ is eindig voor $k_1 \geq t, \ldots, k_s \geq t$.

Bewijs. We gebruiken eerst inductie naar t en dan naar s. Zij $s = 2$. Voor $t = 2$ is de stelling bewezen. Stel de stelling geldt voor $2, \ldots, t-1$. We noemen k_1 even k en k_2 noemen we m. Het is duidelijk dat $n_t(k, t) = k$ en $n_t(t, m) = m$. We gebruiken nu inductie naar $k+m$. De bewering is waar voor $k+m = 2t$, want dan volgt $k = m = t$ en is $n_t(k,m)$ dus eindig. Stel de bewering is bewezen voor $k+m < r$. We zullen bewijzen dat voor $k > t, m > t$ geldt dat

(1) $\quad n_t(k,m) \leq n_{t-1}(k_1, m_1) + 1$ met $k_1 = n_t(k-1, m)$ en $m_1 = n_t(k, m-1)$.

Op grond van de inductieveronderstelling zijn k_1 en m_1 eindig en is dus ook $n_{t-1}(k_1, m_1) + 1$ eindig. Uit (1) volgt dan dat $n_t(k,m)$ eindig is. Voor $k = t$ of $m = t$ weten we dat al. Dus als (1) waar is, dan is $n_t(k,m)$ eindig in alle gevallen met $k+m = r$. Daarmee is de inductie naar r afgehandeld en is dus bewezen dat $n_t(k,m)$ eindig is voor alle k en m met $k \geq t$ en $m \geq t$. Dan is dus de inductiestap met betrekking tot t voltooid. Hieruit volgt dat $n_t(k,m)$ eindig is voor alle k, m en t.

We bewijzen nu (1). Stel we hebben $n_{t-1}(k_1, m_1) + 1$ punten in S, waarbij elk t-tal punten kleur α of kleur β heeft.

Kies een vaste knoop a. We definiëren nu kleuringen op de $(t-1)$-deelverzamelingen van $S_1 := S - \{a\}$, nl. kleur β_1 als de $t-1$ punten samen met a kleur α_1 hebben en kleur β_2 als de $t-1$ punten samen met a kleur α_2 hebben. Omdat $|S_1| = n_{t-1}(k_1, m_1)$, is er een k_1-stel in S_1 die monochromatisch β_1-gekleurd is of een m_1-stel in S_1 die monochromatisch β_2-gekleurd is. Op grond van symmetrie mogen we veronderstellen dat het eerste het geval is. Er geldt $k_1 = n_t(k-1, m)$. Dus onder die k_1 knopen vinden we een verzameling van $k-1$ knopen die monochromatisch α_1 gekleurd is of een m-stel knopen dat monochromatisch α_2 gekleurd is. In het laatste geval zijn we klaar. In het eerste geval zijn alle $k-1$ knopen ook monochromatisch met a verbonden, en hebben we dus een monochromatisch k-stel dat α_1 gekleurd is. Dus S heeft een k-stel punten onderling geheel α_1 gekleurd of een m-stel punten onderling geheel α_2 gekleurd. Dit bewijst (1).

Nu de inductie naar t voltooid is, is de stelling dus bewezen voor $s=2$. Vervolgens gebruiken we inductie naar het aantal kleuren s. Stel de bewering van de stelling is juist voor $2, 3, \ldots, s-1$. We bewijzen dat

$$(2) \qquad n_t(k_1, \ldots, k_s) \leq n_t\left(n_t(k_1, \ldots, k_{s-1}), k_s\right).$$

Op grond van de inductiehypothese is het rechterlid eindig en uit (2) volgt dus de geldigheid van de stelling voor s.

Stel S heeft $n_t(n_t(k_1, \ldots, k_{s-1}), k_s)$ knopen. Dan is er een deelverzameling van $n_t(k_1, \ldots, k_{s-1})$ knopen waarbij de kleur α_s helemaal niet voorkomt of een deelverzameling van k_s knopen monochromatisch α_s gekleurd. In het laatste geval zijn we klaar. In het eerste geval is er een kleur α_j en een k_j-stel knopen die monochromatisch α_j gekleurd zijn wegens de inductiehypothese. Dus vinden we in elk geval een kleur α_j en daarbij k_j punten die monochromatisch α_j gekleurd zijn. Dit bewijst (2). Daarmee is ook de inductie naar s voltooid en is de stelling bewezen. $\square$

Tenslotte geven we een toepassing van de stelling van Ramsey in de getaltheorie.

Stelling 2.5. (Schur, 1916) Bij elke natuurlijk getal k bestaat een getal N zó dat als de getallen $1, 2, \ldots, N$ in k deelverzamelingen $S_1, \ldots, S_k$ gesplitst worden, de vergelijking $x + y = z$ oplosbaar is met x, y èn z in dezelfde deelverzameling.

Bewijs. Pas Stelling 2.4 toe met $t = 2$, waarbij de knopen van de graaf S de getallen $1, \ldots, N$ zijn en de knopen $i, j \in S$ met kleur α_ℓ verbonden worden als $|i - j| \in S_\ell$. Dus $s = k$. Volgens Stelling 2.4 bestaat er een eindig getal $n_2(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k \text{ drieën}})$

zó dat als $N \geq n_2(3, \ldots, 3)$, er een drietal knopen a, b, c is die monochromatisch verbonden zijn, d.w.z. voor zekere ℓ

$$|a - b| \in S_\ell, \quad |b - c| \in S_\ell, \quad |a - c| \in S_\ell.$$

Stel $a > b > c$. Noem $x = a - b$, $y = b - c$, $z = a - c$. Dan volgt $x, y, z \in S_\ell$ en $x + y = z$. $\square$

Opmerking. Voor $k = 2$ vinden we $N = 6$ en voor $k = 3$ volgt uit een opgave van het werkcollege dat $N = 17$ voldoet. Waarschijnlijk zijn deze grenzen niet optimaal, maar voor $k = 2$ is $N = 4$ te klein (neem $S_1 = \{1, 4\}$, $S_2 = \{2, 3\}$) en voor $k = 3$ is $N = 13$ te klein (neem ~~$S_1 = \{1, 4, 6\}$, $S_2 = \{2, 3, 7, 8\}$, $S_3 = \{5, 9\}$~~ $S_1 = \{1, 4, 10, 13\}$, $S_2 = \{2, 3, 11, 12\}$, $S_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.