wi1607

Wiskundige Structuren

Cursus 2013/2014

Eva Coplakova

Bas Edixhoven

Lenny Taelman

Mark Veraar

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit dictaat is sterk gebaseerd op het dictaat van Eva Coplakova en Bas Edixhoven dat al geruime tijd in Delft en sinds 2007 ook in Leiden wordt gebruikt. Delen van de hoofdstukken IV, V, VI en VII zijn gebaseerd op een dictaat van Ben de Pagter.

Het doel van dit college is niet zozeer het leren van rekenvaardigheden in de analyse, maar meer het begrijpen van de theorie daarachter, in het bijzonder het leren omgaan met definities, stellingen en bewijzen. Hiermee hopen we een stevig fundament te leggen voor de verdere studie in de wiskunde.

De naam “Wiskundige structuren” is een erfenis uit het verleden, en is nu misschien aan herziening toe. In dit college worden, na enige voorbereidingen over verzamelingen en afbeeldingen, de getalsystemen van natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen axiomatisch ingevoerd, en dus exact beschreven. Daarna worden reële rijen, limieten en reeksen bestudeerd, en vervolgens reële functies, limieten, continuïteit, de Riemann-integraal, en tot slot puntsgewijze en uniforme convergentie van rijen van reële functies.

Het dictaat eindigt met een index. Daarvoor staan er antwoorden en uitwerkingen van sommige opgaven (dit wordt aangegeven met het symbool ✍). De uitwerkingen zijn soms beknopt tot een aantal aanwijzingen.

Alle commentaar, maar liefst wel constructief, is welkom (liefst per email aan één van de docenten).

Actuele informatie over de twee colleges zal te vinden zijn op blackboard, respectievelijk in Delft en in Leiden.

Lenny Taelman
Mark Veraar

I VERZAMELINGEN EN AFBEELDINGEN

Het begrip verzameling kennen we uit het dagelijks leven: een bibliotheek bevat een verzameling van boeken, een museum een verzameling van kunstvoorwerpen. We kennen verzamelingen ook uit de wiskunde: de verzameling van alle getallen, de verzameling van alle punten in het platte vlak, de verzameling van alle oplossingen van een vergelijking; in feite kunnen we zeggen dat de hele wiskunde opgebouwd is uit verzamelingen. Verzamelingen en hun eigenschappen zijn onderwerp van een breed wiskundig gebied — de verzamelingenleer.

Ongeveer honderd jaar geleden begonnen wiskundigen met een groot enthousiasme verzamelingen overal te gebruiken: het was heel handig elementen die een bepaalde eigenschap hadden als een geheel, een verzameling, te beschouwen. Maar heel snel ontstonden problemen: sommige groepen elementen leidden tot tegenspraken: men stuitte op paradoxen. Blijkbaar kunnen niet alle eigenschappen gebruikt worden om nieuwe verzamelingen te vormen.

Paradoxen

We zullen twee van die tegenspraken bekijken.

I.0.1 Voorbeeld. Paradox van Russell In een dorp woont kapper Hans die alléén die mannen uit het dorp scheert die zichzelf niet scheren. Wie scheert kapper Hans?

Het is duidelijk dat er twee mogelijkheden zijn: kapper Hans scheert zichzelf of hij scheert zichzelf niet. Als hij zichzelf scheert dan scheert de kapper hem niet, maar hij zelf is de kapper, dus hij kan zichzelf niet scheren. Aan de andere kant, als hij zichzelf niet scheert dan moet hij, de kapper, zichzelf toch scheren. We zien dat geen van de mogelijkheden mogelijk is, we krijgen een paradox.

I.0.2 Voorbeeld. Paradox van Berry Een van de basiseigenschappen van natuurlijke getallen is dat elke niet-lege verzameling natuurlijke getallen een kleinste element bevat. Beschouw nu alle natuurlijke getallen die beschreven kunnen worden in het Nederlands met behulp van ten hoogste honderd letters. Het Nederlandse alfabet heeft 26 letters, dus met behulp van honderd letters of minder kunnen we ten hoogste $26 + 26^2 + 26^3 + \cdots + 26^{100}$ getallen beschrijven (niet elke lettercombinatie is zinvol, en ook niet elke zinvolle combinatie van letters beschrijft een natuurlijk getal). Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen, dus de verzameling getallen die niet met honderd letters of minder te beschrijven zijn is ook oneindig en dus zeker niet leeg. Deze verzameling moet dus een kleinste element bevatten. Zij n het kleinste natuurlijke getal dat niet met honderd letters of minder te beschrijven is. Maar we hebben n net met minder dan honderd letters beschreven!

Om paradoxen te vermijden moeten we voorzichtig zijn met wat we verzameling zullen noemen: niet elke collectie mag een verzameling zijn.

Er zijn vaste axioma's (grondregels) ingevoerd die het bestaan van sommige verzamelingen garanderen en beschrijven hoe we nieuwe verzamelingen uit oude kunnen maken, welke operaties met verzamelingen zijn toegestaan en welke eigenschappen ze hebben. Uitgaande van de axioma's en met behulp van logica kunnen we verdere eigenschappen van verzamelingen bewijzen. We zullen nu niet diep in de axioma's duiken, we zullen ons concentreren op het werken met verzamelingen. We zullen operaties met verzamelingen definiëren en de belangrijkste eigenschappen afleiden. Een volledige lijst van axioma's voor de verzamelingenleer is te vinden in Appendix X.1.

I.1 Notatie

Verzamelingen bevatten elementen; als A een verzameling is en x een element van A dan schrijven we[1]

$$x \in A.$$

Om aan te geven dat y *geen* element van A is schrijven we

$$y \notin A.$$

We gebruiken de notatie $\{1\}$ voor de verzameling die alleen het getal 1 bevat, $\{1, 2\}$ is een verzameling die twee elementen bevat, namelijk de getallen 1 en 2. De verzameling $\{a, b, c, d, e\}$ heeft minstens één en hoogstens vijf elementen: het hangt ervan af hoeveel gelijkheden er gelden tussen de niet gespecificeerde elementen a, b, c, d, e. De verzameling die geen elementen bevat heet de *lege verzameling* en wordt genoteerd als $\varnothing$.

Elementen van een verzameling kunnen ook verzamelingen zijn, bijvoorbeeld $A = \{3, \{2\}, \{4, 5\}\}$ heeft elementen 3, $\{2\}$ en $\{4, 5\}$. Er geldt dus $3 \in A$ maar $2 \notin A$; er geldt echter $\{2\} \in A$.

In de wiskunde zijn verzamelingen die getallen als elementen bevatten van groot belang. We gebruiken de letter $\mathbb{N}$ voor de verzameling van alle natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,[2] $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ voor de verzameling van alle gehele getallen, $\mathbb{Q}$ voor de verzameling van alle breuken $\frac{p}{q}$ met $p, q \in \mathbb{Z}$ en $q \neq 0$, $\mathbb{R}$ voor de verzameling van alle reële getallen en $\mathbb{C}$ voor de verzameling van alle complexe getallen. Uiteindelijk zullen we deze getalsystemen (behalve $\mathbb{C}$) exact beschrijven door middel van gegevens en eigenschappen, en, uitgaand van $\mathbb{N}$, constructies schetsen van $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Tot het zover is gaan we op een informele manier met deze getalsystemen om.

Als A een verzameling is dan wordt de verzameling van alle elementen uit A die een eigenschap E hebben als volgt genoteerd: $\{x \in A : E(x)\}$.

I.1.1 Voorbeeld.

(i) De verzameling $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ is de verzameling van alle positieve reële getallen. Deze verzameling is niet leeg want $5 \in \mathbb{R}_{>0}$. Daarentegen is $\{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ en } x < 2\}$ leeg; er is geen reëel getal te vinden dat tegelijk groter dan 5 en kleiner dan 2 is.

(ii) De verzameling van alle reële oplossingen van de vergelijking $\sin(\pi x) = 0$ kunnen we kort als volgt schrijven: $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) = 0\}$. Analoog, de verzameling $B = \{x \in \mathbb{R} : \cos(\pi x/2) = 0\}$ is de verzameling van alle oplossingen van de vergelijking $\cos(\pi x/2) = 0$.

[1] Verzamelingen worden vaak, maar niet altijd, met behulp van hoofdletters genoteerd en hun elementen met behulp van kleine letters. We zullen ook verzamelingen tegenkomen waarvan de elementen weer verzamelingen zijn.

[2] Pas op, er zijn auteurs die $\mathbb{N}$ anders definiëren, namelijk $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Een goede alternatieve notatie voor $\mathbb{N}$ is $\mathbb{Z}_{\geq 0}$; deze maakt meteen duidelijk dat $0 \in \mathbb{N}$.

I.1.2 Definitie.

(i) Twee verzamelingen zijn *aan elkaar gelijk* als ze dezelfde elementen hebben, dat wil zeggen, $A = B$ als ieder element van A element van B is, en ieder element van B element van A.

(ii) Als elk element van A element van B is zeggen we dat A een *deelverzameling* van B is.

Notatie:[3] $A \subseteq B$.

Hieruit volgt dat $A = B$ dan en slechts dan als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

I.1.3 Voorbeeld.

(i) De verzamelingen $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$ hebben dezelfde elementen en zijn dus aan elkaar gelijk. We kunnen schrijven: $A = B$.

(ii) Beschouw de verzamelingen A en B uit Voorbeeld I.1.1 (ii). Als x een geheel getal is dan is $\sin(\pi x) = 0$; dit betekent dat $\mathbb{Z} \subseteq A$. Aan de andere kant, als $\sin(\pi x) = 0$ dan moet x een geheel getal zijn; dit betekent dat $A \subseteq \mathbb{Z}$. We hebben bewezen $A = \mathbb{Z}$: de verzameling van alle oplossingen van de vergelijking $\sin(\pi x) = 0$ is de verzameling van alle gehele getallen.

(iii) Analoog kunnen we bewijzen dat alle oplossingen van $\cos(\pi x/2) = 0$ de verzameling van alle oneven gehele getallen is: $B = \big\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\big\}$.[4]

(iv) De verzamelingen $A = \big\{0, \{1, 2, 3\}, 4\big\}$ en $B = \big\{0, 1, \{2, 3\}, 4\big\}$ zijn niet aan elkaar gelijk. Immers $1 \notin A$ en $1 \in B$.

Intervallen

I.1.4 Voorbeeld. Belangrijke deelverzamelingen van de reële rechte (de verzameling van alle reële getallen) zijn intervallen. We onderscheiden begrensde en onbegrensde intervallen.

(i) **Begrensde intervallen:** Voor $a, b \in \mathbb{R}$ is $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ een *open interval*, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ een *gesloten interval*, en $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ en $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ zijn *halfopen (of halfgesloten) intervallen*. Als nodig, dan kunnen we $(a, b]$ links-open en rechts-gesloten noemen, enzovoorts.

(ii) **Onbegrensde intervallen:** Zij $a \in \mathbb{R}$, dan zijn $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ en $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ open intervallen, en $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$ en $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ gesloten intervallen[5]. Ook de hele reële rechte kan beschouwd worden als een onbegrensd interval: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, dat zowel open als gesloten is.

I.1.5 Voorbeeld.

(i) Er geldt $(0, 1) \subseteq (0, 1]$ want elk element van $(0, 1)$ is ook een element van $(0, 1]$, maar $(0, 1] \nsubseteq (0, 1)$ omdat 1 een element van $(0, 1]$ is maar niet van $(0, 1)$.

(ii) $\varnothing$ is een deelverzameling van elke verzameling, want voor iedere $x \in \varnothing$ geldt $x \in A$ (immers, er is geen $x \in \varnothing$, dus er is niets te controleren).

[3] Voor strikte inclusie wordt vaak "$\subsetneq$" gebruikt, en "$\subset$" is ook een gebruikelijke notatie voor "deelverzameling".

[4] Strikt genomen is deze notatie niet toegelaten in het door ons gebruikte systeem van axioma's voor verzamelingstheorie, maar de betekenis is duidelijk. Een correcte notatie zou zijn: $\{x \in \mathbb{Z} : \text{er is een } k \in \mathbb{Z} \text{ zodat } x = 2k + 1\}$.

[5] Het hier gebruikte symbool ∞ is *geen* element van $\mathbb{R}$, het staat slechts voor het begrip 'oneindig'.

(iii) Het open interval $(0, -1)$ is leeg, en gelijk aan het gesloten interval $[0, -1]$.

Cartesisch product

Het volgende begrip wordt vaak gebruikt.

I.1.6 Definitie. Het *Cartesisch product* van twee verzamelingen A en B is de verzameling geordende paren

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ en } b \in B\}.^6$$

De volgorde van elementen van een geordend paar is belangrijk: als $a \neq b$ dan $(a, b) \neq (b, a)$. Twee geordende paren (a, b) en (a', b') zijn aan elkaar gelijk dan en slechts dan als $a = a'$ en $b = b'$.

I.1.7 Voorbeeld.

(i) Zij $A = \{0, 1, 2\}$ en $B = \{0, 3\}$. Het Cartesisch product van A en B is de volgende verzameling

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 3), (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}.$$

(ii) Zij $\mathbb{R}$ de reële rechte. Dan is $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de verzameling van alle punten in het platte vlak[7].

Opgaven

1. Zij $V = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Vind een eigenschap P zó dat elke van de volgende verzamelingen is te schrijven in de vorm $\{x \in V : P(x)\}$ en bewijs dat deze twee verzamelingen aan elkaar gelijk zijn.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$;

(b) $B = \{0, 1, 2, 3\}$;

(c) $C = \{-2, -1\}$;

(d) $D = \{-2, 0, 2\}$;

(e) $E = \varnothing$.

2. Wat is het aantal elementen van de volgende verzamelingen:

(a) $A = \{0, 2, 4, \ldots, 22\}$;

(b) $B = \{1, \{2\}, \{\{2\}\}\}$;

(c) $C = \{\{\{1\}\}\}$;

(d) $D = \{\varnothing\}$;

(e) $E = \{1, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

3. (a) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1\}$.

(b) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1, 2\}$.

(c) Vind alle deelverzamelingen van $\{0, 1, 2, 3\}$.

☆✍ (d) Zij A een *eindige* verzameling, d.w.z., een verzameling die maar eindig veel elementen bevat.[8] Vind een verband tussen het aantal elementen van A en het aantal deelverzamelingen van A, en bewijs je vermoeden.

[6] Helaas zijn onze notaties voor een geordend paar (a, b) van reële getallen en het open interval (a, b) gelijk. De lezer zal iedere keer de juiste keuze moeten maken op grond van de context.

[7] In plaats van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schrijven we vaak $\mathbb{R}^2$.

[8] Voor de duidelijkheid: het reële interval $(0, 1)$ heet dan misschien wel eens een eindig interval, maar het is géén eindige verzameling.

✍ **4.** Laat A de verzameling van alle even natuurlijke getallen, B de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 3 zijn en C de verzameling van alle natuurlijke getallen die deelbaar door 6 zijn. Bewijs of weerleg:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \subseteq C$;

(c) $B \subseteq C$;

(d) $B \subseteq A$;

(e) $C \subseteq A$;

(f) $C \subseteq B$.

5. Bewijs: voor elke verzameling A geldt dat $\varnothing \subseteq A$ en $A \subseteq A$.

6. Welke van de volgende verzamelingen zijn aan elkaar gelijk? Bewijs je bewering of geef een tegenvoorbeeld.

(a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : |n| < 2\}$;

(b) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n^3 = n\}$;

(c) $C = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 \leqslant n\}$;

(d) $E = \{-1, 0, 1\}$.

✍ **7.** Geef de precieze voorwaarden op de verzamelingen A en B opdat $A \times B = B \times A$.

8. Voor elke verzameling A zij $\mathcal{P}(A)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van A (deze heet de *machtsverzameling* van A). Geef de lijst van elementen van $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, waarbij $A = \{0, 1\}$ en $B = \{\varnothing\}$.

I.2 Operaties op verzamelingen

De basisoperaties op verzamelingen zijn als volgt gedefinieerd.

I.2.1 Definitie. Zij Ω een verzameling. Voor deelverzamelingen A en B van Ω definiëren we

(i) het *complement* van A in Ω door

$$\Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

(we schrijven vaak A^{c} als duidelijk is wat de verzameling Ω is);

(ii) de *vereniging* van A en B door

$$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ of } x \in B\};$$

(iii) de *doorsnede* van A en B door

$$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \in B\}.$$

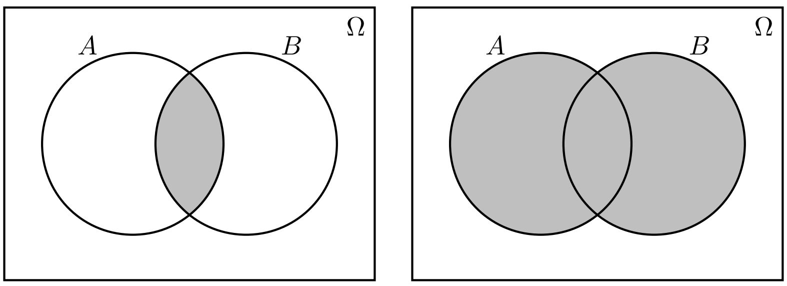
(iv) het *verschil* van A en B door

$$A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \notin B\}.$$

I.2.2 Opmerking. In de bovenstaande definitie hangen $A \cup B$, $A \cap B$ en $A \setminus B$ niet af van de verzameling Ω waarin dit alles gebeurt. We zullen dan ook in deze gevallen deze Ω niet meer altijd noemen.

I.2.3 Voorbeeld. Beschouw weer de verzamelingen A en B uit Voorbeeld I.1.1(ii). Dan is $A \cap B$ de verzameling van alle getallen die oplossingen zijn van beide vergelijkingen $\sin(\pi x) = 0$ en $\cos(\pi x/2) = 0$, en $A \cup B$ is de verzameling van alle getallen die oplossingen zijn van tenminste één van die twee vergelijkingen. Omdat $A = \mathbb{Z}$ en $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ is het niet moeilijk in te zien dat $A \cap B = B$ en $A \cup B = A$. ▬

Om doorsnede en vereniging van A en B te illustreren kunnen we Venn-diagrammen tekenen. In Figuur 1.1 zijn de doorsnede $A \cap B$ en de vereniging $A \cup B$ getekend. De Venn-diagrammen zijn ook handig om allerlei eigenschappen van de basisoperaties te vinden; zie bijvoorbeeld Opgaven I.2.1 en I.2.2.



Figuur 1.1: Doorsnede en vereniging van A en B

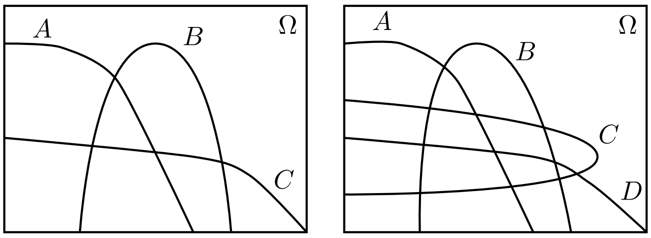
I.2.4 Definitie. Twee verzamelingen A en B heten *disjunct* als $A \cap B = \varnothing$.

I.2.5 Voorbeeld.

(i) De verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 9\}$ en $B = \{0, 1/2\}$ zijn disjunct: $A \cap B = \varnothing$ want alle elementen van A zijn reële getallen groter dan 9 en geen element van B is groter dan 9.

(ii) De verzamelingen $C = (-3, \pi)$ en $D = (1, 33]$ zijn niet disjunct; immers $2 \in C \cap D$ want $-3 < 2 < \pi$ en $1 < 2 \leqslant 33$. In feite bevat de doorsnede oneindig veel elementen: $C \cap D = (1, \pi)$.

In Figuur 1.2 zijn Venn-diagrammen voor drie respectievelijk vier deelverzamelingen van Ω getekend. Venn-diagrammen voor meer dan vier verzamelingen zijn lastig: het is niet makkelijk om in een overzichtelijke manier alle mogelijke doorsneden in één plaatje te krijgen.



Figuur 1.2: Venn-diagrammen voor drie en vier verzamelingen

Vereniging en doorsnede van oneindig veel verzamelingen

In de wiskunde onderzoeken we vaak oneindige objecten: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen, oneindig veel breuken, oneindig veel punten in het platte vlak, oneindig veel lijnen, oneindig veel functies. Daarvoor is de taal van de verzamelingenleer ook handig.

We kunnen ook de doorsnede en de vereniging van *willekeurig* veel verzamelingen definiëren:

I.2.6 Definitie. Laat Ω een verzameling zijn. Laat L een verzameling zijn, en voor elke $\lambda \in L$, A_λ een deelverzameling van Ω. Dan:

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{voor elke } \lambda \in L \text{ geldt } x \in A_\lambda\}$$

en

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{er is een } \lambda \in L \text{ met } x \in A_\lambda\}.$$

I.2.7 Voorbeeld. Beschouw de verzameling $\mathbb{N}$ van alle natuurlijke getallen. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ zij $A_n = (0, 1/(n+1)]$. We bewijzen dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$. Immers, neem aan dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Dan is er een $x \in \mathbb{R}$ met $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Volgens Definitie I.2.6 ligt x in elk interval $(0, 1/(n+1)]$, dat wil zeggen, voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $0 < x \leqslant 1/(n+1)$. We krijgen een tegenspraak[9]: voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n + 1 > 1/x$ geldt dat $1/(n+1) < x$.

Beschouw nu voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $B_n = (0, n]$. We bewijzen nu dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = (0, \infty)$. Volgens Definitie I.1.2 moeten we laten zien dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq (0, \infty)$ en $(0, \infty) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. We bewijzen nu de eerste inclusie. Laat $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Volgens Definitie I.2.6 is er een $n \in \mathbb{N}$ met $x \in (0, n]$. Hieruit volgt dat $x \in (0, \infty)$. Nu de tweede inclusie. Laat $x \in (0, \infty)$. Neem dan een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$, dan $x \in (0, n]$ en bijgevolg $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

[9] Dit soort bewijs heet *bewijs uit het ongerijmde*. Het werkt als volgt: Om een bewering te bewijzen (in ons geval: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$) kunnen we het tegengestelde veronderstellen ($\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$) en laten zien dat dit tot een onjuiste bewering, een tegenspraak, leidt (er is een $x \in \mathbb{R}$ en er is een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $x \leqslant 1/(n+1)$ èn $x > 1/(n+1)$).

Opgaven

1. (**Wetten van de Morgan**) Zij Ω een verzameling. Bewijs dat voor alle deelverzamelingen A en B van Ω geldt

✍ (a) $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$;

(b) $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$.

2. Zij Ω een verzameling. Formuleer en bewijs de Wetten van de Morgan

(a) voor drie deelverzamelingen van Ω;

(b) voor vier deelverzamelingen van Ω.

3. Bewijs dat voor alle verzamelingen A, B en C geldt

(a) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. (a) Zij $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Vind $A \cap A$, $A \cup A$ en $A \setminus A$.

(b) Zij A een willekeurige verzameling. Vind en bewijs een algemene regel voor $A \cap A$, $A \cup A$ en $A \setminus A$.

5. Beschouw de verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 15\}$ en $B = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 20\}$. Beschrijf nu $\mathbb{N} \setminus A$, $\mathbb{N} \setminus B$, $A \cap B$ en $A \cup B$ met soortgelijke formules.

6. Zij $K = \{1, 2, 4\}$. Vind $\bigcup_{k \in K} A_k$ en $\bigcap_{k \in K} A_k$ als gegeven is:

(a) $A_k = \{k^2\}$;

(b) $A_k = [k-1, k+1]$;

(c) $A_k = (k, \infty)$.

☆✍ **7.** Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $A_n = \{x \in \mathbb{R} : 1/2^n \leqslant x < 2 + 1/2^n\}$.

(a) Vind $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(b) Vind $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

8. Laat A, B en C deelverzamelingen zijn van Ω.

(a) Wat is het verband tussen $A \cup (B \setminus C)$ en $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

(b) Wanneer geldt $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$?

9. Vereenvoudig de volgende uitdrukking met behulp van Venn-diagrammen:

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap D^c) \cup (A \cap B \cap C \cap D).$$

I.3 Functies

Iedereen is ongetwijfeld in veel situaties het begrip *functie* tegengekomen; vaak als een voorschrift dat aan elk getal een ander getal toevoegt, bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$ die aan elk getal zijn kwadraat toevoegt. Er zijn echter veel meer mogelijkheden, we hoeven ons niet tot getallen te beperken: het voorschrift dat aan elke auto zijn kenteken toevoegt, het voorschrift dat aan elke persoon zijn geboortedatum toevoegt, of de kleur van zijn ogen zijn ook functies. Een functie kan gegeven worden door een formule (bijvoorbeeld $f(x) = x^2$), maar ook als een grafiek (bijvoorbeeld het verloop van de koers van aandelen in de tijd), of een tabel (bijvoorbeeld tentamencijfers van studenten die aan een tentamen hebben plaatsgenomen).

Om algemene eigenschappen van functies af te leiden en ze te kunnen gebruiken moeten we eerst afspreken welke voorschriften functies definiëren, en ook wat een functie precies is, zodat we bijvoorbeeld over gelijkheid kunnen praten. Informeel gesproken is een functie van A naar B een voorschrift dat aan *elk* element van A *precies één* element van B toevoegt. Een formele definitie gaat met behulp van Cartesisch product van A en B.

I.3.1 Definitie. Een *functie*[10] van A naar B is een tripel (A, B, f) met f een deelverzameling van $A \times B$ met de volgende eigenschap:

> voor iedere $a \in A$ bestaat er precies één $b \in B$ zodanig dat $(a, b) \in f$; deze b noteren we als $f(a)$.

Notatie: $f\colon A \to B$, en $a \mapsto f(a)$.

De verzameling A heet het *domein* en B het *codomein*[11] van f. De verzameling van alle geordende paren $(a, b) \in f$ heet de *grafiek* van f. In plaats van '$(a, b) \in f$' schrijven we vaak '$f(a) = b$'. Als $(a, b) \in f$ dan noemen we b het *beeld* van a onder f en a een *origineel* van b onder f. Merk op dat volgens deze definitie een functie gegeven wordt door haar domein, haar codomein en haar grafiek. Voor twee afbeeldingen $f\colon A \to B$ en $g\colon C \to D$ geldt dus dat $f = g$ precies dan als geldt: $A = C$, en $B = D$, en voor alle $a \in A$ geldt $f(a) = g(a)$.

I.3.2 Voorbeeld. De afbeeldingen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ en $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$ zijn dus gelijk, ook al zijn ze gegeven door verschillende formules.

I.3.3 Voorbeeld. Laat A de verzameling zijn van alle studenten van TU Delft. Dan hebben we functies $f\colon A \to \mathbb{N}$ en $g\colon A \to \mathbb{R}$ die elk element van A naar hun studienummer sturen. Deze functies zijn niet gelijk, want de codomeinen zijn verschillend.

I.3.4 Opmerking. Volgens de definitie van een functie heeft elk element van het domein precies één beeld. Een element van het codomein kan echter géén origineel hebben, of één of meerdere originelen hebben.

Beschouw bijvoorbeeld $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ gegeven door $f(x) = \sin(\pi x)$. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is de waarde van x onder f uniek bepaald, maar het getal $0 \in [-1, 1]$ heeft oneindig veel originelen: voor elke $x \in \mathbb{Z}$ geldt $f(x) = 0$.

I.3.5 Definitie. Laat A en B twee verzamelingen zijn en zij $f\colon A \to B$.

[10] Functies worden vaak ook *afbeeldingen* genoemd.

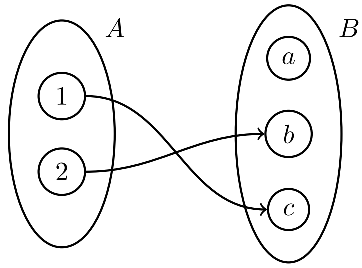
[11] Voor domein en codomein worden ook wel de namen bron(verzameling) en doel(verzameling) gebruikt.

(i) f heet *injectief* als voor alle $a_1 \in A$ en $a_2 \in A$ met $f(a_1) = f(a_2)$ geldt dat $a_1 = a_2$. (Met andere woorden, verschillende elementen van A moeten verschillende beelden hebben.)
(ii) f heet *surjectief* als voor elke $b \in B$ er een $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$. (Met andere woorden, als de verzameling van beelden de hele verzameling B is.)
(iii) f heet *bijectief* als f injectief en surjectief is. (Met andere woorden, als er voor iedere $b \in B$ er precies één $a \in A$ is met $f(a) = b$.)
(iv) Het *beeld* van f is de verzameling van $b \in B$ waarvoor er een $a \in A$ is met $b = f(a)$. Het is een deelverzameling van B. Notaties: $f[A]$ of $\{f(a) : a \in A\}$ of $\{b \in B :$ er bestaat een $a \in A$ met $b = f(a)\}$.

I.3.6 Opmerking. Voor A en B verzamelingen, en $f\colon A \to B$ geldt dus dat f surjectief is precies dan als $f[A] = B$.

Als A en B eindig zijn dan is het makkelijk functies van A naar B grafisch weer te geven: zie de volgende voorbeelden.

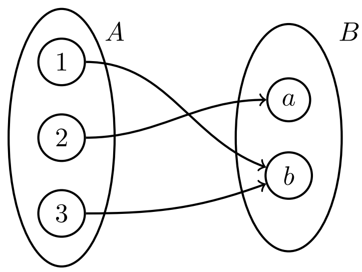
I.3.7 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2\}$ en $B = \{a, b, c\}$ met a, b en c verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = c$ en $f(2) = b$, is injectief want verschillende elementen van A hebben verschillende beelden, maar niet surjectief omdat $a \in B$ geen beeld is van een element van A (zie Figuur 1.3).



Figuur 1.3: Een injectieve, niet surjectieve functie $f\colon A \to B$

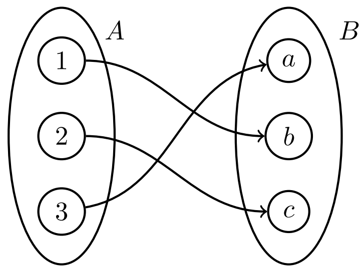
■

I.3.8 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b\}$ met a en b verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = b$, $f(2) = a$ en $f(3) = b$, is surjectief want elk element van B is een beeld van een element van A, maar niet injectief omdat de elementen 1 en 3 verschillend zijn en toch hetzelfde beeld hebben (zie Figuur 1.4).



Figuur 1.4: Een surjectieve, niet injectieve functie $f\colon A \to B$

■

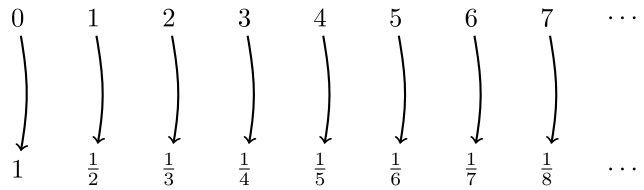


Figuur 1.5: Een bijectieve functie $f\colon A \to B$

I.3.9 Voorbeeld. Zij $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c\}$ met a, b en c verschillend. De functie $f\colon A \to B$, gedefinieerd door $f(1) = b$, $f(2) = c$ en $f(3) = a$, is surjectief en injectief (zie Figuur 1.5).

Een functie $a\colon \mathbb{N} \to B$ noemen we soms ook een *rij* in B. We schrijven dan vaak a_n in plaats van $a(n)$; een gebruikelijke notatie is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (merk wel op dat we dan eigenlijk het codomein niet meer noemen, er is dus al enige mate van slordigheid).

I.3.10 Voorbeeld. De functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(n) = 1/(n+1)$ is dan de reële rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$. Deze functie is injectief (als $n \neq m$ dan $1/(n+1) \neq 1/(m+1)$), maar niet surjectief omdat (bijvoorbeeld) het getal 0 uit het codomein van f geen origineel heeft (er is geen natuurlijk getal n met $1/(n+1) = 0$).



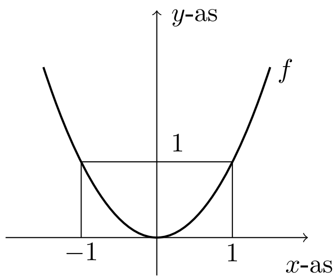
Figuur 1.6: De rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ als een functie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Laat $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval zijn, en $f\colon I \to \mathbb{R}$. Om f grafisch weer te geven tekenen we meestal de grafiek als deelverzameling van $I \times \mathbb{R}$: zoals uit de definitie volgt is de grafiek de verzameling van alle punten van de vorm $(x, f(x))$ met $x \in I$.

I.3.11 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gegeven door $f(x) = x^2$ is niet injectief: de punten -1 en 1 horen tot het domein van f, er geldt $-1 \neq 1$ maar $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$ (zie Figuur 1.7). Zij is wel surjectief: voor elke $y \in [0,\infty)$ is er een $x \in \mathbb{R}$ met $f(x) = y$; neem bijvoorbeeld $x = \sqrt{y}$.

Door het domein of het codomein van een functie te veranderen krijgen we een *nieuwe* functie die geheel andere eigenschappen kan hebben. Bijvoorbeeld, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = x^2$ is niet surjectief, en $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ gegeven door $h(x) = x^2$ is injectief en surjectief.

I.3.12 Voorbeeld. Er bestaat geen functie van $\{0, 1, 2, 3\}$ naar $\mathbb{N}$ die surjectief is. Immers, zij $f\colon \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ een afbeelding. De verzameling $\mathbb{N}$ is oneindig en dus is $X = \mathbb{N} \setminus \big\{f(0), f(1), f(2), f(3)\big\}$ niet leeg (X is zelfs oneindig). Kies een $b \in X$, dan heeft b geen origineel onder f.



Figuur 1.7: Grafiek van de functie $f(x) = x^2$

Samenstelling van functies

Een van de mooie eigenschappen van bijectieve functies is dat ze een inverse hebben. We zullen later zien dat als f bepaalde 'mooie' eigenschappen heeft (bijvoorbeeld continu is) deze eigenschappen door de inverse van f geërfd worden. Het volgende begrip is essentieel voor het definiëren van inverse functies, maar zeker nog belangrijker op zichzelf.

I.3.13 Definitie. Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ twee functies zijn. De *samenstelling* van f en g is de functie $g \circ f\colon A \to C$ gedefinieerd door

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big).$$

We lezen $g \circ f$ als "g na f".

I.3.14 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ is gegeven door $f(x) = \sin x$, en de functie $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x^2$. Dan is $f \circ g\colon [-1,1] \to [-1,1]$ de functie gedefinieerd door $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$, en $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$.

Als $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ functies zijn die samengesteld kunnen worden tot $g \circ f$ en $f \circ g$ geldt niet altijd dat $f \circ g = g \circ f$. Als $A \neq B$ dan kan $f \circ g$ al zeker niet gelijk zijn aan $g \circ f$, want de domeinen verschillen.

I.3.15 Stelling. De samenstelling van functies is associatief, dat wil zeggen,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

voor alle $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ en $h\colon C \to D$.

Bewijs. Neem aan $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ en $h\colon C \to D$ drie willekeurige functies zijn. De identiteit volgt uit het feit dat voor elke $a \in A$ geldt

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h\big(g(f(a))\big)$$

en

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(a) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = h\big(g(f(a))\big).$$

∎

I.3.16 Definitie. Voor A een verzameling definiëren we de functie $\mathrm{id}_A\colon A \to A$, gegeven door $a \mapsto a$. Deze functie heet de *identieke functie* van A.

I.3.17 Opmerking. Als A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$, dan geldt $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

Inverse functies

Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. We definiëren in $B \times A$ de volgende deelverzameling

$$g = \{(b,a) \in B \times A\colon (a,b) \in f\}\,.$$

Merk op dat g een functie is van B naar A. Immers: omdat f surjectief is, is er voor iedere $b \in B$ een $a \in A$ zodat $(b,a) \in g$, en omdat f injectief is, is deze a uniek.

I.3.18 Definitie. Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. De *inverse* van f is de functie $g = \{(b,a) \in B \times A\colon (a,b) \in f\}$.

De inverse functie $f\colon A \to B$ is de unieke functie $g\colon B \to A$ zodat voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt

$$g(b) = a \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad f(a) = b.$$

Een functie kan niet meer dan één inverse hebben, zie Opgave I.3.14. We gebruiken als notatie: $g = f^{-1}$.

I.3.19 Lemma. Zij $f\colon A \to B$ een bijectie. De inverse f^{-1} is ook een bijectie en er geldt: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Bewijs. Opgave I.3.16. ∎

I.3.20 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 2 - 3x$ is bijectief (ga zelf na dat f injectief en surjectief is). Om haar inverse te vinden beschouw een willekeurige $y \in \mathbb{R}$. Er geldt, voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$2 - 3x = y \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad x = \frac{2-y}{3}.$$

De inverse $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is dus gegeven door het voorschrift[12] $f^{-1}(x) = (2-x)/3$.

I.3.21 Definitie. Laat $f\colon A \to B$ een afbeelding zijn, en C een deelverzameling van B. Dan noemen we de verzameling $\{a \in A : f(a) \in C\}$ het *inverse beeld* van C onder f. Deze deelverzameling van A noteren we ook als $f^{-1}(C)$.

Merk op dat $f^{-1}(C)$ bestaat ook als f geen inverse heeft.

I.3.22 Voorbeeld. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. Dan geldt $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ en $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$.

Opgaven

✍ **1.** Laat $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = (1-x)/(1+x)$. Vind $f(0)$ en voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vind $f(1/x)$ en $1/f(x)$.

✍ **2.** (a) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x+1) = x^2 - 5x + 1$. Vind $f(x)$.

(b) Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt $f(1/x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Vind $f(x)$.

✍ **3.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sin(x^2)$; vind alle originelen van 0, -1 en π.

4. Hieronder staan vier tweetallen functievoorschriften. Geef van elk tweetal aan of beide voorschriften dezelfde functie beschrijven, of niet.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, x \mapsto x^2$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x(\frac{x}{2} + 1) + 1$.

(c) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ en
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ en
$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$.

5. (a) Laat $A = \{1, 2\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$. Hoeveel afbeeldingen $A \to B$ zijn er?

(b) Laat B een verzameling zijn. Hoeveel functies $f : \varnothing \to B$ zijn er?

(c) Laat A een verzameling zijn. Hoeveel functies $f : A \to \varnothing$ zijn er?

6. Geef voorbeelden van eindige verzamelingen A en B en een functie
$f\colon A \to B$ die

(a) bijectief is,

(b) surjectief maar niet injectief is,

(c) injectief maar niet surjectief is,

(d) niet surjectief en niet injectief is.

Bewijs in elk van de onderdelen dat je voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.

7. Geef voorbeelden van oneindige verzamelingen A en B en een functie
$f\colon A \to B$ die

(a) bijectief is,

(b) surjectief maar niet injectief is,

(c) injectief maar niet surjectief is,

(d) niet surjectief en niet injectief is.

Bewijs in elk van de onderdelen dat je voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.

8. Zij A een eindige verzameling. Voor het aantal elementen van A gebruiken we de notatie $\#A$.
Neem aan dat A en B eindige verzamelingen zijn en zij $f : A \to B$.

(a) Laat zien dat als f injectief is dan geldt $\#A \leqslant \#B$.

(b) Laat zien dat als f surjectief is dan geldt $\#A \geqslant \#B$.

✍ **9.** Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ twee functies zijn. Bewijs of weerleg:

(a) Als $g \circ f$ injectief is dan is f injectief.

(b) Als $g \circ f$ injectief is dan is g injectief.

(c) Als $g \circ f$ surjectief is dan is f surjectief.

(d) Als $g \circ f$ surjectief is dan is g surjectief.

✍ **10.** Bewijs of weerleg: samenstelling van functies is commutatief, dat wil zeggen, voor alle verzamelingen A en B, en voor alle $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ geldt $f \circ g = g \circ f$. Geldt deze bewering als $A = B$?

[12] Het maakt natuurlijk niets uit of we de variabele x of y noemen.

11. Bewijs dat elke van de volgende functies een inverse heeft en vind zijn voorschrift.

(a) $f\colon \{0,1,2\} \to \{3,5,15\}$ gegeven door $f(0)=3$, $f(1)=15$ en $f(2)=5$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x)=4x+5$;

(c) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeven door $f(x)=1/x$.

12. Beschouw $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x)=(1-5x)/x$.

(a) Bewijs dat f injectief is.

✍ (b) Vind het beeld B van f. Laat zien dat de afbeelding $g\colon [1,\infty) \to B$ gedefinieerd door $x \mapsto f(x)$ bijectief is en bereken de inverse van g.

✍ **13.** Voor elke van de onderstaande injectieve functies $f\colon A \to \mathbb{R}$, bepaal het beeld B, en bepaal de afbeelding $g\colon B \to A$ zodat voor alle $a \in A$ geldt $g(f(a))=a$.

(a) $A=\mathbb{R}$ en $f(x)=7x-3$;

(b) $A=(-\infty,0]$ en $f(x)=x^2$;

(c) $A=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ en $f(x)=(1-x)/(2+x)$;

(d) $A=[-1,0]$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

✍ **14.** Bewijs dat een bijectieve functie precies één inverse heeft.

15. Laat A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$.

(a) Bewijs dat f en g inversen van elkaar zijn precies dan als $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

(b) Geef een voorbeeld waar $g \circ f = \mathrm{id}_A$ en $f \circ g \neq \mathrm{id}_B$.

16. Bewijs Lemma I.3.19.

17. Zij $f\colon A \to A$ een functie. Bewijs: als voor elke $a \in A$ geldt $f\big(f(a)\big)=a$ dan is f een bijectie en $f^{-1}=f$.

18. Laat $f : A \to B$ een bijectie zijn en $C \subseteq B$. Bewijs of weerleg: $f^{-1}(C)=f^{-1}[C]$. (Zie Definitie I.3.5(iv) en Definitie I.3.21.)

19. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de afbeelding zijn gegeven door $f(x)=x^2$.

(a) Beschrijf de elementen van $f^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q}$.

(b) Bewijs of weerleg: $f^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

20. Zij $f\colon A \to B$ een functie. Zij V_1 en V_2 deelverzamelingen van A. Toon aan

(a) $f[V_1 \cap V_2] \subseteq f[V_1] \cap f[V_2]$;

(b) Als f injectief is, dan geldt $f[V_1 \cap V_2] = f[V_1] \cap f[V_2]$.

✯ **21.** Formeel is een functie een deelverzameling van een Cartesisch product. Neem eens aan dat we $(a,b) \in f$ *niet* hadden afgekort met $b=f(a)$. Laat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ functies zijn. Geef een definitie van $g \circ f$ in termen van geordende paren, dat wil zeggen, vul de volgende zin aan:
$(a,c) \in g \circ f$ dan en slechts dan als ....
en bewijs dat dit dezelfde afbeelding oplevert als Definitie I.3.13.
Bewijs, uitgaande van de voorgaande formulering, dat $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

22. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een bijectie. De grafieken van f en f^{-1} zijn deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$. Wat is het verband tussen deze deelverzamelingen?

23. Probeer eens de interactieve opgaven over inverse functies op de WIMS systeem (zoek onder 'inverse'): `http://wims.math.leidenuniv.nl/wims/`

I.4 Aftelbare en overaftelbare verzamelingen

Aftelbare verzamelingen

Stel we hebben twee verzamelingen A en B en we willen bepalen welke verzameling meer elementen bevat. Hoe kunnen we twee verschillende verzamelingen vergelijken? Als de verzamelingen eindig zijn (dat wil zeggen, als ze beide uit eindig veel elementen bestaan) dan is het geen groot probleem: tel de elementen van A, tel de elementen van B en vergelijk die twee natuurlijke getallen.

Maar wat moeten we doen als beide verzamelingen oneindig zijn? We kunnen de elementen niet meer tellen. Er is echter nog een methode om bij eindige verzamelingen te bepalen welke verzameling meer elementen bevat waarbij het tellen van het aantal elementen niet nodig is.

Neem aan dat je twee dozen hebt. In de eerste doos zijn moeren en in de tweede doos bevinden zich bouten. Je wilt bepalen of er meer bouten of meer moeren zijn. Het is niet noodzakelijk het aantal moeren en bouten te bepalen: je kunt ook telkens een bout en een moer pakken en deze op elkaar draaien. Als uiteindelijk de doos met de moeren leeg is terwijl er nog bouten over zijn weet je dat er meer bouten zijn dan moeren. En omgekeerd, zijn er moeren over dan heb je meer moeren dan bouten.

Dit idee kunnen we *wel* gebruiken om de grootte van oneindige verzamelingen te vergelijken: we proberen een correspondentie te vinden tussen telkens één element van de eerste en één element van de tweede verzameling.

Nu gaan we dit alles netjes wiskundig definiëren. We zullen definiëren wanneer twee verzamelingen even veel elementen hebben.

I.4.1 Definitie. Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als een bijectie $f\colon A \to B$ bestaat.

I.4.2 Voorbeeld. De verzamelingen $A = \{a, b, c, d\}$ met a, b, c, d verschillend en $B = \{1, 2, 3, 4\}$ zijn gelijkmachtig: een bijectie $f\colon A \to B$ is gedefinieerd door $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ en $f(d) = 4$.

I.4.3 Voorbeeld.

(i) De intervallen $[0, 1]$ en $[0, 2]$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $f\colon [0, 1] \to [0, 2]$ gegeven door $f(x) = 2x$ is een bijectie.

(ii) Het interval $(-\pi/2, \pi/2)$ en de verzameling $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ is een bijectie, en bijvoorbeeld ook de afbeelding $x \mapsto -1/(x + \pi/2) - 1/(x - \pi/2)$.

(iii) Het interval $(0, 1)$ en het interval $(1, \infty)$ zijn gelijkmachtig: de afbeelding $x \mapsto 1/x$ is een bijectie.

Met behulp van het begrip gelijkmachtig kunnen we een nette definitie van eindige verzameling geven.

I.4.4 Definitie. Zij A een verzameling.

(i) A heet *eindig* als een natuurlijk getal n bestaat zó dat $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A gelijkmachtig zijn (voor $n = 0$ betekent dit dat $A = \varnothing$).

(ii) A heet *aftelbaar oneindig* als A en $\mathbb{N}$ gelijkmachtig zijn.

(iii) A heet *aftelbaar* als A eindig of aftelbaar oneindig is.

(iv) A heet *overaftelbaar* als A niet aftelbaar is.

Oneindige verzamelingen zijn dus aftelbaar als ze even veel elementen als $\mathbb{N}$ hebben. Het zou duidelijk moeten zijn dat $\mathbb{N}$ zelf aftelbaar is: de identieke afbeelding $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is een bijectie. Omdat $\mathbb{N}$ niet eindig is, is er tenminste één aftelbaar oneindige verzameling.

I.4.5 Voorbeeld. Intuïtief zijn er meer gehele getallen dan natuurlijke getallen maar toch is de verzameling $\mathbb{Z}$ aftelbaar: een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd bijvoorbeeld door

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Bewijs. We tonen eerst aan dat f injectief is. Zij $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $f(n_1) = f(n_2)$. Omdat $f(n) \geq 0$ dan en slechts dan als n even is, geldt dat n_1 en n_2 ofwel beide even ofwel beide oneven zijn. In het eerste geval hebben we $n_1/2 = n_2/2$, en dus $n_1 = n_2$, en in het tweede geval $-(n_1+1)/2 = -(n_2+1)/2$ waar ook uit volgt dat $n_1 = n_2$. In beide gevallen concluderen we dus dat $n_1 = n_2$, en er geldt dat f injectief is.

Nu gaan we bewijzen dat f surjectief is. Zij $m \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Als $m \geq 0$ dan geldt dat $2m \in \mathbb{N}$ en $f(2m) = m$, en dus ligt m in het beeld van f. Als daarentegen $m < 0$ dan geldt dat $-1-2m \in \mathbb{N}$ en $f(-1-2m) = -(-1-2m+1)/2 = m$. In beide gevallen vinden we dat m in het beeld van f ligt. We concluderen dus dat f surjectief is.

Omdat de afbeelding f zowel injectief als surjectief is, is hij bijectief.

Ook de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar.

I.4.6 Stelling. De verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar.

Bewijs. Om te laten zien dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is moeten we een bijectie vinden tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. We zullen met een plaatje aannemelijk maken dat zo een bijectie bestaat, zonder het bewijs in detail te geven.

Beschouw de functie $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ waarbij $f(x, y)$ in de volgende tabel is weergegeven.

Bijvoorbeeld $f(2, 1) = 7$ en $f(4, 0) = 10$. Uit de constructie is het duidelijk dat f een bijectie is. ■

Met een gelijkaardig argument kan men bewijzen dat ook $\mathbb{Q}$ aftelbaar is. Zie opgave I.4.8.

Niet elke verzameling is aftelbaar. We zullen bewijzen dat de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ overaftelbaar is.

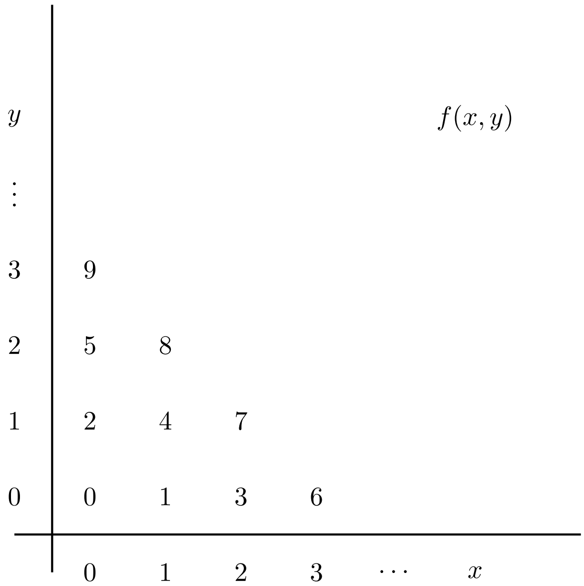
I.4.7 Definitie. Zij A een verzameling. De *machtsverzameling* van A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A. Notatie: $\mathcal{P}(A)$.

I.4.8 Voorbeeld. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

I.4.9 Stelling (Cantor)**.** Zij A een verzameling. Er bestaat geen surjectieve afbeelding $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$.

Met deze stelling kunnen we nu onmiddellijk een voorbeeld geven van een overaftelbare verzameling.

I.4.10 Gevolg. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is overaftelbaar.



Figuur 1.8: Grafische weergave van de functie $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Bewijs. We bewijzen dit *uit het ongerijmde.* Dat wil zeggen dat we aannemen dat de uitspraak niet waar is, en dan een tegenstrijdigheid afleiden.

Neem dus aan dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aftelbaar is. Omdat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ niet eindig is, betekent dit dat er een bijectie $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ is. Zo een bijectie is in het bijzonder surjectief, in tegenspraak met de stelling van Cantor. ∎

Bewijs van Stelling I.4.9. Neem aan dat er een surjectie $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ bestaat. Beschouw nu de verzameling

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Aangezien $B \subseteq A$ geldt ook $B \in \mathcal{P}(A)$. Wegens de aanname dat f surjectief is, bestaat er een $x \in A$ met $f(x) = B$. Er zijn twee mogelijkheden: (i) $x \in B$ of (ii) $x \notin B$. Als (i) geldt dan geldt $x \in B$. Dus ook $x \in f(x)$, en met de definitie van B volgt $x \notin B$. Dus (i) geeft een tegenspraak. Als (ii) geldt dan weten we $x \notin B$ dus ook $x \notin f(x)$, en met de definitie van B volgt dat $x \in B$. Dus (ii) geeft ook een tegenspraak. Beide gevallen (i) en (ii) kunnen niet gelden, en dus vinden we een tegenspraak. ∎

We zullen later ook bewijzen dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is, maar daarvoor moeten we uiteraard eerst een definitie van $\mathbb{R}$ zien!

Opgaven

1. Hoeveel verschillende bijecties kun je vinden tussen $A = \{a, b, c, d\}$ (met a, b, c, d verschillend) en $B = \{1, 2, 3, 4\}$?

2. Laat zien dat de intervallen $(-1, 1)$ en $(2, 5)$ gelijkmachtig zijn.

3. Laat zien dat $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ gelijkmachtig zijn.

4. Zij $2\mathbb{N}$ de verzameling van alle even natuurlijke getallen. Bewijs dat $2\mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is.

5. Laat zien dat de intervallen $[0, 1)$ en $(2, 5]$ gelijkmachtig zijn.

6. Beschouw $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en $B = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$. Laat zien dat $A \cup B$ aftelbaar is.

✯ **7.** Laat zien dat de afbeelding $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeven door $f(n, m) = 2^n(2m + 1)$ een bijectie is.

✯ **8.** Bewijs dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is.

✯ **9.** Laat zien dat de afbeelding $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $f(n, m) = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$ een bijectie is.

10. Zij A een verzameling en $\mathcal{P}(A)$ zijn machtsverzameling. Geef een injectie $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

11. Zij $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Wat is $\mathcal{P}(A)$?

12. (a) Laat zien dat de vereniging van twee aftelbare verzamelingen aftelbaar is.
(b) Laat zien dat de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen aftelbaar is.
(c) Lees de wikipedia pagina 'Hilbert's paradox of the Grand Hotel'.

✯ **13.** Bewijs of weerleg:
(a) de intervallen $(0, 1)$ en $[0, 1)$ zijn gelijkmachtig.
(b) de intervallen $[0, 1)$ en $[0, 1]$ zijn gelijkmachtig.
(c) de intervallen $(0, 1)$ en $[0, 1]$ zijn gelijkmachtig.

14. Bewijs dat elke deelverzameling van een aftelbare verzameling aftelbaar is.

II NATUURLIJKE, GEHELE EN RATIONALE GETALLEN

Iedereen kent getallen: de natuurlijke getallen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, gebruiken we om te tellen, om getallen van elkaar af te kunnen trekken hebben we de gehele getallen, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, nodig, de rationale getallen $\mathbb{Q}$ zijn nodig om bijvoorbeeld delen van een geheel te meten. Dat we bij het meten ook getallen tegenkomen die geen breuken zijn was al aan oude Grieken bekend: de lengte van de schuine zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met beide benen van lengte 1 is geen breuk. We hebben een grotere verzameling dan $\mathbb{Q}$ nodig, de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen. Ook met reële getallen kunnen we niet alles: een simpele vergelijking als $x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële oplossing. In de grotere getallenverzameling $\mathbb{C}$ zijn wel oplossingen van deze vergelijking te vinden.

In dit en in het volgende hoofdstuk zullen we de basiseigenschappen van de getallen en hun gevolgen bestuderen. We zullen ook aandacht aan de vraag besteden welke eigenschappen de getalsystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ van elkaar onderscheiden.

II.1 Natuurlijke getallen en volledige inductie

Axioma's

Alhoewel we allemaal weten, of misschien denken te weten, wat natuurlijke en gehele getallen zijn, en wat de gebruikelijke operaties als optelling en vermenigvuldiging daarop zijn, is het goed om een korte lijst eigenschappen, ofwel *axioma's*, te geven die deze getalsystemen precies karakteriseren. Het doel hiervan is dat er dan geen dubbelzinnigheid is over wat we wel en niet mogen aannemen. Een ander gevolg van de axiomatische benadering is dat het er niet meer toe doet wat ieder onder ons denkt dat natuurlijke getallen precies zijn, zolang ze maar aan de axioma's voldoen (denk hierbij maar aan de vele manieren waarop natuurlijke getallen geïmplementeerd kunnen worden in computers, als die een oneindig geheugen zouden hebben). De axioma's worden dan als uitgangspunt genomen in het bewijzen van weer andere beweringen over de getalsystemen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

Axioma's voor $\mathbb{N}$

We beginnen met de eigenschappen van de natuurlijke getallen en optelling. De *gegevens* zijn:
(a) een verzameling $\mathbb{N}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{N}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de optelling;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de vermenigvuldiging.

De optelling voldoet aan de volgende *eigenschappen*:

(N0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt $a + b = b + a$;
(N1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(N2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt $0 + a = a$ en $a + 0 = a$;
(N3) de *schrapwet* geldt voor de optelling, d.w.z., voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

Bovenstaande eigenschappen gelden bijvoorbeeld ook voor de optelling van reële getallen. De drie axioma's hieronder zijn specifiek voor $\mathbb{N}$.

(N4) de elementen 0 en 1 zijn verschillend;
(N5) er is geen $a \in \mathbb{N}$ met $1 + a = 0$ (m.a.w. 0 is het 'kleinst');
(N6) axioma van *inductie*: als $A \subseteq \mathbb{N}$ voldoet aan de eigenschappen $0 \in A$ en $a \in A \Rightarrow 1 + a \in A$, dan $A = \mathbb{N}$;

De bovenstaande axioma's beschrijven $\mathbb{N}$ met 0, 1 en zijn optelling volledig. Men kan bewijzen (met behulp van Stelling X.3.1) dat de bovenstaande lijst de gegevens $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ uniek karakteriseert, in de zin dat als $(\mathbb{N}', 0', 1', +')$ aan deze eigenschappen voldoet, er een unieke bijectie $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ is zodat $f(0) = 0'$, $f(1) = 1'$, en zodat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt dat $f(a + b) = f(a) +' f(b)$.

Uit **(N6)** volgt dat ieder element van $\mathbb{N}$ een eindige som $1+\cdots+1$ is (waarbij de som met nul termen per definitie 0 is). Dus inderdaad volgt dat $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$, waarbij $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, ...

We hebben nog niets gezegd over de vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$. Deze kan men uit de optelling construeren, maar in plaats daarvan zullen we de vermenigvuldiging hier axiomatisch vastleggen.

(N7) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt $ab = ba$;
(N8) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(N9) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt $1{\cdot}a = a$ en $a{\cdot}1 = a$;
(N10) de *distributieve* wet geldt, d.w.z., voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$.

Terecht kan men opmerken dat de lijst eigenschappen toch nog vrij lang is. Een veel kortere karakterisering van de natuurlijke getallen is gegeven door Peano's axioma's, zie Appendix X.2.

Alle bekende rekenregels kan men nu in principe afleiden uit de bovenstaande axioma's. Bijvoorbeeld:

II.1.1 Propositie. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $n \cdot 0 = 0$.

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit **(N2)** volgt $n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0$. Uit **(N2)** volgt ook dat $0 = 0 + 0$, we hebben dus

$$n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0 = n \cdot (0 + 0).$$

Axioma **(N10)** volgt nu $n \cdot (0+0) = n \cdot 0 + n \cdot 0$. Samen met bovenstaande formule levert dit

$$n \cdot 0 + 0 = n \cdot 0 + n \cdot 0.$$

Met de schrapwet **(N3)** leiden we nu af $0 = n \cdot 0$, wat we moesten bewijzen. ■

Ongelijkheden

Uit de optelling op $\mathbb{N}$ kunnen we ook een relatie $\leq$ definiëren als volgt:

$$n_1 \leq n_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{er is een } m \in \mathbb{N} \text{ met } n_1 + m = n_2.$$

De notatie $n_1 < n_2$ is een afkorting voor "$n_1 \leq n_2$ en $n_1 \neq n_2$". Analoog definiëren we $\geq$ en $>$.

Volledige inductie We beschrijven nu een belangrijke techniek om beweringen over natuurlijke getallen te bewijzen. Deze bewijstechniek is gerechtvaardigd door het axioma van inductie, **(N6)** in de lijst van axioma's voor $\mathbb{N}$.

Stel je voor dat we een uitspraak van het type 'Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt ...' willen bewijzen. We kunnen als volgt aan het werk gaan: we gaan eerst na dat de uitspraak juist is voor 0, en daarna laten we zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat *als* de uitspraak waar is voor n, *dan* ook voor $n+1$. Het axioma van inductie (ook wel Principe van Volledige Inductie geheten) garandeert nu dat de uitspraak juist is voor elk natuurlijk getal, want de deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ van alle natuurlijke getallen waarvoor de uitspraak juist is voldoet aan de twee eisen van het axioma van inductie, zodat $A = \mathbb{N}$. Een bewijs van zo'n type heet een *bewijs met volledige inductie*.

We illustreren de techniek aan de hand van een paar voorbeelden.

II.1.2 Voorbeeld. We gaan bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1).$$

We gebruiken inductie naar n.
Stap 1: Voor $n = 0$ volgt dit uit $2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (0+1)$.
Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $\sum_{k=0}^{n} 2k = n(n+1)$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k = \sum_{k=0}^{n} 2k + 2(n+1) \overset{(IV)}{=} n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2).$$

De tweede gelijkheid op de regel hierboven volgt op grond van de inductieveronderstelling. ▬

Algemener kunnen we zo uitspraken van het type 'Voor alle $n \geqslant N$ geldt ...' bewijzen. We controleren dan de bewering voor $n = N$ en laten daarna weer zien dat voor alle $n \geq N$ geldt dat *als* de bewering voor n, *dan* ook voor $n+1$. Het axioma van inductie is dan van toepassing op de verzameling A van alle $k \in \mathbb{N}$ zó dat de bewering juist is voor $n = N + k$.

II.1.3 Voorbeeld. Zij $x \neq 1$ een reëel getal. We bewijzen dat voor elk natuurlijk getal $n \geqslant 1$ geldt

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

Stap 1: De bewering is waar voor $n = 1$:

$$\frac{x^1 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Stap 2: Laat $n \geqslant 1$. Neem aan dat $(x^n - 1)/(x-1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} &= \frac{x^{n+1} - x^n + x^n - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^n(x-1)}{x-1} + \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ &= x^n + \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ &\overset{(IV)}{=} x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt op grond van de inductieveronderstelling. ▬

Binomium van Newton

We besluiten deze paragraaf met een stelling die voor de uitdrukking $(a+b)^n$, waarbij $n \in \mathbb{N}$ positief is, een mooie formule geeft. We spreken af dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $x^0 = 1$.

Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $n!$ (spreek uit "*n-faculteit*") als:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

met de afspraak dat $0! = 1$. (In de appendix wordt het gebruik van $\cdots$ in deze definitie gerechtvaardigd, zie X.3.3) Voor n en k in $\mathbb{N}$ met $k \leq n$ definiëren we de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ (spreek uit "*n boven k*") als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

II.1.4 Stelling (Binomium van Newton)**.** Voor alle reële getallen a en b en elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bewijs. Laat $a, b \in \mathbb{R}$. STAP 1: De bewering is waar voor $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \text{en} \qquad \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

STAP 2: Laat $n \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (dit heet de *inductieveronderstelling*). Dan geldt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\overset{(IV)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Door verschuiven van de sommatieindex in de tweede som krijgen we

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

We gebruiken nu de identiteit uit Opgave II.1.16:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

■

Welordening van $\mathbb{N}$.

Een fundamenteel gevolg van het axioma van inductie is dat elke niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$ een kleinste element bevat.

II.1.5 Stelling (Wel-ordening van $\mathbb{N}$)**.** Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{N}$. Dan bestaat er een $v \in V$ zodat voor alle $w \in V$ geldt $w \geq v$.

Bewijs. Neem aan dat voor alle $v \in V$ er een $w \in V$ is met $w < v$. Hieruit volgt dat $0 \notin V$. Zij $A \subset \mathbb{N}$ de volgende verzameling

$$A = \{n \in \mathbb{N}\colon \text{voor alle } m \in \mathbb{N} \text{ met } m \leq n \text{ geldt } m \notin V\}.$$

Omdat $0 \notin V$ geldt $0 \in A$.

Neem nu aan dat $n \in A$, dus dan zitten $0, 1, \ldots, n$ niet in V. Als $n + 1 \in V$ dan is $n + 1$ een kleinste element in V, in tegenspraak met onze aanname, dus $n + 1 \notin V$. Maar nu volgt dus dat $n + 1 \in A$.

Omdat $0 \in A$ en omdat uit $n \in A$ volgt dat $n + 1 \in A$, impliceert **(N6)** dat $A = \mathbb{N}$. Maar dan volgt dat $V = \varnothing$, een tegenspraak. ∎

Opgaven

✍ **1.** Laat $a \in \mathbb{N}$ met $a \neq 0$. Bewijs uit de axioma's dat er een unieke $b \in \mathbb{N}$ is met $a = b + 1$.

2. Zij $a, b \in \mathbb{N}$. Neem aan dat $ab = 0$. Bewijs dat $a = 0$ of $b = 0$. (*Hint*: gebruik voorgaande opgave, en gebruik dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $n \cdot 0 = 0$, zie Propositie II.1.1.)

3. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 1$ de volgende formules gelden:

(a) $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n-1}(2n - 1) = (-1)^{n-1}n$;

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

✍ **4.** Verzin zelf een formule voor

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$$

en bewijs met behulp van volledige inductie dat je formule juist is voor elk natuurlijk getal n.

5. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 1$ de volgende formules gelden:

(a) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$;

(b) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$.

6. Bewijs met behulp van volledige inductie: voor alle $n \geqslant 1$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2(n + 1)^2.$$

7. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $2^n > n$.

8. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geqslant 4$ geldt $n! > 2^n$.

✍ **9.** Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n het getal $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7.

10. Bewijs met behulp van volledige inductie dat de som van de derde machten van drie opeenvolgende natuurlijke getallen deelbaar is door 9.

11. Gegeven zijn n punten in $\mathbb{R}^2$, $n \geqslant 3$, met de eigenschap dat geen drie punten op een lijn liggen. Bewijs met behulp van volledige inductie dat de punten door $n(n-1)/2$ verschillende lijnen te verbinden zijn, en niet door minder lijnen.

12. Bewijs met behulp van volledige inductie dat n verschillende lijnen in het platte vlak die door de oorsprong gaan het vlak in $2n$ gebieden verdelen.

13. Zij x een reëel getal. Laat zien met behulp van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

✍ **14.** Zij $P(n)$ de bewering 'n^2+3n+1 is een even getal'. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

als $P(n)$ waar is dan is $P(n+1)$ waar.

Geldt $P(n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$? Verklaar je antwoord.

✍ **15.** Vind de fout in het volgende 'bewijs met volledige inductie' dat alle mensen op dezelfde dag jarig zijn:
Voor $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$, zij P_n de bewering: 'in elke verzameling van n mensen is iedereen op dezelfde dag jarig.'
Stap 1: Als we slechts één mens beschouwen is de bewering P_1 duidelijk juist.
Stap 2: Laat $n \geq 1$, en neem aan dat in elke verzameling van n mensen iedereen op dezelfde dag jarig is. Stel dat we nu $n+1$ mensen hebben. We kunnen ze nummeren: $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$. Beschouw nu de verzamelingen $A = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ en $B = \{m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}\}$. Beide verzamelingen hebben n elementen en dus volgens de inductieveronderstellig is iedereen in A op dezelfde dag jarig, maar ook iedereen in B heeft de verjaardag op dezelfde dag. Hieruit volgt dat iedereen in $A \cup B$ ook op dezelfde dag jarig is.
Volgens het Principe van Volledige Inductie kunnen we concluderen dat P_n juist is voor elke $n \geqslant 1$, en dus zijn alle mensen op dezelfde dag jarig.

16. Bewijs de volgende eigenschappen van de binomiaalcoëfficiënten.

(a) Laat zien dat voor alle $1 \leqslant m \leqslant n$ de volgende identiteit geldt:

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

(b) Laat zien dat voor alle $1 \leqslant m \leqslant n$ de volgende identiteit geldt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(c) Toon aan: voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

(d) Toon aan: voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ geldt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m = 0.$$

(e) Toon aan dat $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$ met $n \geqslant m$.

(f) Bewijs dat als n een priemgetal is dan is $\binom{n}{m}$ deelbaar door n voor elke $m \in \mathbb{N}$ met $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

☆**17.** Toon aan dat $\binom{n}{k}$ het aantal manieren is om k mensen uit een groep van n mensen te kiezen.

II.2 Gehele getallen

We beginnen met de eigenschappen van de gehele getallen.

Axioma's voor $\mathbb{Z}$

De *gegevens* zijn:

(a) een verzameling $\mathbb{Z}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{Z}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, de optelling;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, de vermenigvuldiging.

We schrijven meestal ab voor $a \cdot b$.

De optelling voldoet aan de volgende *eigenschappen*:

(Z0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt $a + b = b + a$;
(Z1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(Z2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $0 + a = a$ en $a + 0 = a$;
(Z3) additieve inversen bestaan: voor alle $a \in \mathbb{Z}$ bestaat er een $b \in \mathbb{Z}$ zodat $a + b = 0$.

Uit deze axioma's kunnen we al een belangrijke eigenschap van de optelling in $\mathbb{Z}$ afleiden.

II.2.1 Propositie (Schrappingswet in $\mathbb{Z}$)**.** Zij $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Als $a + c = b + c$ dan $a = b$.

Bewijs. Neem aan dat $a + c = b + c$. Wegens **(Z3)** bestaat er een $d \in \mathbb{Z}$ zodat $c + d = 0$. We hebben nu

$$a \overset{(\mathbf{Z2})}{=} a + 0 = a + (c + d) \overset{(\mathbf{Z1})}{=} (a + c) + d$$

en analoog

$$b \overset{(\mathbf{Z2})}{=} b + 0 = b + (c + d) \overset{(\mathbf{Z1})}{=} (b + c) + d.$$

Maar omdat $a + c = b + c$ volgt nu dat $a = b$, wat we moesten bewijzen. ■

In het bijzonder volgt uit de schrappingswet dat de additieve inversen uit axioma **(Z3)** uniek zijn: als $a + b = 0$ en $a + b' = 0$, en dus $a + b = a + b'$, dan volgt dat $b = b'$. We zullen voortaan de unieke additieve inverse van a met $-a$ noteren. Dus $-a$ is per definitie het unieke element van $\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $a + (-a) = 0$.

De vermenigvuldiging in $\mathbb{Z}$ voldoet aan:

(Z4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt $ab = ba$;
(Z5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(Z6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;
(Z7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$;

De axioma's **(Z0)**–**(Z7)** drukken samen uit dat $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ een *ring* is. Ook de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$ vormen ringen. Maar $\mathbb{N}$ is geen ring want niet alle natuurlijke getallen hebben een additieve inverse in $\mathbb{N}$.

Om $\mathbb{Z}$ te karakteriseren hebben we nog drie axioma's nodig.

(Z8) als $A \subseteq \mathbb{Z}$ voldoet aan

(i) $0 \in A$ en $1 \in A$, en

(ii) als $a \in A$ dan $-a \in A$, en

(iii) als $a, b \in A$ dan $a + b \in A$,

dan $A = \mathbb{Z}$;

(Z9) de verzameling $\mathbb{Z}$ is niet eindig;

(Z10) voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ met $ab = 0$ geldt dat $a = 0$ of $b = 0$.

Men kan bewijzen dat de bovenstaande lijst eigenschappen het gegeven $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ uniek bepaalt, in dezelfde zin als we dat voor de natuurlijke getallen hebben gezien. Het is niet zo moeilijk te bewijzen dat ieder element van $\mathbb{Z}$ een eindige som van de vorm $1 + \cdots + 1$ is, of -1 maal zo'n som. Dus inderdaad is $\mathbb{Z}$ gelijk aan $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, en **(Z9)** impliceert dat de elementen $0, 1, 2, 3, \ldots$ verschillend zijn. We vinden dus $\mathbb{N}$ terug als deelverzameling van $\mathbb{Z}$, en men kan nagaan dat voor $n, m \in \mathbb{N}$ geldt dat $n +_{\mathbb{N}} m = n +_{\mathbb{Z}} m$ en $n \cdot_{\mathbb{N}} m = n \cdot_{\mathbb{Z}} m$. Later in het college zullen we een rigoureuze constructie geven van $\mathbb{Z}$, uitgaande van $\mathbb{N}$ (zie pagina 36).

Uit bovenstaande axioma's kunnen we alle gebruikelijke rekenregels voor gehele getallen afleiden.

II.2.2 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) Als $a + b = b$ dan $a = 0$;

(ii) $0 \cdot a = 0$;

Bewijs (i) Als $a + b = b$ dan geldt wegens **(Z2)** dat $a + b = 0 + b$ en wegens de schrappingswet volgt nu dat $a = 0$.

(ii) Wegens **(Z2)** geldt $0 + 1 = 1$, dus geldt ook $(0 + 1) \cdot a = 1 \cdot a$. Met de distributiviteit **(Z7)** leiden we af dat $0 \cdot a + 1 \cdot a = 1 \cdot a$, en wegens (i) volgt nu $0 \cdot a = 0$. ∎

Voor meer rekenregels, zie opgave II.2.1.

Aftrekken

De reden om $\mathbb{N}$ uit te breiden tot $\mathbb{Z}$ is dat we voor gehele getallen a en b nu het verschil kunnen definiëren als:

$$a - b = a + (-b).$$

We hebben hiermee een nieuwe operatie op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd, aftrekken:

$$-\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a - b.$$

Ongelijkheiden

We definiëren op $\mathbb{Z}$ een ongelijkheid $\leq$ als volgt: voor $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt $n \leq m$ dan en slechts dan als $m - n \in \mathbb{N}$. Uitgaande van $\leq$ kan men dan ook $<$, $>$ en $\geq$ definiëren.

Deelbaarheid

Zoals bekend is deling in $\mathbb{Z}$ niet altijd mogelijk: er is geen $x \in \mathbb{Z}$ die aan de vergelijking $5x = 13$ voldoet. Daarentegen heeft de vergelijking $2x = 6$ wel een oplossing binnen $\mathbb{Z}$: neem $x = 3$. Dit leidt tot de volgende definitie:

II.2.3 Definitie. Als de vergelijking $bx = a$ met $a, b \in \mathbb{Z}$ een oplossing $x \in \mathbb{Z}$ heeft dan zeggen we dat a *deelbaar is* door b of dat b een *deler* van a is en schrijven we $b \mid a$. Als b geen deler van a is schrijven we $b \nmid a$.

Delen met rest

Als a niet deelbaar is door b, en $b \neq 0$, dan kunnen we toch proberen a door b te delen, we houden dan wel een rest over.

II.2.4 Definitie. Voor a in $\mathbb{Z}$ definiëren we $|a|$ in $\mathbb{Z}$ door: $|a| = a$ als $a \geq 0$, en $|a| = -a$ als $a < 0$.

II.2.5 Stelling. Voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ met $b \neq 0$ bestaan unieke q en r in $\mathbb{Z}$ zó dat

$$a = q \cdot b + r \text{ en } 0 \leqslant r < |b|.$$

Het getal q heet het *quotiënt* en r heet de *rest* [1] bij deling van a door b. Als $r = 0$ dan schrijven we $q = a/b$.

Bewijs. Laat $a, b \in \mathbb{Z}$ met $b \neq 0$. We definiëren $A \subseteq \mathbb{N}$ door:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{ er is een } q \in \mathbb{Z} \text{ met } a = q \cdot b + n\}.$$

In Opgave II.2.9 wordt bewezen dat A niet leeg is (dit is duidelijk als $a \geq 0$, want $a = q{\cdot}0 + a$, dus $a \in A$). Volgens Stelling II.1.5 bevat A een kleinste element; we noemen het r.

We bewijzen dat $0 \leqslant r < |b|$. Neem eens aan dat $r \geqslant |b|$, dan is $s = r - |b| \in \mathbb{N}$ en a is te schrijven als

$$a = q \cdot b + r = q \cdot b + |b| + s = \begin{cases} (q+1) \cdot b + s & \text{als } b > 0 \\ (q-1) \cdot b + s & \text{als } b < 0. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $s \in A$ en omdat $s < r$ kregen we een tegenspraak met de minimaliteit van r.

Dat de getallen q en r uniek zijn wordt aangetoond in Opgave II.2.10. ∎

Merk op dat als bij deling van a door b de rest gelijk aan 0 is dan is a deelbaar door b, en omgekeerd, als $b \mid a$ en $b \neq 0$, dan is de rest bij deling van a door b gelijk aan nul.

II.2.6 Voorbeeld. Beschouw $a = -31$ en $b = 5$, dan geldt $-31 = -7 \cdot 5 + 4$; het quotiënt bij deling van -31 door 5 is $q = -7$ en de rest $r = 4$. En, bijvoorbeeld, $12 = (-2){\cdot}(-5) + 2$, dus quotiënt en rest bij deling van 12 door -5 zijn -2 en 2, respectievelijk.

II.2.7 Voorbeeld. Beschouw deling door 2; de verzameling $\mathbb{Z}$ valt dan in twee disjuncte deelverzamelingen uiteen: in de verzameling $2\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen die deelbaar door 2 zijn, en in de verzameling $2\mathbb{Z} + 1$ van alle gehele getallen die niet deelbaar door 2 zijn (en dus bij deling door 2 de rest 1 hebben)[2].

Analoog, bij deling door $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ valt $\mathbb{Z}$ in n disjuncte deelverzamelingen uiteen:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k=0}^{n-1} n\mathbb{Z} + k,$$

waarbij $n\mathbb{Z} + k$ de verzameling van alle gehele getallen is die bij deling door n de rest k hebben.

Priemgetallen

Een *priemgetal* is een natuurlijk getal $n > 1$ dat alléén 1 en zichzelf als positieve delers heeft. M.a.w., $n \in \mathbb{N}$ is priem precies dan als n precies twee delers heeft. Bijvoorbeeld 2 en 13 zijn priemgetallen maar 15 is geen priemgetal omdat $3 \mid 15$.

[1] De lezer wordt hierbij aangeraden over de hem/haar gebruikte programmeertalen na te gaan of deze definitie, toch echt de enige goede, ook daar van kracht is. Eén van de auteurs heeft eens een hoop tijd verloren doordat in Pascal de rest na deling van -7 door 5 gelijk bleek aan -2 in plaats van 3.

[2] Elementen van $2\mathbb{Z}$ heten *even* en elementen van $2\mathbb{Z} + 1$ heten *oneven* getallen.

II.2.8 Lemma. Elk natuurlijk getal groter dan 1 is deelbaar door een priemgetal.

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ en beschouw de verzameling

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n > 1 \text{ en } n \mid k\}.$$

Omdat $k > 1$ en $k \mid k$ is $k \in A$ en volgens Stelling II.1.5 bevat A een minimaal element m. Dan moet m een priemgetal zijn want anders is m te schrijven als $m = s \cdot t$ met $s > 1$ en $t > 1$. Hieruit volgt dat $s, t \in A$ en $s, t < m$ wat in tegenspraak is met de minimaliteit van m. ■

Als n een klein natuurlijk getal is dan is het niet moeilijk om na te gaan of n een priemgetal is: we kunnen bijvoorbeeld controleren dat geen natuurlijk getal kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{n}$ en groter dan 1 een deler is. Naarmate n groter is wordt het steeds moeilijker want zo'n controle kost, ook met 'supersnelle' computers, te veel tijd. Het komt daarom misschien als een verrassing dat het makkelijk te bewijzen is dat er oneindig veel priemgetallen bestaan.

II.2.9 Stelling. Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs. Neem aan dat $p_1, p_2, \ldots, p_N$ alle priemgetallen zijn. Beschouw het getal

$$K = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1.$$

We bewijzen eerst dat geen p_i, $i \leqslant N$ een deler van K is. Dit volgt uit het feit dat, voor elke i, de rest na deling van K door p_i gelijk is aan 1, en niet aan 0.

Omdat 2 één van de p_i is, geldt $K \geq 3$. Volgens Lemma II.2.8 is K deelbaar door een priemgetal p. Maar dan moet p ongelijk zijn aan elk van de p_i. Dit is een tegenspraak: we hebben aangenomen dat $p_1, p_2, \ldots, p_N$ *alle* priemgetallen waren. ■

Opgaven

1. Bewijs direct uit de axioma's voor $\mathbb{Z}$, dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt:

(a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$;

(b) $-0 = 0$;

(c) $-(ab) = (-a) \cdot b$;

(d) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

(e) $(-1) \cdot a = -a$;

(f) $-(-a) = a$.

2. Bewijs dat $1 \neq 0$. (Hint: gebruik axioma **(Z9)**).

3. Bewijs de multiplicatieve schrappingswet: als $a, b, c \in \mathbb{Z}$ en $c \neq 0$, en als $ac = bc$ dan $a = b$. (Hint: gebruik axioma **(Z10)**).

✯ **4.** Bewijs dat axioma **(Z10)** volgt uit de axioma's **(Z0)**–**(Z9)**.

5. Laat zien dat de verzameling $\mathbb{F}_2$ met twee verschillende elementen $\{0, 1\}$, en met de operaties $+$ en $\cdot$ gedefinieerd door $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ en $1 \cdot 1 = 1$ voldoet aan de axioma's **(Z0)**–**(Z8)** voor $\mathbb{Z}$.

6. Bewijs dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt

(a) als $a \mid b$ en $a \mid c$ dan $a \mid (b + c)$;

(b) als $a \mid b$ dan $ac \mid bc$;

(c) als $a \mid b$ dan $a \mid bc$;

(d) als $a \mid b$ en $b \mid c$ dan $a \mid c$.

☆ **7.** Bewijs dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt dat als $a \mid b$ en $b \mid a$ dan $a = \pm b$;

✍ **8.** Bewijs of weerleg: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt dat als $a \mid bc$, dan $a \mid b$ of $a \mid c$.

9. Bewijs, onder de aannamen van Stelling II.2.5, dat er een q in $\mathbb{Z}$ is met $a - qb \geq 0$.

✍ **10.** Bewijs dat de getallen q en r in Stelling II.2.5 uniek zijn.

✍ **11.** Laat a en b natuurlijke getallen zijn en neem aan dat $a = qb + r$ met $q, r \in \mathbb{Z}$ en $0 \leqslant r < b$. Vind het quotiënt en de rest bij deling van $-a$ door b en verklaar je antwoord.

12. Laat Ω een verzameling zijn, en R de verzameling van alle functies $f\colon \Omega \to \mathbb{F}_2$ (zie opgave II.2.5). Voor $f, g \in R$ definiëren we $f{+}g$ en fg in R door $(f{+}g)\colon x \mapsto f(x){+}g(x)$ en $fg\colon x \mapsto f(x)g(x)$. Voor iedere $A \subseteq \Omega$ definiëren we de *karakteristieke functie* 1_A van A door: $1_A(x) = 1$ als $x \in A$ en $1_A(x) = 0$ als $x \notin A$.

(a) Laat zien dat de afbeelding $\mathcal{P}(A) \to R$, $A \mapsto 1_A$ een bijectie is.

(b) Laat zien dat voor alle $A, B \in \mathcal{P}(A)$ geldt dat $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.

(c) Laat zien dat voor alle $A, B \in \mathcal{P}(A)$ geldt dat $1_A + 1_B = 1_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

(d) Laat zien dat voor alle $A, B \in \mathcal{P}(A)$ geldt dat $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B + 1_A 1_B$, en $1_{\Omega \setminus A} = 1_\Omega + 1_A$.

(e) Doe nu opnieuw de sommen in sectie I.2 waarin identiteiten tussen verzamelingen moeten worden bewezen, maar nu door te rekenen met de gebruikelijke regels voor optelling en vermenigvuldiging in R (merk op dat $f^2 = f$ voor alle f in R).

II.3 Equivalentierelaties en quotiënten

Een belangrijk begrip in de wiskunde is het begrip *relatie*. Een relatie op een verzameling is een verband tussen twee elementen uit die verzameling waarbij de volgorde in het algemeen van belang is: als we de relatie 'kleiner dan' op $\mathbb{R}$ beschouwen dan betekent $x < y$ iets anders dan $y < x$.

In het dagelijks leven komen relaties ook voor: twee mensen A en B kunnen bijvoorbeeld in relatie met elkaar zijn als 'A van B houdt'. Ook hier is de volgorde belangrijk; als A van B houdt hoeft B helemaal niet van A te houden.

We zullen nu het begrip relatie op een wiskundige manier formaliseren en de belangrijkste eigenschappen afleiden. We zullen ook een paar voorbeelden bestuderen die van belang in de wiskunde zijn.

Relaties

II.3.1 Definitie. Zij A een verzameling. Een *relatie* op A is een deelverzameling $\sim$ van het Cartesisch product $A \times A$.

We zeggen dat twee elementen a en b uit A in relatie $\sim$ zijn als $(a, b) \in \sim$. Notatie: $a \sim b$. We schrijven $a \not\sim b$ als $(a, b) \notin \sim$.

II.3.2 Voorbeeld. We bekijken de verzameling

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}.$$

Omdat $\sim$ een deelverzameling van het Cartesisch product $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is, is $\sim$ een relatie op $\mathbb{R}$. Blijkbaar $\sqrt{2} \sim 5$ want $\sqrt{2} < 5$, maar $2/3 \not\sim -\pi$ omdat $2/3 \not< -\pi$.

Het is gebruikelijk $x < y$ in plaats van $x \sim y$ te schrijven en we kunnen eenvoudig zeggen dat $\sim$ de relatie $<$ op $\mathbb{R}$ is. ▄

II.3.3 Voorbeeld. We beschouwen nu de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen. Het begrip 'deelbaarheid door 3' definieert een relatie op $\mathbb{Z}$: het getal a is in relatie met het getal b als hun verschil $a - b$ deelbaar is door 3. Deze relatie kunnen we $\sim$ noemen en we kunnen schrijven

$$a \sim b \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad 3 \mid (a - b).$$

Er geldt dus $14 \sim 5$ want $3 \mid 9 = (14 - 5)$, maar $14 \not\sim 6$ omdat $3 \nmid 8 = (14 - 6)$. ▄

Equivalentierelaties

Een van de relaties die we dagelijks tegenkomen is de gelijkheid $=$; zijn basiseigenschappen zijn in de volgende definitie beschreven. Relaties die aan deze eigenschappen voldoen zijn bijzonder belangrijk in de wiskunde want ze helpen ons verzamelingen in delen met onderling equivalente elementen te verdelen.

II.3.4 Definitie. Een relatie $\sim$ op een verzameling A heet een *equivalentierelatie* als zij aan de volgende eisen voldoet:

(i) $\sim$ is *reflexief*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x \in A \text{ geldt } x \sim x;$$

(ii) $\sim$ is *symmetrisch*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x, y \in A \text{ geldt } (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x);$$

(iii) $\sim$ is *transitief*, dat wil zeggen,

$$\text{voor alle } x, y, z \in A \text{ geldt } ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z).$$

II.3.5 Voorbeeld.

(i) We bewijzen dat de relatie $\sim$ uit Voorbeeld II.3.3 een equivalentierelatie is. Het is makkelijk in te zien dat $\sim$ reflexief is. Immers, voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $a - a = 0$ en $3 \mid 0$, dus $a \sim a$.
Neem nu aan dat $a \sim b$, dat wil zeggen, $3 \mid (a - b)$. Maar dan ook $3 \mid (b - a)$ en dus $b \sim a$. We hebben aangetoond dat $\sim$ symmetrisch is.
Om ook de transitiviteit te bewijzen laat $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zijn met $a \sim b$ en $b \sim c$. Dan $3 \mid (a - b)$ en $3 \mid (b - c)$, en omdat $(a - b) + (b - c) = a - c$ volgt er $3 \mid (a - c)$. Maar $3 \mid (a - c)$ betekent $a \sim c$; het bewijs is dus voltooid.

(ii) Een ander voorbeeld van een equivalentierelatie is 'gelijkheid' = (dit is eigenlijk een axioma uit de logica en verzamelingenleer).

(iii) De relatie $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ is geen equivalentierelatie. Zij is wel reflexief (voor elke x geldt $x \leqslant x$) en transitief (als $x \leqslant y$ en $y \leqslant z$ dan ook $x \leqslant z$) maar $\leqslant$ is niet symmetrisch: $2 \leqslant 3$ maar $3 \not\leqslant 2$.

Congruenties op $\mathbb{Z}$

We bestuderen nu speciale equivalentierelaties gedefinieerd op de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen, die we soms ook *congruentierelaties* noemen.

Analoog als in Voorbeeld II.3.5 kunnen we bewijzen dat, voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gegeven door 'het verschil van a en b is deelbaar door n' een equivalentierelatie is. Voor $n \neq 0$ hebben we al gezien dat deze relatie de verzameling $\mathbb{Z}$ in $|n|$ disjunctie deelverzamelingen opsplitst:

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k=0}^{|n|-1} k + n\mathbb{Z},$$

waarbij $n\mathbb{Z} + k$ de verzameling is van alle getallen die rest k hebben bij deling door n. We kunnen alle getallen die dezelfde rest hebben bij deling door n 'identificeren'; denk hierbij aan rekenen op de klok: tussen tijdstippen die 24 uur verschillen zie je geen verschil. Ook bij hoekmeting maken we vrijwel nooit verschil tussen hoeken die een veelvoud van 360 graden schelen.

II.3.6 Definitie. Zij $n \in \mathbb{Z}$. Twee gehele getallen k en l heten *congruent modulo* n als n het verschil $k - l$ deelt.
Notatie: $k \equiv l \pmod{n}$.

II.3.7 Voorbeeld. Voor $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt $n \equiv m \pmod 2$ precies dan als n en m beide even zijn, of beide oneven.

Equivalentie-klassen

Een equivalentierelatie op een verzameling verdeelt die verzameling in disjuncte deelverzamelingen, zoals we hierboven hebben gezien voor de congruentie relatie 'mod n' op $\mathbb{Z}$.

II.3.8 Definitie. Laat A een verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor $x \in A$ heet de verzameling $\overline{x} = \{y \in A : y \sim x\}$ de *equivalentieklasse* van x, voor $\sim$.

Als nodig zullen we de equivalentierelatie ook in deze notatie '$\overline{x}$' betrekken. Een equivalentieklasse is per definitie niet leeg.

II.3.9 Voorbeeld. Laat $n \in \mathbb{Z}$. Laat x in $\mathbb{Z}$. De equivalentieklasse van x voor de equivalentierelatie 'mod n' is

$$\overline{x} = \{x + nk : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Als de afhankelijkheid van n expliciet moet worden aangegeven schrijven we $\overline{x}_n$ voor de equivalentieklasse van x.

II.3.10 Stelling. Laat A een verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle $x, y \in A$ geldt:

$$x \sim y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}, \quad x \not\sim y \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$$

De verzameling A is dus de disjuncte vereniging van zijn equivalentieklassen, ofwel: A is gepartitioneerd door de equivalentieklassen.

Bewijs. Laat x en y in A zijn. Stel dat $x \sim y$. Voor iedere $z \in \overline{x}$ geldt per definitie dat $z \sim x$, en dus dat $z \sim y$ vanwege de transitiviteit van $\sim$. Dus geldt dat $\overline{x} \subset \overline{y}$. Maar dan geldt net zo goed dat $\overline{y} \subset \overline{x}$, want de situatie is symmetrisch in x en y (symmetrie van $\sim$) en dus dat $\overline{x} = \overline{y}$.

Stel nu dat $\overline{x} = \overline{y}$. Natuurlijk geldt dat $x \in \overline{x}$ (reflexiviteit), en dus $x \in \overline{y}$, en dus ook dat $x \sim y$. De eerste equivalentie is nu bewezen.

Stel nu dat $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Dan is x geen element van $\overline{y}$, en dus $x \not\sim y$. Als daarentegen $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$, dan neem $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ en constateer dat $z \sim x$, en dus ook $x \sim z$, en $z \sim y$, en dus (transitiviteit) $x \sim y$. ∎

Quotiëntafbeelding

Het belangrijkste wat met een equivalentierelatie $\sim$ op een verzameling X gedaan kan worden is het vormen van een quotiëntafbeelding. In Opgave II.3.7 zien we dat voor $f\colon A \to B$ een afbeelding de relatie $\sim$ op A gegeven door $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ een equivalentierelatie is. We kunnen ons nu afvragen of er, omgekeerd, voor iedere equivalentierelatie er zo'n afbeelding is, en hoe uniek zo'n afbeelding is. De volgende definitie en stelling maken dit alles duidelijk.

II.3.11 Definitie. Zij A een verzameling, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Zij B een verzameling. Een afbeelding $q\colon A \to B$ heet een *quotiënt* voor $\sim$ als:

1. q is surjectief;
2. voor alle $x, y \in A$ geldt $x \sim y \Leftrightarrow q(x) = q(y)$.

II.3.12 Stelling. Zij A een verzameling, en $\sim$ een equivalentierelatie op A.

1. Laat $A/{\sim} = \{\overline{x} : x \in A\}$, en laat $q\colon A \to A/{\sim}$ gegeven zijn door $q(x) = \overline{x}$. Dan is q een quotiëntafbeelding.
2. Laat $q\colon A \to B$ en $q'\colon A \to B'$ quotiëntafbeeldingen zijn. Dan is er een unieke afbeelding $f\colon B \to B'$ met $q' = f \circ q$. Deze afbeelding f is een bijectie.

Bewijs. 1. Elk element van $A/{\sim}$ is van de vorm $\overline{x}$ voor een zekere $x \in A$, maar $q(x) = \overline{x}$ dus q is surjectief. Zij nu aan dat $x, y \in A$. Als $x \sim y$ dan geldt wegens Stelling II.3.10 dat $\overline{x} = \overline{y}$ en dus $q(x) = q(y)$. Omgekeerd, als $q(x) = q(y)$ dan geldt $\overline{x} = \overline{y}$ en met Stelling II.3.10 dus $x \sim y$.

2. Laat $q\colon A \to B$ en $q'\colon A \to B'$ quotiëntafbeeldingen zijn. Laat

$$f = \{(q(x), q'(x)) : x \in A\} \subseteq B \times B'.$$

We bewijzen nu eerst dat f de grafiek van een functie van B naar B' is. Laat $b \in B$. Neem een $x \in A$ met $q(x) = b$ (surjectiviteit van q). Dan $(b, q'(x)) \in f$, dus er is minstens één $b' \in B'$ zodat $(b, b') \in f$. Stel nu dat (b, b'_1) en (b, b'_2) allebei in f zitten. Neem $x_1 \in A$ en $x_2 \in A$ met $(b, b'_1) = (q(x_1), q'(x_1))$ en $(b, b'_2) = (q(x_2), q'(x_2))$ (gebruik de definitie van f). Dan geldt $q(x_1) = b = q(x_2)$, en dus $x_1 \sim x_2$ (want q is een quotiëntafbeelding). Maar dan geldt ook dat $b'_1 = q'(x_1) = q'(x_2) = b'_2$, want q' is ook een quotiëntafbeelding. Vanwege de symmetrie in de situatie is f ook de grafiek van een functie van B' naar B, en dus de grafiek van een bijectie. Voor $x \in A$ geldt dan dat $f(q(x)) = q'(x)$, want $(q(x), q'(x)) \in f$. Omdat q een surjectie is, kan er hoogstens één $f\colon B \to B'$ zijn met $f \circ q = q'$. ∎

II.3.13 Opmerking. Onderdeel 1 van de bovenstaande stelling zegt dat alle quotiëntafbeeldingen voor een vaste equivalentierelatie alleen op een administratieve wijze verschillen. Iedereen kan zijn/haar eigen favoriete quotiëntafbeeldingen kiezen. Laten we dit illustreren met een flauw voorbeeld. Laat $\sim$ de equivalentierelatie 'mod 0' op $\mathbb{Z}$ zijn. Dan is $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ een quotiënt, maar ook $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\!\sim$, met $\mathbb{Z}/\!\sim = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$, en $q\colon x \mapsto \{x\}$.

Een belangrijke toepassing van quotiënten naar equivalentierelaties is het construeren van $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$, waarbij men dan uit de axioma's voor $\mathbb{N}$ die van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ kan bewijzen. Het mooie van dit alles is dat we, voor het werken met $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ alleen nog maar hoeven te geloven in de axioma's van verzamelingentheorie (ZFC, zie Appendix X.1); het bestaan van $\mathbb{N}$ (zie Appendix X.2), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ volgt daar dan uit. We schetsen hier kort de constructie van $\mathbb{Z}$. We geven hieronder geen details, maar de lezer wordt dringend verzocht er minstens een paar in detail na te gaan.

Constructie van $\mathbb{Z}$

De axioma's voor $\mathbb{Z}$ impliceren dat ieder element van $\mathbb{Z}$ van de vorm $a - b$ is, met $a, b \in \mathbb{N}$. Bovendien geldt voor $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$, dat

$$a - b = a' - b' \quad (\text{in } \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b \quad (\text{in } \mathbb{N}).$$

Met andere woorden, de afbeelding

$$q\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}, \text{ met } q(a, b) = a - b$$

is een quotiëntafbeelding voor de volgende equivalentierelatie op $\mathbb{N}^2$:

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b.$$

Dit suggereert dat we $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$ kunnen *construeren* als $\mathbb{N}^2/\!\sim$. Het is inderdaad mogelijk om uit de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$ een optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{N}^2/\!\sim$ te definiëren zodat

$$(\mathbb{N}^2/\!\sim, \overline{(0,0)}, \overline{(1,0)}, +, \cdot)$$

voldoet aan alle axioma's **(Z0)**–**(Z10)**.

Opgaven

1. Beschouw de volgende relaties op de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen:

$$a \mid b \qquad \text{en} \qquad a^2 + a = b^2 + b.$$

Welke van deze twee relaties is
(a) reflexief,
(b) symmetrisch,
(c) transitief?

2. Laat, voor $n \in \mathbb{N}$, $E(n)$ het aantal equivalentierelaties zijn op $\{a \in \mathbb{N} : a < n\}$. Bereken $E(n)$ voor $0 \le n \le 4$.

3. Bewijs uit de axioma's voor $\mathbb{N}$ dat de relatie

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b$$

op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ een equivalentierelatie is.

4. Zij $\sim$ de relatie op $\mathbb{Z}$ gedefinieerd door $x \sim y$ dan en slechts dan als $x - y$ een veelvoud van 7 is. Is $\sim$ een equivalentierelatie?

5. Zij A een verzameling. Welke van de volgende relaties op $\mathcal{P}(A)$ zijn reflexief, symmetrisch of transitief?

(a) V en W zijn gelijkmachtig,

(b) $V \subseteq W$,

(c) $V \cup W = A$.

6. Laat zien dat de relatie $\sim$ gedefinieerd op $\mathbb{R}$ door

$$x \sim y \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad |x| = |y|$$

een equivalentierelatie is.

7. Laat A en B verzamelingen zijn, en $f\colon A \to B$ een afbeelding. Bewijs dat de relatie $\sim$ op A gegeven door: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ een equivalentierelatie is.

II.4 Rationale getallen

We geven axioma's voor $\mathbb{Q}$ en beschrijven kort een constructie van $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$.

Axioma's voor $\mathbb{Q}$

De *gegevens* zijn:

(a) een verzameling $\mathbb{Q}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{Q}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, de optelling;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, de vermenigvuldiging.

De optelling voldoet aan dezelfde eigenschappen als de optelling in $\mathbb{Z}$:

(Q0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$ geldt $a + b = b + a$;
(Q1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(Q2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{Q}$ geldt $0 + a = a$ en $a + 0 = a$;
(Q3) additieve inversen bestaan: voor alle $a \in \mathbb{Q}$ bestaat er een $b \in \mathbb{Q}$ zodat $a + b = 0$.

Op dezelfde wijze als voor $\mathbb{Z}$ kunnen we hieruit de additieve schrappingswet afleiden.

II.4.1 Propositie (Additieve schrappingswet in $\mathbb{Q}$)**.** Zij $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Als $a+c = b+c$ dan $a = b$.

Opnieuw volgt hieruit dat de additieve inversen uniek zijn, en we zullen de additieve inverse van $a \in \mathbb{Q}$ met $-a$ noteren.

De vermenigvuldiging voldoet aan de volgende eigenschappen

(Q4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$ geldt $ab = ba$;
(Q5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(Q6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{Q}$ geldt $1{\cdot}a = a$ en $a{\cdot}1 = a$;
(Q7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$;

met ander woorden $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ is een ring. Het volgende axioma drukt uit dat we in $\mathbb{Q}$ ook kunnen delen (door elementen verschillend van 0):

(Q8) multiplicatieve inversen bestaan: voor alle $a \in \mathbb{Q}$ met $a \neq 0$ bestaat er een $b \in \mathbb{Q}$ zodat $ab = 1$.

Met kan bewijzen dat multiplicatieve inversen uniek zijn, en we zullen de multiplicatieve inverse van a met $1/a$ of met a^{-1} noteren.

Totnogtoe voldoet ook bijvoorbeeld $\mathbb{R}$ aan de axioma's. Om $\mathbb{Q}$ te karakteriseren hebben we nog twee axioma's nodig.

(Q9) als $A \subseteq \mathbb{Q}$ voldoet aan
(i) $0 \in A$ en $1 \in A$, en
(ii) als $a \in A$ dan $-a \in A$, en
(iii) als $a \in A$ met $a \neq 0$ dan $1/a \in A$, en
(iv) als $a, b \in A$ dan $a + b \in A$ en $ab \in A$;
dan $A = \mathbb{Q}$;
(Q10) de verzameling $\mathbb{Q}$ is niet eindig.

Men kan bewijzen dat de bovenstaande lijst eigenschappen het gegeven $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ uniek bepaalt, in dezelfde zin als we dat voor de natuurlijke getallen hebben gezien.

Delen

De reden om $\mathbb{Z}$ uit te breiden tot $\mathbb{Q}$ is dat we voor rationale getallen a en b met $b \neq 0$ nu ook het quotiënt van a en b kunnen definieren:

$$a/b = a \cdot (1/b).$$

We hebben hiermee een nieuwe operatie op $\mathbb{Q}$ gedefinieerd, delen:

$$/ \colon \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}\backslash\{0\}) \to \mathbb{Q}, \quad (a,b) \mapsto a/b.$$

Constructie van $\mathbb{Q}$

De axioma's voor $\mathbb{Q}$ impliceren dat ieder element van $\mathbb{Q}$ van de vorm a/b is, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$. Bovendien geldt voor $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ met $b \neq 0$ en $b' \neq 0$, dat

$$a/b = a'/b' \quad (\text{in } \mathbb{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad ab' = a'b \quad (\text{in } \mathbb{Z}).$$

Met andere woorden, de afbeelding $q \colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ met $q(a,b) = a/b$ is een quotiëntafbeelding voor de equivalentierelatie

$$(a,b) \sim (a',b') \quad \Leftrightarrow \quad ab' = a'b.$$

Dit propositie suggereert dat we $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$ kunnen *construeren* als $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$. Het is inderdaad mogelijk om uit de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{Z}$ een optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$ te definiëren zodat

$$(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim, \overline{(0,1)}, \overline{(1,1)}, +, \cdot)$$

voldoet aan alle axioma's **(Q0)**–**(Q10)**.

$\sqrt{2}$

Het reële getal $\sqrt{2}$ is niet rationaal, nauwkeuriger:

II.4.2 Stelling. Er is geen $x \in \mathbb{Q}$ met $x^2 = 2$.

Bewijs. Stel dat er een $x \in \mathbb{Q}$ is met $x^2 = 2$. Dan zijn er $a, b \in \mathbb{Z}$, met $b \neq 0$ zodat $x = a/b$ en geldt dus

$$a^2 = 2b^2.$$

We mogen aannemen dat $b > 0$ en dat b de kleinst mogelijke noemer is. Merk op dat a noodzakelijk even is, immers als a oneven is dan is ook a^2 oneven, maar $2b^2$ is even. Er is dus een $a' \in \mathbb{Z}$ met $a = 2a'$. Invullen in de bovenstaande identiteit levert dan $4a'^2 = 2b^2$ en dus

$$b^2 = 2a'^2.$$

Op dezelfde manier volgt nu dat $b = 2b'$ voor een $b' \in \mathbb{Z}$, en we vinden een oplossing a'/b' met een kleinere noemer, een tegenspraak. ■

We zullen later bewijzen dat de vergelijking $x^2 = 2$ wel degelijk een oplossing heeft in $\mathbb{R}$. Een reëel getal dat niet rationaal is heet *irrationaal.*

Opgaven

1. Bewijs uit de axioma's voor $\mathbb{Z}$ dat de relatie

$$(a,b) \sim (a',b') \quad \Leftrightarrow \quad ab' = a'b$$

op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ een equivalentierelatie is.

2. Bewijs dat er geen $x \in \mathbb{Q}$ is zodat $x^2 = 3$.

3. Bewijs dat $\mathbb{F}_2$ (zie opgave II.2.5) voldoet aan axioma's **(Q0)**–**(Q9)**, maar niet aan **(Q10)**.

III DE REËLE GETALLEN

III.1 Algebraïsche structuur van reële getallen

We vervolgen onze axiomatische karakterisering van getalsystemen. Nu zijn de reële getallen aan de beurt, met de operaties van optelling en vermenigvuldiging, en de ordeningsrelatie. De axioma's geven we in drie delen, waarvan de eerste twee in deze sectie. Alle axioma's samen karakteriseren de reële getallen met hun optelling, vermenigvuldiging en ordening. Een constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$ zullen we later nog schetsen.

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 1

We geven nu een aantal gegevens en axioma's voor $\mathbb{R}$, de verzameling van reële getallen, met optelling en vermenigvuldiging. De gegevens zijn:

(a) een verzameling $\mathbb{R}$;
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{R}$;
(c) een afbeelding $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
(d) een afbeelding $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
(e) een relatie $>$ op $\mathbb{R}$.

In deze paragraaf zullen we enkel de axioma's voor de optelling en vermenigvuldiging beschouwen, en in de volgende twee paragrafen zullen we de axioma's voor de relatie $>$ geven.

De eerste 9 axioma's zijn identiek aan die voor $\mathbb{Q}$. De optelling voldoet aan

(R0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a + b = b + a$;
(R1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$;
(R2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $0 + a = a$;
(R3) additieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $a + b = 0$;

Met hetzelfde argument als voor $\mathbb{Z}$ kunnen we opnieuw bewijzen dat de additieve inverse van $a \in \mathbb{R}$ uniek is, en we noteren deze met $-a$. De vermenigvuldiging voldoet aan:

(R4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $ab = ba$;
(R5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
(R6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $1 \cdot a = a$ en $a \cdot 1 = a$;
(R7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $a(b+c) = ab+ac$;
(R8) multiplicatieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$;

Verder moeten we nog eisen

(R9) $0 \neq 1$;

De axioma's **(R0)**–**(R9)** drukken uit dat $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ een *lichaam* is. Ook $\mathbb{Q}$ is een lichaam, maar $\mathbb{Z}$ is geen lichaam want bijvoorbeeld $2 \in \mathbb{Z}$ heeft geen multiplicatieve inverse.

Multiplicatieve inversen in $\mathbb{R}$ zijn uniek:

III.1.1 Propositie. Als $a, b, b' \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$ en $ab' = 1$, dan $b = b'$.

Bewijs. Er geldt wegens **(R6)** en $ab' = 1$ dat geldt $b = (ab')b$. Analoog geldt ook $b' = (ab)b'$. Uit **(R4)** en **(R5)** volgt dat $(ab')b = (ab)b'$, en bijgevolg geldt $b = b'$. ∎

We zullen de multiplicatieve inverse van $a \in \mathbb{R}$ (met $a \neq 0$) als $1/a$ of als a^{-1} noteren.

Als gevolg van het bestaan van multiplicatieve inversen vinden we ook een multiplicatieve schrappingswet:

III.1.2 Propositie. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $c \neq 0$. Als $ac = bc$ dan geldt $a = b$.

Bewijs. Neem aan dat $ac = bc$. Zij c^{-1} de multiplicatieve inverse van c. Er geldt dan

$$a = a \cdot 1 = a(cc^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b(cc^{-1}) = b,$$

waar we naast de definitie van c^{-1} enkel axioma's **(R5)** en **(R6)** gebruikt hebben. ∎

Net als in $\mathbb{Z}$ kunnen we nu ook voor $a, b \in \mathbb{R}$ het verschil definiëren: $a - b = a + (-b)$, en, als $b \neq 0$, het quotiënt $a/b = a \cdot b^{-1}$.

Uit de axioma's **(R0)**–**(R9)** kunnen we alle bekende rekenregels voor de reële getallen met optellen, vermenigvuldigen en delen afleiden; zie Opgaven III.1.3 en III.1.4 voor een aantal daarvan.

Er is, vanwege Stelling X.3.1, een unieke afbeelding $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 0$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = 1 + f(n)$. Deze afbeelding is injectief (Opgave III.1.6). Dan is er een unieke uitbreiding van f tot $\mathbb{Z}$ met de eigenschap dat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt: $f(a - b) = f(a) - f(b)$; deze uitbreiding is ook injectief. Tenslotte kunnen we f uniek voortzetten tot $\mathbb{Q}$, met de eigenschap dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ met $b \neq 0$ geldt: $f(a/b) = f(a)/f(b)$, en deze uitbreiding is ook injectief. Via deze $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vatten we $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ op als deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Opgaven

1. Bewijs de additieve schrapwet in $\mathbb{R}$: als $x, y, z \in \mathbb{R}$ met $x + y = x + z$ dan geldt $y = z$.

2. Bewijs dat de additieve inverse van een $x \in \mathbb{R}$ uniek is.

3. Bewijs slechts met behulp van de basiseigenschappen **(R0)** t/m **(R8)** de volgende rekenregels voor de reële getallen: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt

(a) $-(-a) = a$;

(b) $a \cdot 0 = 0$;

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

(d) als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan is $a \cdot b \neq 0$;

(e) als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan geldt $(b \cdot a)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$;

(f) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$;

(g) als $a^2 = b^2$ dan is $a = b$ of $a = -b$.

4. Bewijs slechts met behulp van de basiseigenschappen **(R0)** t/m **(R8)** dat voor alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

(a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

(b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{d} = \dfrac{a}{bd}$;

(c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$;

(d) $\dfrac{a}{b/d} = \dfrac{ad}{b}$.

5. Bewijs de volgende beweringen:

(a) Elke vergelijking $a + x = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ heeft precies één oplossing in $\mathbb{R}$.

(b) Elke vergelijking $ax = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft precies één oplossing in $\mathbb{R}$.

✍ **6.** Laat zien dat de afbeelding $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 0$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = 1 + f(n)$, injectief is.

III.2 De ordening op $\mathbb{R}$ en ongelijkheden

In de vorige paragraaf hebben we axioma's gegeven voor de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$, maar om $\mathbb{R}$ vast te leggen moeten we ook ongelijkheden in $\mathbb{R}$ beschouwen. In deze paragraaf beschrijven we de elementaire eigenschappen van de relatie $<$ op $\mathbb{R}$.

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 2

De relatie $>$ op $\mathbb{R}$ voldoet aan volgende axioma's:

(R10) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende drie gevallen: $a = b$, òf $a > b$, òf $b > a$;
(R11) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: als $a > 0$ en $b > 0$, dan $a + b > 0$ en $ab > 0$;
(R12) Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: $a > b$ dan en slechts dan als $a - b > 0$.

De axioma's **(R0)**–**(R12)** drukken uit dat $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, >)$ een *geordend lichaam* is.

Als $a > 0$ noemen we a positief , en we schrijven $\mathbb{R}_{>0}$ voor de verzameling van positieve reële getallen.

We definiëren de relatie $<$ op $\mathbb{R}$ als volgt: voor a en b in $\mathbb{R}$ geldt: $a < b \Leftrightarrow b > a$.

Als $a < 0$ noemen we a negatief.

We gebruiken $a \geqslant b$ als een afkorting van "$a > b$ of $a = b$" en zeggen dat a groter dan of gelijk aan b is; analoog definiëren we $a < b$ en $a \leqslant b$.

Merk op dat uit de axioma's volgt dat $<$ transitief is:

III.2.1 Propositie (transitiviteit van $>$)**.** Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt: als $x > y$ en $y > z$ dan $x > z$.

Bewijs. Stel dat $x > y$ en $y > z$. Wegens **(R12)** geldt dan dat $x - y > 0$ en $y - z > 0$. Dus met **(R11)** volgt dat $(x - y) + (y - z) > 0$, en dus $x - z > 0$. Nogmaals toepassen van **(R12)** geeft dan $x > z$. ■

III.2.2 Gevolg. $\leq$, $<$, $\geq$ zijn transitief.

Wegens de transitiviteit mogen we voortaan $x < y < z$ schrijven indien $x < y$ en $y < z$, en mogen we hieruit ook concluderen dat $x < z$.

III.2.3 Propositie. $1 > 0$.

Bewijs. Wegens **(R9)** geldt $1 \neq 0$, dus uit **(R10)** halen we dat ofwel $1 > 0$ ofwel $1 < 0$. Als $1 > 0$ valt er niks te bewijzen. Neem dus aan dat geldt $1 < 0$. Dan volgt uit **(R12)** dat $-1 > 0$, en uit **(R11)** dat $(-1)(-1) > 0$. Maar we hebben $1 = (-1)(-1)$, dus $1 > 0$. ■

III.2.4 Propositie. Voor alle $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ geldt

(i) als $x < y$ dan $x + z < y + z$;
(ii) als $x < y$ en $z < t$ dan $x + z < y + t$;
(iii) als $x < y$ en $z > 0$ dan $x \cdot z < y \cdot z$;
(iv) als $x < y$ en $z < 0$ dan $x \cdot z > y \cdot z$;
(v) als $x > 0$ dan $1/x > 0$.
(vi) als $x > y > 0$ dan $1/y > 1/x$.

Bewijs. We bewijzen hier enkel (i) en (iii), voor de overige delen, zie Opgave III.2.3.

(i) Neem aan dat $x < y$. Wegens **(R12)** geldt dan $y - x > 0$, en dus ook $(y + z) - (z + x) > 0$. Nogmaals **(R12)** toepassen levert $y + z > x + z$, wat we moesten bewijzen.

(iii) Neem aan dat $x < y$ en $z > 0$. Met **(R12)** volgt dat $y - x > 0$ en met **(R11)** dat $z(y - x) > 0$. Dus $zy - zx > 0$, en met **(R12)** concluderen we dat $zy > zx$. ∎

III.2.5 Propositie. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0 \text{ en } y > 0) \text{ of } (x < 0 \text{ en } y < 0)$$

en

$$xy < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x < 0 \text{ en } y > 0) \text{ of } (x > 0 \text{ en } y < 0).$$

In het bijzonder is $x^2 > 0$ als $x \neq 0$.

Bewijs. Opgave III.2.4. ∎

Tenslotte voldoet de ordening aan het volgende axioma.

(R13) (Archimedische eigenschap) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is er een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$.

Dit heeft als gevolg dat tussen elk paar verschillende reëele getallen een rationaal getal ligt!

III.2.6 Stelling. Zij $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$. Dan bestaat er een $q \in \mathbb{Q}$ met $x < q < y$.

Voor het bewijs, zie Opgave III.2.7.

III.2.7 Opmerking. Men kan nagaan dat de ongelijkheid op $\mathbb{R}$ overeenkomt met de ongelijkheid op $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ gedefinieerd in II.1.

Ongelijkheid van Bernoulli

De volgende ongelijkheid is soms erg nuttig.

III.2.8 Stelling (Ongelijkheid van Bernoulli)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq -1$. Dan geldt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Voor het bewijs, zie Opgave III.2.6.

Absolute waarde

Iedere eindige niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een maximum. In het bijzonder definiëren we, voor iedere $x \in \mathbb{R}$, de *absolute waarde* van x door

$$|x| = x \text{ als } x \geq 0, \text{ en } |x| = -x \text{ als } x < 0.$$

III.2.9 Propositie. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Bewijs. Ofwel geldt $x \geq 0$ ofwel $x < 0$. We beschouwen beide gevallen afzonderlijk.

In het eerste geval geldt $|x| = x$ en omdat $x \geq -x$ ook $\max\{-x, x\} = x$, dus de propositie geldt. In het tweede geval geldt $|x| = -x$ en omdat nu geldt $-x > x$ geldt ook $\max\{-x, x\} = -x$, wat we moesten bewijzen. ∎

III.2.10 Voorbeeld. We zoeken alle oplossingen in $\mathbb{R}$ van de ongelijkheid

$$|x+2| + |x-5| + 2x > |x|$$

Voor $x \leq -2$ geldt $|x+2| = -(x+2)$, en voor $x \geq -2$ geldt $|x+2| = x+2$, en natuurlijk gedragen $|x-5|$ en $|x|$ zich analoog in 5 en 0, respectievelijk. We verdelen daarom de reële rechte in vier intervallen: $(-\infty, -2)$, $[-2, 0)$, $[0, 5)$ en $[5, \infty)$, en lossen de ongelijkheid op elk interval apart.

Als $x \in (-\infty, -2)$ dan is $|x+2| = -x-2$, $|x-5| = -x+5$ en $|x| = -x$ en na invullen en vereenvoudigen krijgen we

$$x > -3.$$

Hieruit volgt dat op $(-\infty, -2)$ de oplossing is het interval $(-\infty, -2) \cap (-3, \infty)$, hetgeen gelijk is aan $(-3, -2)$.

Analoog (zie Opgave III.2.9) vinden we dat de oplossingen op $[-2, 0)$ het hele interval $[-2, 0)$ is, op $[0, 5)$ weer het hele interval $[0, 5)$ en op $[5, \infty)$ ook het hele interval $[5, \infty)$. De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dan

$$(-3, -2) \cup [-2, 0) \cup [0, 5) \cup [5, \infty) = (-3, \infty).$$

■

Driehoeks-ongelijkheid

De volgende ongelijkheid beschrijft een van de belangrijkste eigenschappen van de absolute waarde.

III.2.11 Stelling (Driehoeksongelijkheid)**.** Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Bewijs. Uit Propositie III.2.9 volgt dat $-x \leqslant |x|$ en $-y \leqslant |y|$, zodat

$$-x - y \leqslant |x| + |y|.$$

Uit Propositie III.2.9 volgt eveneens dat $x \leqslant |x|$ en $y \leqslant |y|$, zodat

$$x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Omdat of wel $|x+y| = x+y$ ofwel $|x+y| = -x-y$, concluderen we dat in elk geval $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. ■

III.2.12 Gevolg (Omgekeerde driehoeksongelijkheid)**.** Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Bewijs. Opgave III.2.13 ■

III.2.13 Opmerking. Als x en y reële getallen zijn dan stelt $|y - x|$ de afstand van x naar y op de reële rechte voor. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat de afstand tussen twee reële getallen niet groter kan zijn dan de som van hun absolute waarden. De naam 'driehoeksongelijkheid' heeft meer te maken met afstanden in $\mathbb{R}^2$ of in $\mathbb{C}$, waar ze ook geldt, en waar ze echt met driehoeken te maken heeft.

Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat een product van twee getallen — bij vaste som — maximaal is als de factoren even groot zijn, en een som van twee niet-negatieve getallen minimaal — bij vast product — als de termen even groot zijn, zie Opgave III.2.15 en Opgave III.2.16.

De vraag is nu of dit verschijnsel zich voortzet: Is het product van n getallen — bij vaste som — maximaal als alle factoren even groot zijn? Is de som van n niet-negatieve getallen — bij vast product — minimaal als alle termen even groot zijn?

Het antwoord wordt gegeven door de volgende stelling. In deze stelling komen n-de wortels van reële getallen $x \geq 0$ voor; deze worden in de volgende paragraaf, in Opgave III.3.16 gedefinieerd.

III.2.14 Stelling (Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde)**.** Laat n een positief natuurlijk getal zijn. Dan geldt voor elk n-tal niet-negatieve reële getallen a_1, a_2, ..., a_n de volgende ongelijkheid

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

met gelijkheid dan en slechts dan als $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bewijs. Opgave III.2.19[1]. ■

III.2.15 Opmerking. Het getal $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ heet het *rekenkundig gemiddelde* van het n-tal a_1, a_2, ..., a_n, en het getal $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ heet het *meetkundig gemiddelde* van het n-tal a_1, a_2, ..., a_n.

Opgaven

1. Bewijs Propositie III.2.4, (i)–(iv).

2. Bewijs dat $-1 < 0$.

3. Bewijs Propositie III.2.4, (v)–(vi).

4. Bewijs Propositie III.2.5.

5. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $x \leq y$ dan en slechts dan als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt $x < y + \varepsilon$.

✍ **6.** Bewijs Stelling III.2.8. *Aanwijzing:* Gebruik inductie naar n.

☆✍ **7.** Bewijs dat tussen elk paar reële getallen $x < y$ een rationaal getal ligt.

✍ **8.** Vind alle oplossingen van de volgende ongelijkheden:
(a) $(x+1)(1-2x) > (x+1)$ met $x \in \mathbb{R}$;

[1] Een meer conceptueel bewijs kan gegeven worden door te gebruiken dat de functie $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ convex is. Deze convexiteit betekent dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ met $x < y$ het lijnstuk tussen de punten $(x, \ln x)$ en $(y, \ln y)$ onder de grafiek van ln ligt. Deze eigenschap volgt uit het negatief zijn van de tweede afgeleide van ln. De bovengenoemde opgave geeft een eenvoudiger bewijs.
Voor de functie ln wordt soms ook de notatie log gebruikt.

(b) $\dfrac{(x+1)^2}{x(x+2)} \geqslant 0$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$;

(c) $4 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(d) $x < \dfrac{2x-1}{x}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(e) $\dfrac{1}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{2+x}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

9. Vul alle details van Voorbeeld III.2.10 in.

10. Los de volgende ongelijkheden op:

(a) $|2x-3| + |2-3x| \geqslant x - |x+5|$ met $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\dfrac{|x-1|}{x+1} < \dfrac{x+2}{|x-4|}$ met $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$;

(c) $|x^2 + 3x - 10| \leqslant 0$ met $x \in \mathbb{R}$;

11. Zij $x, y, t \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $|x-y| \leq |x-t| + |t-y|$.

12. Toon aan dat dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|x^n| = |x|^n$.

✍**13.** Bewijs Gevolg III.2.12.

14. Zij $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Bewijs met volledige inductie dat

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_i\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i|\,.$$

15. Laat zien dat voor alle reële getallen x, y en c geldt: Het maximum van xy onder de voorwaarde dat $x + y = c$ wordt aangenomen als $x = y$ en dat maximum is gelijk aan $c^2/4$. [2]

16. Laat zien dat voor alle positieve reële getallen x, y en c geldt: Het minimum van $x + y$ onder de voorwaarde dat $xy = c$ wordt aangenomen als $x = y$ en dat minimum is gelijk aan $2\sqrt{c}$.

17. Welk getal overschrijdt zijn kwadraat met het grootste bedrag?

18. Bewijs dat voor elk positief reëel getal a geldt

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Voor welke a geldt gelijkheid?

✯**19.** Bewijs Stelling III.2.14.

(a) Laat a en b twee positieve reële getallen zijn. Toon aan

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Toon aan: als $a \neq b$ dan $ab < ((a+b)/2)^2$.

[2]Meetkundig betekent dit dat bij gegeven omtrek, de oppervlakte van een rechthoek maximaal is als de rechthoek een vierkant is.

(b) Bewijs nu de ongelijkheid van Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde voor twee getallen a_1 en a_2.

(c) Bewijs de ongelijkheid voor vier getallen a_1, a_2, a_3 en a_4. Hint: pas het geval $n = 2$ toe op het paar a_1 en a_2, het paar a_3 en a_4, en het paar $(a_1 + a_2)/2$ en $(a_3 + a_4)/2$

(d) Bewijs de ongelijkheid voor drie getallen a_1, a_2 en a_3. Hint: definiëer eerst $a_4 = (a_1 + a_2 + a_3)/3$ en pas dan het geval $n = 4$ toe.

(e) Bewijs, met volledige inductie naar n, de ongelijkheid voor 2^n getallen a_1, a_2, ..., a_{2^n}.

(f) Bewijs: als de ongelijkheid voor n getallen geldt dan geldt hij ook voor $n-1$ getallen.

(g) Bewijs de Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde.

III.3 Supremum en infimum

Zowel de reële getallen als de rationale getallen vormen geordende lichamen. Deze geordende lichamen zijn echter principieel verschillend. De verzameling $\mathbb{R}$ is bijvoorbeeld aanzienlijk groter dan de verzameling $\mathbb{Q}$. We hebben al vermeld dat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$ bestaat maar geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$; de verzameling $\mathbb{Q}$ is aftelbaar en we zullen later bewijzen dat de verzameling $\mathbb{R}$ overaftelbaar is.

Het volgende voorbeeld illustreert een andere eigenschap van de reële rechte die de verzameling $\mathbb{Q}$ niet heeft maar die in de Analyse heel belangrijk is.

III.3.1 Voorbeeld. Bekijk maar eens de verzameling van alle rationale getallen met de eigenschap dat ze of negatief zijn of dat hun kwadraat niet groter dan 2 is:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ en } x^2 \leqslant 2\}.$$

Blijkbaar is elk rationaal getal $q < \sqrt{2}$ een element van A en het is ook niet moeilijk in te zien dat geen getal groter dan $\sqrt{2}$ element van A is. Het getal $\sqrt{2}$ markeert de overgang van A naar zijn complement $\mathbb{Q} \setminus A$: alle elementen van A liggen op de reële rechte *links* van $\sqrt{2}$, en alle elementen van $\mathbb{Q} \setminus A$ bevinden zich *rechts* van $\sqrt{2}$. Het 'grensgetal' $\sqrt{2}$ is echter *géén* rationaal getal, zie Stelling II.4.2; we zouden kunnen zeggen dat de verzameling $\mathbb{Q}$ 'gaten' bevat. ▬

De verzameling $\mathbb{R}$ heeft geen 'gaten'; om deze belangrijke eigenschap van $\mathbb{R}$ te kunnen formuleren geven we eerst enkele definities.

III.3.2 Definitie. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet:

(i) *naar boven begrensd* als er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $v \leqslant x$ voor alle $v \in V$. In deze situatie noemen we x een *bovengrens voor* V.

(ii) *naar beneden begrensd* als er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $x \leqslant v$ voor alle $v \in V$. In deze situatie noemen we x een *ondergrens voor* V.

(iii) *begrensd* als V naar boven en naar beneden begrensd is.

III.3.3 Voorbeeld. De deelverzameling $\mathbb{N}$ van $\mathbb{R}$ is naar beneden begrensd (iedere $x \leqslant 0$ is een ondergrens) maar niet naar boven begrensd (dit is **(R13)**). De verzamelingen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ zijn noch naar boven, noch naar beneden begrensd. De intervallen $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 1\}$ en $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ zijn begrensd; in beide gevallen is iedere $x \geqslant 1$ een bovengrens en iedere $x \leqslant 0$ een ondergrens. ▬

III.3.4 Definitie. Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$.

supremum

(i) Een element $x \in \mathbb{R}$ heet een *supremum* van V als het een *kleinste bovengrens* van V is, dat wil zeggen,
- x is bovengrens voor V, en
- als y een bovengrens voor V is, dan geldt $y \geqslant x$.

infimum

(ii) Een element $x \in \mathbb{R}$ heet een *infimum* van V als het een *grootste ondergrens* van V is, dat wil zeggen,
- x is ondergrens voor V, en
- als y een ondergrens voor V is, dan geldt $y \leqslant x$.

III.3.5 Opmerking. Suprema en infima van verzamelingen zijn (als ze bestaan!) uniek, daarom zeggen we *het* supremum, *de* kleinste bovengrens, *het* infimum en *de* grootste ondergrens.
Notatie: $\inf V$ voor het infimum, en $\sup V$ voor het supremum

III.3.6 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We beweren dat $\sup\,[a, b] = b$. Het is duidelijk dat b een bovengrens is. Stel nu dat b niet de kleinste bovengrens is, dan is er dus een $c < b$ die een bovengrens is voor $[a, b]$. Maar dit is een tegenspraak, want $b \in [a, b]$ en $b > c$.

Een gelijkaardig argument bewijst dat $\inf\,[a, b] = a$. ∎

III.3.7 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We gaan bewijzen dat $\sup\,(a, b) = b$.

In ieder geval is b een bovengrens. Stel dat b niet de kleinste bovengrens is. Dan is er een $c < b$ die ook een bovengrens is. Kies een $x \in (a, b)$. Dan geldt $c > x$ en dus ook $c > a$. Beschouw nu $y = (b + c)/2$. Er geldt $y \in (a, b)$ en $y > c$. Dit is een tegenspraak met de aanname dat c een bovengrens is.

Op dezelfde wijze kan men bewijzen dat $\inf\,(a, b) = a$. ∎

Axioma's voor $\mathbb{R}$, deel 3

We kunnen nu eindelijk het allerlaatste axioma voor de reële getallen formuleren.

(R14) (Fundamentele eigenschap van $\mathbb{R}$) Iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke kleinste bovengrens.

Deze eigenschap geldt niet voor de rationale getallen: neem bijvoorbeeld A uit Voorbeeld III.3.1. Dan is A naar boven begrensd en niet-leeg maar A heeft geen kleinste bovengrens *in* $\mathbb{Q}$.

III.3.8 Opmerking. Men kan bewijzen dat de lijst axioma's **(R0)**–**(R14)** het gegeven $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, >)$ karakteriseert, in dezelfde zin als we dat hebben geformuleerd voor $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Ook kan men bewijzen dat er zo'n gegeven bestaat, door een constructie te geven. Een schets van zo'n constructie volgt later (zie pagina 68).

Door Axioma **(R13)** toe te passen op $-V = \{-v : v \in V\}$ zien we dat iedere niet-lege naar beneden begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ een grootste ondergrens heeft.

III.3.9 Gevolg. Iedere niet-lege naar beneden begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke grootste ondergrens.

In de volgende twee stellingen vatten we een aantal eigenschappen van sup en inf samen.

III.3.10 Propositie. Zij V een niet-lege begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$.

(i) Voor alle $d \in \mathbb{R}$ geldt $\sup\{v + d : v \in V\} = (\sup V) + d$;
(ii) Als $c \geq 0$ dan $\sup\{cv : v \in V\} = c \sup V$;
(iii) Als $c \leq 0$ dan $\sup\{cv : v \in V\} = c \inf V$.

Bewijs. Zie opgave III.3.8. ∎

III.3.11 Propositie. Laat A een niet-lege verzameling zijn. $f : A \to \mathbb{R}$ en $g : A \to \mathbb{R}$ functies zijn zó dat $f[A]$ en $g[A]$ begrensd zijn. Er geldt

(i) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$.
(ii) Als voor alle $x \in A$ geldt dat $f(x) \geq 0$ en $g(x) \geq 0$, dan

$$\sup\{f(x)g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en

$$\inf\{f(x)g(x) : x \in A\} \geq \inf\{f(x) : x \in A\} \inf\{g(x) : x \in A\}.$$

(iii) Als voor alle $x \in A$ geldt dat $f(x) \leq g(x)$, dan

$$\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en

$$\inf\{f(x) : x \in A\} \leq \inf\{g(x) : x \in A\}.$$

Bewijs. (i) Voor alle $x \in A$ geldt

$$f(x) + g(x) \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$$

en dus is het rechterlid een bovengrens voor $\{f(x) + g(x) : x \in A\}$. Aangezien $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\}$ de kleinste bovengrens is voor deze verzameling volgt dat

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}.$$

(ii) en (iii). Zie opgave III.3.9. ∎

maximum
minimum

III.3.12 Definitie. Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We noemen een element $v \in V$ een *maximum* van V als $v \geqslant u$ voor alle $u \in V$. We noteren dan $v = \max V$. Een *minimum* van V, notatie: $\min V$, wordt analoog gedefinieerd.

III.3.13 Voorbeeld. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

Het gesloten interval $[a, b]$ heeft b als maximum. Immers $b \in [a, b]$ en het is duidelijk dat voor alle $u \in [a, b]$ geldt dat $b \geqslant u$.

Het open interval (a, b) heeft geen maximum. Immers, neem aan dat $v \in (a, b)$ een maximum is. Beschouw dan $c = (b + v)/2$. Er geldt dat $v < c < b$. In het bijzonder is $c \in (a, b)$ maar geldt niet $v \geq c$, een tegenspraak.

Het verband tussen supremum en maximum is als volgt:

III.3.14 Stelling. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(i) V heeft een maximum;
(ii) V is naar boven begrensd en $\sup V \in V$.

In deze situatie geldt $\max V = \sup V$.

Bewijs. $(i) \Rightarrow (ii)$: Als V een maximum v heeft, dan is v een bovengrens voor V. We laten zien dat $v = \sup V$; dit geeft (ii). Stel eens dat w een bovengrens voor V is. Dan geldt $u \leqslant w$ voor alle $u \in V$, dus in het bijzonder $v \leqslant w$, want $v \in V$. Dit laat zien dat v de *kleinste* bovengrens van V is, dus $v = \sup V$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Zij $v = \sup V$; volgens aanname is $v \in V$. Omdat v een bovengrens voor V is, geldt $u \leqslant v$ voor alle $u \in V$. Dit laat zien dat v het maximum van V is. ∎

III.3.15 Opmerking. Een analoge stelling geldt ook voor minima en infima.

Opgaven

1. Zij

$$V = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}.$$

(a) Laat zien dat 0 een ondergrens is voor V.

(b) Laat zien dat geen enkel reëel getal $x > 0$ een ondergrens is voor V.
Aanwijzing: Gebruik de Archimedische eigenschap.

(c) Concludeer dat $\inf V = 0$.

(d) Laat zien dat V geen minimum heeft.

✍ **2.** Bepaal het supremum, infimum, maximum en minimum van V in $\mathbb{R}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen:

(a) $V = \{0\}$;

(b) $V = \big\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\big\}$;

(c) $V = \{\sin(n\pi/2) : n \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $V = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ en } 1/x \geqslant 2\}$;

(e) $V = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. (*Hint*: gebruik stelling III.2.6)

3. Bewijs dat het supremum van een verzameling (als die bestaat) uniek is.

4. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ een bovengrens van V. Toon aan dat $b = \sup V$ dan en slechts dan als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ met $\varepsilon > 0$ er een $v \in V$ bestaat zodat $v > b - \varepsilon$.

5. Zij V een niet-lege en naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$, en zij W een niet-lege deelverzameling van V.

(a) Toon aan dat W naar boven begrensd is en dat $\sup W \leqslant \sup V$.
Aanwijzing: Iedere bovengrens voor V is ook een bovengrens voor W.

(b) Geef een voorbeeld waarbij $V \neq W$ en $\sup W = \sup V$.

✍ **6.** Zij V een niet-lege begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Toon aan:

(a) Voor alle $v \in V$ geldt
$$\inf V \leqslant v \leqslant \sup V.$$

(b) $\inf V = \sup V$ dan en slechts dan als V uit één element bestaat.

7. Bewijs Gevolg III.3.9 in detail.

8. Bewijs Propositie III.3.10.

9. Bewijs (ii) en (iii) van Propositie III.3.11.

10. Zij A, B niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Bewijs of weerleg:

(a) als voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt dat $a \leq b$, dan $\sup A \leq \inf B$;

(b) als voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt dat $a < b$, dan $\sup A < \inf B$.

✍ **11.** Laat V en W niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met maxima $\max V$ en $\max W$. Toon aan of weerleg:

(a) De vereniging $V \cup W$ heeft een maximum;

(b) Als $V \cap W \neq \varnothing$ dan heeft de doorsnede $V \cap W$ een maximum.

Geef in beide gevallen een formule voor het maximum indien het bestaat; geef anders een tegenvoorbeeld.

✍ **12.** Bewijs of weerleg:

(a) Er is een $A \subseteq \mathbb{R}$ zó dat $\max A = \min A$.

(b) Er is een $A \subseteq \mathbb{R}$ zó dat $\max A$ of $\min A$ niet bestaat maar $\inf A = \sup A$.

13. Bewijs dat elke niet lege eindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ een maximum en een minimum heeft.

14. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet *open* als voor alle $v \in V$ er een $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat $(v-\varepsilon, v+\varepsilon) \subset V$.

✍ (a) Welk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn open: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $(0,\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\{0\}$.

✍ (b) Zij U, V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $U \cap V$ open is.

(c) Zij U, V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $U \cup V$ open is.

(d) Zij $(V_i)_{i\in I}$ een collectie open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Laat zien dat $\cup_{i\in I} V_i$ open is. Geef een voorbeeld waarbij $\cap_{i\in I} V_i$ niet open is.

(e) Zij $V \subset \mathbb{R}$ open, niet-leeg en naar boven begrensd. Laat zien dat $\sup V \notin V$.

✍ **15.** Zij V een niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Laat zien dat de verzameling van alle bovengrenzen van V een minimum heeft. Wat is dit minimum?

$\sqrt[n]{x}$

16. Laat $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$, en laat $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$. Laat $V = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y^n \leq x\}$.

(a) Laat zien dat V een supremum heeft.

☆ (b) Laat zien dat $\sup(V)^n = x$.

(c) Laat zien dat er een unieke $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is met $y^n = x$. Deze y noemen we de (positieve) $n$de wortel uit x, en we noteren die als $\sqrt[n]{x}$, of ook als $x^{1/n}$.

(d) Laat zien dat voor $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x \leq y$ geldt dat $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$.

IV RIJEN

Een onmisbaar begrip in de Analyse is dat van een rij. Rijen worden overal gebruikt: om continue functies te beschrijven, bij benaderingen van oplossingen van vergelijkingen enzovoort. In dit hoofdstuk bestuderen we een aantal belangrijke eigenschappen van reële rijen.

IV.1 Rijen, convergentie en limiet

Rijen van reële getallen

In Paragraaf I.3 is al gezegd wat een rij is; we herhalen de definitie.

IV.1.1 Definitie. Zij A een verzameling. Een *rij* in A is een functie $a\colon \mathbb{N} \to A$. In plaats van $a(n)$ schrijven we meestal a_n en in plaats van $a\colon \mathbb{N} \to A$ schrijven we vaak $(a_n)_{n\geqslant 0}$ of $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De getallen a_n heten de *termen* van $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Als $A = \mathbb{R}$ dan noemen we zo'n rij ook wel een reële rij.

In dit verband noemen we $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de *indexverzameling* van de rij. Het is soms handiger om een andere indexverzameling te gebruiken, bijvoorbeeld $\{1, 2, 3, \dots\}$; in dat geval noteren we de rij als $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Vaak is de rij door een expliciete formule voor de n-de term gegeven, zoals $a_n = 1/n$, $b_n = 2^{-n}$, $c_n = \sin n$ enzovoort. Deze rijen kunnen we dan noteren als $(1/n)_{n\geqslant 1}$, $(2^{-n})_{n\geqslant 0}$ en $(\sin n)_{n\geqslant 0}$. Minder formeel kunnen we een rij geven door een aantal termen uit te schrijven (indien de formule voor a_n duidelijk is); bijvoorbeeld: met $1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ bedoelen we de rij $(1/(2n+1))_{n\geqslant 0}$.

IV.1.2 Definitie. Een reële rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ heet *convergent* wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

We noemen a een *limiet* van de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Notatie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Een rij die niet convergent is heet *divergent*.

IV.1.3 Voorbeeld.

De rij $(1/n)_{n\geqslant 1}$

(a) We zullen aan de hand van bovenstaande definitie laten zien dat de rij $(1/n)_{n\geqslant 1}$ convergent is met limiet 0. Laat $\varepsilon > 0$. Uit de Archimedische eigenschap van

$\mathbb{R}$ volgt het bestaan van een $N \in \mathbb{N}$ met $N \geqslant 1$ en $1/N < \varepsilon$. Dan geldt voor alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(b) Constante rijen zijn convergent, zie Opgave IV.1.6.

(c) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is divergent want geen enkel getal a voldoet aan de eisen uit Definitie IV.1.2. Neem maar eens aan dat er wel zo'n a was en neem $\varepsilon = 1/2$. Laat $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\big|(-1)^n - a\big| < 1/2$ voor alle $n \geqslant N$. Neem een even $n > N$, dan volgt dat $\big|1 - a\big| < 1/2$, Neem een oneven $n > N$, dan volgt dat $\big|-1 - a\big| < 1/2$. Maar dat kan niet want hier zou uit volgen dat

$$2 = \big|(1-a) - (-1-a)\big| \leq |1-a| + |-1-a| < 1.$$

IV.1.4 Opmerking. Een reële rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ kan maximaal één limiet hebben. Stel maar eens dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ met $a \neq b$. Dan geldt $|a-b| > 0$. We leiden een tegenspraak af. Kies $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$. Uit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ volgt dat er een $N_1 \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $|a_n - a| < \varepsilon$. Uit $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ volgt dat er een $N_2 \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt $|a_n - b| < \varepsilon$. Kies een $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt dat

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|.$$

Ofwel $|a-b| < |a-b|$ en dat is onzin.

IV.1.5 Definitie. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een reële rij. We zeggen dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een *begrensde rij* is als een reëel getal $M \geq 0$ bestaat zó dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $|x_n| \leqslant M$.

Analoog definiëren we naar boven en naar beneden begrensdheid.
Het volgende hulpresultaat is vaak handig.

IV.1.6 Propositie. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is begrensd.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met limiet x. We moeten laten zien dat er een $M \geq 0$ bestaat met $|x_n| \leqslant M$ voor alle $n \geqslant 0$. Kies een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|x_n - x| < 1$ voor alle $n \geqslant N$. Zij $m = \max\{|x_k| : \ k = 0, \ldots, N-1\}$ en $M = \max\{m, |x|+1\}$. Het is duidelijk dat $|x_n| \leqslant m \leqslant M$ voor alle $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Voor $n \geqslant N$ geldt

$$|x_n| = \big|x + (x_n - x)\big| \leqslant |x| + |x_n - x| \leqslant |x| + 1 \leqslant M.$$

■

IV.1.7 Voorbeeld. Beschouw de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ gedefinieerd door $a_n = 2n$. De rij is niet begrensd en dus divergent. Om in te zien dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ niet begrensd is, kies $M \geq 0$ willekeurig. Kies $n \in \mathbb{N}$ zó dat $n > M/2$. Dan geldt $|a_n| = 2n > M$.

De rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$

IV.1.8 Stelling. Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

(a) Als $|x| > 1$ dan is de rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$ divergent.

(b) Als $|x| < 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(c) Als $x = 1$ dan $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$.

(d) Als $x = -1$ dan is de rij $(x^n)_{n\geqslant 0}$ divergent.

Bewijs. (a): Neem aan dat $|x| > 1$. We kunnen een $h > 0$ vinden zó dat $|x| = 1+h$. Uit de ongelijkheid van Bernoulli (zie Opgave III.2.6) volgt dat

$$|x^n| = |x|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Hier volgt dat $(x^n)_{n\geq 0}$ niet begrensd is, en dus divergent.
(b): Zie Opgave IV.1.12.
(c): Dit is duidelijk, want $1^n = 1$ voor alle $n \geq 0$.
(d): Zie Voorbeeld IV.1.3 (c). ■

Het is handig om ook een notatie in te voeren die beschrijft in welke zin een rij zoals $(2n)_{n\geq 0}$ divergeert.

IV.1.9 Definitie. We zeggen dat een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ *naar* ∞ *divergeert*, notatie:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

als er voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$: $x_n \geqslant \xi$.

Divergentie naar $-\infty$ wordt analoog gedefinieerd.
Het is wel gevaarlijk om te rekenen met divergentie naar ∞ en $-\infty$. Bedenk goed dat ∞ en $-\infty$ alleen symbolen zijn. Het zijn dus *geen* getallen.

IV.1.10 Voorbeeld. (a) Zij $a_n = 2n$ met $n \geq 0$. Laat $\xi \in \mathbb{R}$. Volgens de Archimedische eigenschap is er een $N \in \mathbb{N}$ met $N \geqslant \xi$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan $2n \geqslant 2N \geqslant N \geqslant \xi$. We hebben bewezen dat $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$.

(b) Zij $a_n = n$, $b_n = -n$ en $c_n = -n+1$ met $n \geq 0$. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ en $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Verder geldt dat de rij $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ is convergent met limiet 0. De rij $(a_n + c_n)_{n\geq 0}$ is convergent met limiet 1.

(c) Zij $a_n = n$, en $b_n = -n + (-1)^n$ met $n \geq 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ is divergent. Immers $a_n + b_n = (-1)^n$.

Blijkbaar kun je dus beter niet rekenen met ∞.

Opgaven

1. Schrijf een paar termen van $(a_n)_{n\geqslant 0}$ op om een mogelijke limiet a af te leiden. Probeer vervolgens in elk geval hieronder een natuurlijk getal N te vinden zó dat $|a_n - a| < 1/2$ voor alle $n \geq N$, als gegeven wordt

(a) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$;

(b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$;

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;

(d) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$.

2. Beschouw dezelfde rijen als in de voorafgaande opgave.

(a) Vind voor elke $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

✍ (b) Herzie indien nodig uw keuze van a, en bewijs dat elke rij naar de gevonden waarde a convergeert. (*Hint*: gebruik bij (d) de ongelijkheid van Bernoulli).

3. (a) Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = \sqrt{n}$. Toon met behulp van de definitie aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. Beschouw de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$, waarbij $a_n = (4^n + 5^n)/(2^n + 3^n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vind een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $a_n > 1000$.

(b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

✍ **5.** Beschouw $(a_n)_{n\geqslant 0}$ gedefinieerd voor elke $n \in \mathbb{N}$ als volgt: $a_{2n} = 2^{-n}$ en $a_{2n+1} = 0$. Bewijs met behulp van Definitie IV.1.2 dat de rij convergent is of laat zien dat de rij divergent is.

6. Bewijs dat een constante rij in $\mathbb{R}$ convergent is.

7. Wat kan men zeggen over een rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ als gegeven is dat de rij convergent is en elke a_n een geheel getal is? Vind eerst een paar voorbeelden.

8. Toon aan:

(a) Voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 1$ geldt $\lim_{n\to\infty} 1/n^k = 0$.

(b) Voor alle $n \geq 2$ geldt $\lim_{k\to\infty} 1/n^k = 0$.

✍ **9.** Van een reële rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is gegeven

$$a_0 = 0 \quad \text{en voor } n \in \mathbb{N} \quad a_n + a_{n+1} = 2n - 1.$$

Vind en bewijs een algemene formule voor a_n.

✍ **10.** Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met limiet x. Laat a en b in $\mathbb{R}$ met $a \leqslant b$.

(a) Toon aan: als $a \leqslant x_n \leqslant b$ voor alle n, dan geldt ook $a \leqslant x \leqslant b$.

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de volgende bewering niet juist is: als $a < x_n < b$ voor alle n, dan geldt ook $a < x < b$.

✍ **11.** Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij zó dat $(x_{2n})_{n\geq 0}$ en $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergeren naar dezelfde limiet x. Toon aan dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergeert en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

12. Bewijs Stelling IV.1.8 (b).

IV.2 Eigenschappen van convergente rijen

In deze paragraaf bespreken we enkele technieken om aan te tonen dat limieten bestaan en om ze te berekenen.

Rekenregels voor convergente rijen

We leiden enkele eigenschappen van convergente rijen af. Deze stellen ons in staat op een eenvoudige manier limieten te berekenen zonder terug te moeten gaan naar de oorspronkelijke definitie .

IV.2.1 Stelling (Rekenregels voor Limieten)**.** Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ convergente rijen zijn in $\mathbb{R}$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. De volgende uitspraken gelden:

(i) De rij $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

(ii) Als $\alpha \in \mathbb{R}$ dan is de rij $(\alpha x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent, en $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$.

(iii) De rij $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

(iv) Als $x \neq 0$ en alle $x_n \neq 0$, dan is $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ convergent en $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$.

(v) De rij $(|x_n|)_{n\geqslant 0}$ is convergent, en $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

(vi) Als er een $k \geq 0$ is zó dat $x_n \leq y_n$ voor alle $n \geq k$, dan is $x \leq y$.

Bewijs. (i): Merk op dat

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leqslant |(x_n - x)| + |(y_n - y)|. \quad \text{(IV.1)}$$

Laat $\varepsilon > 0$. Neem N_1 en N_2 in $\mathbb{N}$ zó dat $|x_n - x| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geqslant N_1$ en $|y_n - y| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geqslant N_2$. Kies $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met (IV.1) volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(ii): Het geval $\alpha = 0$ is duidelijk. Zij $\alpha \neq 0$. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $|x_n - x| < \varepsilon/|\alpha|$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan

$$|\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha||x_n - x| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

(iii): Merk eerst op dat uit de driehoeksongelijkheid volgt dat

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|. \quad \text{(IV.2)}$$

We zullen de beide laatste termen afschatten.

Wegens Propositie IV.1.6 geldt dat $(x_n)_{n\geq 0}$ een begrensde rij is. Zij $M \geq 0$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt $|x_n| \leq M$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|y|+1}$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt[1] $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M+1}$.

Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met (IV.2) volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$|x_n y_n - xy| \leq M\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M+1} + |y|\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|y|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[1]Merk op dat y of M gelijk aan nul zouden kunnen zijn. Daarom schrijven we $|y| + 1$ en $M + 1$ in de noemer.

(iv): Merk op dat

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x x_n}\right| = \frac{|x - x_n|}{|x|\,|x_n|}. \tag{IV.3}$$

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zo groot dat $|x_n - x| \leqslant |x|/2$ voor alle $n \geqslant N_1$. Dan volgt voor alle $n \geq N_1$ dat

$$|x| = |x_n + (x - x_n)| \leqslant |x_n| + |x - x_n| \leqslant |x_n| + \frac{|x|}{2}.$$

Hier zien we dat $|x_n| \geqslant |x|/2$ voor alle $n \geq N_1$. In het bijzonder is $x_n \neq 0$ voor alle $n \geqslant N_1$.

Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zo groot dat $|x_n - x| < \varepsilon |x|^2/2$ voor alle $n \geqslant N_2$. Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$. Met (IV.3) volgt dat voor alle $n \geqslant N$ geldt:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| < \frac{\varepsilon |x|^2/2}{|x| \cdot |x|/2} = \varepsilon.$$

(v): Zie Opgave IV.2.1.

(vi): Beschouw de rij $(z_n)_{n\geqslant 0}$ gegeven door $z_n = x_n - y_n$ en definieer $z = x - y$. Dan geldt $z_n \leq 0$ voor alle $n \geq k$. Verder volgt uit (i) en (ii) dat $(z_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is met $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Het voldoet te bewijzen dat $z \leq 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \geq k$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $|z_n - z| < \varepsilon$. Dan volgt voor alle $n \geq N$ dat

$$z \leq z - z_n \leq |z - z_n| < \varepsilon.$$

Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt dat $z \leq 0$. ∎

IV.2.2 Voorbeeld. Uit de rekenregels voor limieten en $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^7 + 3n^5 + 2n^4}{3n^7 + n^4 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{3 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}.$$

Insluitstelling

De volgende stelling stelt ons in staat met behulp van bekende convergente rijen limieten van meer ingewikkelde rijen te vinden.

IV.2.3 Stelling (Insluitstelling)**.** Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ en $(z_n)_{n\geqslant 0}$ reële rijen zijn met $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ voor alle $n \geqslant 0$. Neem voorts aan dat de rijen $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(z_n)_{n\geqslant 0}$ convergent zijn met limiet $a \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de rij $(y_n)_{n\geqslant 0}$ eveneens, met limiet a.

Bewijs. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat $|x_n - a| < \varepsilon$ voor alle $n \geqslant N_1$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat $|z_n - a| < \varepsilon$ voor alle $n \geqslant N_2$. Noem $N = \max\{N_1, N_2\}$, dan geldt voor alle $n \geqslant N$ dat

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

en dus ook $|y_n - a| < \varepsilon$. ∎

Voorbeeld

We geven een voorbeeld van een toepassing van de insluitstelling.

IV.2.4 Voorbeeld. Beschouw de rij $((\sin n)/n)_{n\geqslant 1}$. Voor elke $n \geqslant 1$ geldt:

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

en ook geldt $\lim\limits_{n\to\infty} -1/n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n$. Volgens de Insluitstelling geldt dus $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n)/n = 0$.

Ten slotte nog enkele bijzondere limieten die we in een stelling formuleren.

IV.2.5 Stelling.

(i) Zij $p \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < 1$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} n^p x^n = 0$.

(ii) Zij $a > 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a})_{n\geqslant 1} = 1$.

(iii) Er geldt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bewijs. (i): Wegens Opgave IV.2.1 (c) voldoet het om $0 \le x < 1$ te beschouwen. Het geval $x = 0$ is duidelijk. Neem aan $0 < x < 1$. Definieer $y = \sqrt[p+1]{x}$ en $z_n = (ny^n)^p$, $n \ge 1$. Dan geldt $0 < y < 1$, en voor alle $n \ge 1$ geldt

$$n^p x^n = n^p y^{n(p+1)} = n^p y^{np} y^n = z_n y^n.$$

Bewering: $(z_n)_{n\ge 1}$ is begrensd. Kies $h > 0$ zó dat $\frac{1}{y} = 1 + h$. Uit de ongelijkheid van Bernoulli volgt dat

$$\frac{1}{y^n} = (1+h)^n \ge 1 + nh.$$

We zien dus dat voor alle $n \ge 1$ geldt

$$0 \le ny^n \le \frac{n}{1+nh} = \frac{1}{\frac{1}{n} + h} \le \frac{1}{h}.$$

Hieruit volgt dat $0 \le (ny^n)^p \le h^{-p}$ voor alle $n \ge 1$, en dit bewijst de bewering. Uit Stelling IV.1.8 volgt dat $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$. Als we dit combineren met Opgave IV.2.2 dan vinden we $\lim_{n\to\infty} z_n y^n = 0$, en dit geeft het gevraagde.

(ii): Neem eerst aan dat $a \ge 1$. Dan geldt $\sqrt[n]{a} \ge 1$. Zij $n \ge 2$ willekeurig. Schrijf $a = a \cdot 1 \cdots 1$ met $n-1$ maal een 1. Met behulp van de Ongelijkheid van het Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) volgt dat

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdots 1} \leqslant \frac{a + (n-1)}{n} = \frac{a-1}{n} + 1.$$

Aangezien $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a-1}{n} + 1 = 1$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Stel nu $0 < a < 1$. Er geldt $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$. We weten dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$. Dus uit de rekenregels voor limieten volgt dat ook in dit geval geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

(iii): Zie Opgave IV.2.7.

■

Opgaven

1. (a) Bewijs Stelling IV.2.1 (e).

(b) Geef een voorbeeld van een divergente rij $(x_n)_{n\ge 0}$ zó dat $(|x_n|)_{n\ge 0}$ convergeert.

(c) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

✍ **2.** Gegeven zijn de reële rijen $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$. Toon aan: als $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd, dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

3. Stel $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en $x \neq 0$, en $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{y}{x}$.

4. (a) Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ divergent. Toon aan dat $(x_n + y_n)_{n\geqslant 0}$ divergeert.

✍ (b) Bewijs of weerleg: de som van twee divergente rijen is divergent.

✍ **5.** Deze som geeft een ander bewijs voor Stelling IV.2.1 (iii). Laat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ rijen zijn met $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

(a) Laat met behulp van de definitie zien dat $\lim_{n\to\infty}(x_n - x)(y_n - y) = 0$.

(b) Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

✍ **6.** Construeer reële rijen $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ is divergent en zó dat

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -3$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$;

(e) De rij $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ is divergent en $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n \neq \infty$ en ook $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n \neq -\infty$.

7. Bewijs Stelling IV.2.5 (iii). Hint: schrijf $n = \sqrt{n}\sqrt{n} \cdot 1 \cdots 1$ met $n-2$ maal een 1 en redeneer als in Stelling IV.2.5 (ii).

8. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ een reële rij zijn. Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Wat kan men zeggen over $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

✍ **9.** Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ reële rijen zijn. Bewijs of weerleg: als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ of $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

✍ **10.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de rij gegeven door $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

11. Bewijs dat rijen met de volgende termen convergeren en bereken hun limieten.

(a) $\dfrac{n^3+3}{n^3+4n+8}$. (b) $\dfrac{2^n+n^2}{3^n+5n^4}$. (c) $\dfrac{\sin(n)}{n+1}$. (d) $\sqrt[n]{n^2+n}$. (e) $\dfrac{n!}{n^n}$.

12. (a) Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente rij met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} = a \qquad (*)$$

(b) Verzin een rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ zó dat de limiet in $(*)$ bestaat, maar $(a_n)_{n\geqslant 0}$ divergent is.

13. Zij $k \in \mathbb{N}$. Bewijs $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{k!}$.

IV.3 Monotone rijen

De praktijk leert dat het vaak lastig is om rechtstreeks aan te tonen dat een gegeven rij convergeert; vaak hebben we niet eens een kandidaat voor de limiet. Om deze reden is het van belang om convergentiecriteria te hebben die alleen refereren aan de termen van de rij zelf en niet aan de eventuele limiet. Zo'n criterium gaan we nu afleiden.

IV.3.1 Definitie. Een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ heet

- *stijgend* als $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$;
- *strikt stijgend* als $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.

Dalende en *strikt dalende* rijen worden analoog gedefinieerd. We noemen stijgende en dalende rijen *monotoon*.

IV.3.2 Voorbeeld.

(a) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is niet stijgend en ook niet dalend (en dus ook niet monotoon).
(b) De rij $(n^3)_{n\geq 0}$ is strikt stijgend (en dus monotoon).
(c) De constante rij $(a_n)_{n\geq 0}$ gedefinieerd door $a_n = -2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ is monotoon want hij is zowel dalend als stijgend, maar hij is *niet* strikt stijgend en ook *niet* strikt dalend.

Het supremum van een naar boven begrensde rij en het infimum van een naar beneden begrensde rij definiëren en noteren we als volgt:

$$\sup_{n\geqslant 0} x_n = \sup\{x_n :\ n \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \inf_{n\geqslant 0} x_n = \inf\{x_n :\ n \geqslant 0\}.$$

Monotone Convergentiestelling

IV.3.3 Stelling (Monotone Convergentiestelling)**.** Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een stijgende en naar boven begrensde rij in $\mathbb{R}$ en definieer $x = \sup_{n\geq 0} x_n$. Dan geldt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Bewijs. Definieer $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dan is V niet-leeg en naar boeven begrensd. Wegens (R13) bestaat $x = \sup V$. Laat $\varepsilon > 0$. Omdat $x - \varepsilon$ geen bovengrens voor V is, bestaat een $v \in V$ met $x - \varepsilon < v$. Er geldt $v = x_N$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$. Voor alle $n \geqslant N$ geldt dan $x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x$, waarbij we gebruiken dat de rij stijgt en dat x een bovengrens is. Uit deze ongelijkheden volgt dat

$$|x_n - x| = x - x_n < \varepsilon \quad \text{voor alle } n \geqslant N.$$

$\blacksquare$

Door de rij $(-x_n)_{n\geqslant 0}$ te beschouwen zien we dat een analoog resultaat geldt voor dalende, naar beneden begrensde rijen, zie Opgave IV.3.1.

Als toepassing van de Monotone Convergentiestelling geven we het volgende voorbeeld.

$\sqrt{c}$

IV.3.4 Voorbeeld. Neem een $c > 0$ vast. Definieer de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ door

$$x_0 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n}.$$

voor $n \geqslant 0$. We bewijzen dat de rij convergent is en vinden zijn limiet.

Bewering 1: $x_n > 0$ voor alle $n \geq 0$. Dit kun je met inductie bewijzen.

Bewering 2: $x_n^2 \geq c$ voor alle $n \geq 1$. Inderdaad voor elke $n \geq 0$ geldt[2]

$$x_{n+1}^2 = \Big(\frac{x_n^2 + c}{2x_n}\Big)^2 = \frac{(x_n^2)^2 + c^2 + 2cx_n^2}{4x_n^2} \geq \frac{2cx_n^2 + 2cx_n^2}{4x_n^2} = c.$$

Bewering 3: $(x_n)_{n\geq 1}$ is dalend. Bewering 2 geeft dat $2x_n^2 \geq x_n^2 + c$. Aangezien $x_n > 0$ kunnen we delen door $2x_n$ en vinden we dat

$$x_n \geq \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = x_{n+1}.$$

Aangezien $(x_n)_{n\geq 1}$ dalend is en naar beneden begrensd, volgt uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 dat $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent is. Noem $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Verder volgt uit Beweringen 1 en 2 en rekenregels voor limieten dat $a \geq 0$ en $a^2 \geq c$, en dus $a > 0$. Er volgt dat

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + c}{2x_n} = \frac{a^2 + c}{2a}$$

waaruit volgt dat $2a^2 = a^2 + c$, ofwel $a^2 = c$. Aangezien $a > 0$ zien we dat $a = \sqrt{c}$. We hebben dus aangetoond dat de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is met $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$. ∎

IV.3.5 Opmerking. (i) Met behulp van de Monotone Convergentiestelling zien we dus dat voor iedere $c > 0$ een wortel in $\mathbb{R}$ bestaat. We hebben zelfs een rij aangegeven die naar $\sqrt{c}$ toe convergeert. Als we zo'n benadering willen gebruiken dan moeten we natuurlijk weten hoe groot de "fout" is. Dit kunnen als volgt inzien. Uit Bewering 2 volgt dat $x_n^2 \geq c$ voor alle $n \geq 1$. Dus met $x_n > 0$ volgt $x_n \geq \sqrt{c}$. Ook volgt hieruit dat $\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{c}}$, en dus $\frac{c}{x_n} \leq \sqrt{c}$. We vinden dat

$$\frac{c}{x_n} \leq \sqrt{c} \leq x_n.$$

$\sqrt[p]{c}$

(ii) In Opgave IV.3.6 wordt $\sqrt[p]{c}$ met $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ en $c \geq 0$ geconstrueerd met behulp van een rij. We zullen ook soms schrijven $c^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{c}$ en $c^{\frac{m}{p}} = (\sqrt[p]{c})^m = \sqrt[p]{c^m}$.

De volgende stelling is een handig gevolg van de Monotone Convergentiestelling IV.3.3.

Stelling van Cantor

IV.3.6 Stelling (Cantor)**.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een stijgende rij en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ een dalende rij in $\mathbb{R}$, zó dat $a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq 0$, en $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Dan geldt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ beide convergent zijn en $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Bewijs. Merk op dat $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ voor alle $n \geq 0$. Hieruit volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ naar boven begrensd is en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ naar beneden begrensd is. Uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 volgt dat $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ en $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ bestaan en voor alle $n \geq 0$ geldt $a_n \leq a \leq b \leq b_n$. Dus $0 \leq b - a \leq b_n - a_n$ voor alle $n \geq 0$. Wegens $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ volgt dat $b - a = 0$ en dus $a = b$. ∎

De overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$

Met behulp van de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 kunnen we nu de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ bewijzen.

[2] Gebruik $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

IV.3.7 Stelling. De verzamelingen $\mathbb{R}$ en $(0,1)$ zijn overaftelbaar.

Bewijs. Aangezien $\mathbb{R}$ en $(0,1)$ gelijkmachtig zijn, voldoet het om aan te tonen dat $(0,1)$ overaftelbaar is. Stel $(0,1)$ is aftelbaar. We leiden een tegenspraak af.

Laat $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ een bijectie zijn.

Stap 1: Kies een $[a_0, b_0] \subseteq (0,1)$ met $b_0 - a_0 > 0$ en zó dat $f(0) \notin [a_0, b_0]$.

Stap 2: Recursief construeren we rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ en $(b_n)_{n\geq 1}$ zó dat voor iedere $n \geq 1$

(i) $[a_{n-1}, b_{n-1}] \supseteq [a_n, b_n]$.

(ii) $f(n) \notin [a_n, b_n]$.

(iii) $b_n - a_n > 0$.

Stel dat $a_0, \ldots, a_n$ en $b_0, \ldots, b_n$ geconstrueerd zijn met de bovenstaande eigenschappen (i), (ii) en (iii). Uit (iii) volgt dat we $[a_n, b_n]$ kunnen schrijven als

$$[a_n, b_n] = [a_n, u_n] \cup [u_n, v_n] \cup [v_n, b_n],$$

met $a_n < u_n < v_n < b_n$. Er zijn 2 mogelijkheden: $f(n+1) \in [a_n, u_n]$ of $f(n+1) \notin [a_n, u_n]$. In het eerste geval kiezen we $a_{n+1} = v_n$ en $b_{n+1} = b_n$. In het tweede geval kiezen we $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = u_n$. In beide gevallen gelden (i), (ii) en (iii) voor $n+1$.

Uit (i) volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ stijgend is en naar boven begrensd door b_0. Uit de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 volgt dat $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 0} a_n$ bestaat.

Bewering: $x \in [a_n, b_n]$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Duidelijk is dat $a_n \leq x$. Aangezien voor alle $i \geq n$ geldt dat $a_i \leq b_i \leq b_n$, volgt uit de rekenregels van limieten dat $x = \lim_{i\to\infty} a_i \leq b_n$. Dit geeft de bewering.

Uit de surjectiviteit van f volgt dat er een $n \geq 0$ bestaat zó dat $f(n) = x$. Dus $f(n) = x \in [a_n, b_n]$. Dit is in tegenspraak met (ii). ■

Opgaven

✍ **1.** Bewijs dat iedere dalende en naar beneden begrensde rij naar zijn infimum convergeert.

2. Neem $c = 2$ in Voorbeeld IV.3.4. Vind x_0 tot en met x_4. Controleer met Opmerking IV.3.5 hoe goed je benadering van $\sqrt{2}$ is.

3. Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Toon aan:

(a) Als V naar boven begrensd is dan bestaat er een rij $(v_n)_{n\geqslant 0}$ in V met de eigenschap dat $v_0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots$ en

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sup V.$$

Hint: Geef een recursieve constructie.

(b) Als V naar beneden begrensd is dan bestaat er een rij $(v_n)_{n\geqslant 0}$ in V met de eigenschap dat $v_0 \geqslant v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots$ en

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \inf V.$$

4. Geef in elk van de onderstaande gevallen een reële rij met de genoemde eigenschappen:

(a) De rij is dalend met 0 als het infimum.

(b) De rij is stijgend met 5 als het supremum.

(c) De rij is noch dalend noch stijgend en heeft 0 als het infimum en 5 als het supremum.

5. De rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ is gedefinieerd door $x_0 = 2$ en $x_{n+1} = (1 + x_n)/2$ voor $n \geqslant 0$.

(a) Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_n \geqslant 1$.

(b) Laat zien dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dalend is.

✍ (c) Bewijs dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergent is en vind zijn limiet.

$\sqrt[p]{c}$

★ **6.** Neem een $c \in \mathbb{R}$ vast en $p \in \mathbb{N}$ met $p \geq 2$. Definieer de rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ door[3]

$$x_0 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{(p-1)x_n^p + c}{p x_n^{p-1}}.$$

voor $n \geqslant 0$.

(a) Toon aan dat $x_n > 0$ voor alle $n \geq 0$.

(b) Toon aan dat $x_n^p \geq c$ voor alle $n \geq 1$.

(c) Concludeer dat $(x_n)_{n\geq 1}$ dalend is.

(d) Toon aan dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ convergeert naar $a > 0$, met $a^p = c$.

(e) Toon aan dat $\frac{c}{x_n^{p-1}} \leq \sqrt[p]{c} \leq x_n$ voor alle $n \geq 1$.

lim sup en lim inf

★ **7.** Zij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en begrensde reële rij. We definiëren $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ als volgt:[4]

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big) \quad \text{en} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big).$$

(a) Bewijs dat $\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$ en $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$.

(b) Bewijs dat voor elke begrensde rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ geldt dat $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bestaan.

(c) Bewijs dat voor elke begrensde rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ geldt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(d) Bewijs dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat. In dit geval geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

[3] De methode kan gebruikt worden om $f(x) = x$ op te lossen voor veel functies f en wordt de NewtonRaphson methode genoemd.

[4] De interpretatie is dat we het supremum/infimum nemen over een steeds kleiner wordende staart.

IV.4 Volledigheid van $\mathbb{R}$

In de vorige paragraaf hebben we de Monotone Convergentiestelling bewezen, die een voldoende voorwaarde voor convergentie van monotone rijen geeft. In deze paragraaf bewijzen we de Volledigheidsstelling, die een criterium geeft voor convergentie van rijen die niet noodzakelijk monotoon zijn.

deelrij

Als we een aantal termen uit een rij weglaten krijgen we een deelrij (niets weglaten mag), mits er oneindig veel termen overblijven en de volgorde van termen niet veranderd wordt.

IV.4.1 Definitie. Een rij $(b_k)_{k\geqslant 0}$ heet een *deelrij* van de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ als er een strikt stijgende rij[5] natuurlijke getallen $(n_k)_{k\geqslant 0}$ bestaat zó dat voor alle $k \in \mathbb{N}$: $b_k = a_{n_k}$.

IV.4.2 Voorbeeld.

(a) Iedere rij is een deelrij van zichzelf: neem $n_k = k$.
(b) De rij $(2^{-n})_{n\geqslant 0}$ is een deelrij van $(a_n)_{n\geqslant 1}$ met $a_n = 1/n$: neem maar $n_k = 2^k$.
(c) De rij $2, 0, 6, 4, 10, 8, \dots$ is geen deelrij van $(2n)_{n\geqslant 0}$ (de volgorde van termen is veranderd).
(d) De rij $(b_n)_{n\geqslant 0}$ met $b_n = 1$ is geen deelrij van $(a_n)_{n\geqslant 1}$ met $a_n = 1/n$.

Stelling van Bolzano-Weierstrass

IV.4.3 Stelling (Bolzano-Weierstrass)**.** Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een begrensde reële rij. Kies $a_0 < b_0$ beide in $\mathbb{R}$ zodanig dat $x_n \in I_0 = [a_0, b_0]$ voor alle $n \geqslant 0$. We geven nu een recursieve constructie van reële rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$, zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt dat

(i) $[a_{n-1}, b_{n-1}] \supseteq [a_n, b_n]$ als $n \geq 1$.
(ii) $[a_n, b_n]$ bevat x_j voor oneindig veel $j \in \mathbb{N}$.
(iii) $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0|$.

Stel we hebben $a_0, \dots a_n$ en $b_0, \dots, b_n$ met de bovenstaande eigenschappen geconstrueerd. We laten zien hoe we a_{n+1} en b_{n+1} kunnen vinden.

Zij $c_n = (a_n + b_n)/2$. Uit (ii) volgt dat er 2 mogelijkheden zijn: $[a_n, c_n]$ bevat oneindig veel x_j's of niet. In het eerste geval kiezen we $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = c_n$. In het tweede geval moet wegens (ii), $[c_n, b_n]$ oneindig veel punten bevatten, en kiezen we $a_{n+1} = c_n$ en $b_{n+1} = b_n$. Dan gelden (i), (ii) en (iii) gelden voor $n + 1$ (ga dit na!).

Wegens (ii) geldt dat $a_n \leq b_n$ voor elke $n \geq 0$. Dus met (i) volgt dat $(a_n)_{n\geq 0}$ stijgend is en $(b_n)_{n\geq 0}$ dalend is. Uit (iii) volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. Uit Stelling IV.3.6 volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Uit (ii) volgt dat we een deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ kunnen vinden zó dat $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, en dus $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ voor elke $k \geq 0$, Met behulp van de insluitstelling vinden we dat $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergeert. ∎

IV.4.4 Voorbeeld.

(a) Laat de rij $(a_n)_{n\geqslant 0}$ gegeven zijn door $a_n = (-1)^n$ voor $n \geq 0$. Aangezien $a_{2n} = 1$ en $a_{2n+1} = -1$ voor alle $n \geq 0$ volgt dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ minstens twee deelrijen heeft die convergeren. Namelijk $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ en $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$.

[5] Een strikt stijgende rij van indices zorgt ervoor dat de termen niet herhaald worden, dat er oneindig veel termen overblijven en dat de volgorde ook niet verandert. Merk ook op dat de rij $(n_k)_{k\geq 0}$ een deelrij van de identieke afbeelding op de indexverzameling $\mathbb{N}$ is.

(b) Definieer $(a_n)_{n\geqslant 0}$ door $a_n = \sin(n)$ voor $n \geq 0$. Aangezien $|a_n| \leq 1$, volgt uit de Stelling van Bolzano-Weierstrass IV.4.3 dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente deelrij heeft. In dit geval is het niet eenvoudig om zo'n deelrij expliciet aan te geven.

De Stelling van Bolzano-Weierstrass is handig, maar soms is het nuttig om ook nog een ander criterium voor convergentie te hebben. Hiervoor hebben we de volgende defintie nodig.

Cauchy-rij

IV.4.5 Definitie. Een rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}$ heet een *Cauchy-rij* als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{voor alle } m, n \geq N : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

IV.4.6 Voorbeeld.

(a) De rij $(1/(n+1))_{n\geq 0}$ is een Cauchy-rij. Immers, zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ met $N+1 > 2/\varepsilon$ dan is $1/(N+1) < \varepsilon/2$. Hieruit volgt dat voor elke $m, n \geqslant N$ geldt:
$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \leqslant \frac{2}{N+1} < \varepsilon.$$

(b) De rij $((-1)^n)_{n\geq 0}$ is geen Cauchy-rij want voor $\varepsilon = 1$ bestaat geen $N > 0$ zó dat *voor alle* $n \geqslant N$ geldt $|(-1)^n - (-1)^m| < 1$: zij $N > 0$ en neem $n = N+1$ en $m = N$ dan geldt $|(-1)^n - (-1)^m| = |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2 \not< 1$.

We zullen zo-dadelijk zien dat een reële rij precies dan convergeert wanneer hij een Cauchy-rij is. Eén helft van deze bewering is eenvoudig te bewijzen.

IV.4.7 Propositie.

(i) Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is een Cauchy-rij.
(ii) Iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is begrensd.

Bewijs. (i): Zie Opgave IV.4.1.

(ii): Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$. We moeten laten zien dat er een $M \geq 0$ bestaat met $|x_n| \leqslant M$ voor alle $n \geqslant 0$. Kies een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|x_n - x_m| < 1$ voor alle $m, n \geqslant N$. Zij $c = \max\{|x_k| : k = 0, \dots, N\}$ en $C = c + 1$. Voor $n = 0, \dots, N$ is het duidelijk dat $|x_n| \leqslant c \leqslant C$. Voor $n \geqslant N$ geldt

$$|x_n| = |x_N + (x_n - x_N)| \leqslant |x_N| + |x_n - x_N| \leqslant c + 1 = C.$$

■

In de volgende stelling bewijzen we de omkering van Propositie IV.4.7 (i).

Volledigheidsstelling

IV.4.8 Stelling (Volledigheidsstelling)**.** Iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is convergent.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$. Wegens Propositie IV.4.7 geldt dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is. Uit de Stelling van Bolzano-Weierstrass volgt dat er een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ bestaat. Laat $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. We bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m, n \geq N$ geldt dat $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Kies $k \geq N$ zó dat $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Aangezien $n_k \geq N$ volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

en dit bewijst het gevraagde. ■

Overzicht

Het Axioma (R13) over het bestaan van suprema speelt een belangrijke rol in dit hoofdstuk. Uitgaande van de (R0) tot en met (R12) kan men het volgende bewijzen:

IV.4.9 Stelling. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(a) Iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling $V \subseteq \mathbb{R}$ heeft een kleinste bovengrens.
(b) Iedere naar boven begrensde stijgende rij is convergent.
(c) Iedere begrensde rij heeft een convergente deelrij.
(d) Iedere Cauchy-rij is convergent.

Bewijs. (a) $\Rightarrow$ (b): Zie de Monotone Convergentiestelling IV.3.3.

(b) $\Rightarrow$ (c): Zie de Bolzano-Weierstrass Stelling IV.4.3.

(c) $\Rightarrow$ (d): Zie de Volledigheidstelling IV.4.8.

(d) $\Rightarrow$ (a). Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ niet-leeg en naar boven begrensd. Zij $b_0 \in \mathbb{R}$ een bovengrens voor V. Er zijn 2 mogelijkheden: (1) b_0 is de kleinste bovengrens van V of (2) b_0 is niet de kleinste bovengrens voor V. In geval (1) zijn we klaar. In geval (2) kiezen we $a_0 \in V$ willekeurig, en merken op dat $a_0 < b_0$.

We geven nu een recursieve constructie van rijen $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt:

(i) $[a_{n-1}, b_{n-1}] \supseteq [a_n, b_n]$ als $n \geq 1$.
(ii) $a_n \in V$ en b_n is een bovengrens voor V.
(iii) $|b_n - a_n| \leq 2^{-n}|b_0 - a_0|$.

Stel we hebben $a_0, \ldots a_n$ en $b_0, \ldots, b_n$ met de bovenstaande eigenschappen geconstrueerd. We laten zien hoe we a_{n+1} en b_{n+1} kunnen vinden.

Zij $c_n = (a_n + b_n)/2$. Er zijn 2 mogelijkheden: (1) c_n is een bovengrens voor V of (2) c_n is geen bovengrens voor V . In (1) kies $a_{n+1} = a_n$ en $b_{n+1} = c_n$. In (2) kunnen we een $a_{n+1} \in V$ vinden zó dat $a_{n+1} > c_n$ en kiezen we $b_{n+1} = b_n$. Nu gelden (i), (ii) en (iii) voor $n + 1$ (ga dit na!).

Uit (i) en (ii) volgt dat $a_n \leq b_n$ voor elke $n \geq 0$, en $(a_n)_{n\geqslant 0}$ is stijgend en $(b_n)_{n\geqslant 0}$ is dalend. We tonen aan dat $(a_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij is. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $2^{-N}|x_0 - y_0| < \varepsilon$. Zij $m, n \geq N$. We mogen aannemen dat $n \geq m$. Er volgt dat

$$0 \leq a_n - a_m \leq b_N - a_N \leq 2^{-N}|b_0 - a_0| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is, en dus wegens (d) is er een $a \in \mathbb{R}$ zó dat $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bewering: a is de kleinste bovengrens voor V. Stel a is geen bovengrens voor V, dan is er een $x \in V$ zó dat $x > a$. Kies $\varepsilon > 0$ zó dat $x > a + \varepsilon$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$

$$b_n = (b_n - a_n) + (a_n - a) + a \leq |b_n - a_n| + a < \varepsilon + a < x.$$

Dit kan niet want b_n is een bovengrens voor V. We kunnen dus concluderen dat a een bovengrens is voor V. Stel a' is ook een bovengrens voor V. Dan geldt $a_n \leq a'$ voor alle $n \geq 0$. Met behulp van de rekenregels voor limieten volgt dat $a \leq a'$. Dus a is de kleinste bovengrens voor V. ∎

Constructie van $\mathbb{R}$

We eindigen deze sectie met een zeer korte schets van een constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$. Natuurlijk kunnen we dan $\mathbb{R}$ niet gebruiken tijdens deze constructie. Vandaar dat we opnieuw moeten definiëren wat een Cauchy-rij in $\mathbb{Q}$ is. Een rij $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ noemen we een Cauchy-rij als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ er een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Laat R de verzameling van alle Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ zijn. Voor $a \in R$ zeggen we dat a limiet 0 heeft als voor alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ er een

$N \in \mathbb{N}$ is zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n| < \varepsilon$. Op R hebben we dan de volgende equivalentierelatie:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ heeft limiet } 0.$$

Men kan nu bewijzen:

IV.4.10 Propositie. De afbeelding $R \to \mathbb{R}$ die een Cauchy-rij a naar zijn limiet afbeeldt is een quotiëntafbeelding voor de equivalentierelatie $\sim$.

Deze propositie suggereert dat we $\mathbb{R}$ kunnen *construeren* als het quotiënt $R/\sim$. De equivalentieklassen van de constante rijen 0 en 1 geven elementen 0 en 1 in $R/\sim$, en het optellen en vermenigvuldigen van Cauchyrijen gaat over op operaties $+$ and $\cdot$ op het quotiënt $R/\sim$. Voor rijen $a, b \in R$ definiëren we $a > b$ als volgt: er is een $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ en een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ geldt dat $a_n > b_n + \varepsilon$. Ook deze relatie gaat over op het quotiënt $R/\sim$. Het is veel werk, maar niet echt moeilijk, te laten zien dat $(R/\sim, 0, 1, +, \cdot, >)$ aan alle axioma's **(R0)**–**(R13)** voldoet.

Opgaven

✍ **1.** Bewijs Propositie IV.4.7 (i).

2. Zij $x \leq -1$. Heeft de rij $(x^n)_{n\geq 0}$ een convergente deelrij?

3. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$ een reële rij zijn. Bewijs dat $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat

$$\text{voor alle } n \geq N: \quad |a_n - a_N| < \varepsilon.$$

✍ **4.** Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij in $\mathbb{R}$. Toon aan: als $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, dan geldt $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ voor iedere deelrij $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ van $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

5. Laat $(x_n)_{n\geq 0}$ een reële Cauchy-rij is zijn en neem aan dat een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ bestaat die naar $a \in \mathbb{R}$ convergeert. Bewijs dat $(x_n)_{n\geq 0}$ ook een convergente rij is met de limiet a.

Intervalneststelling **6.** Laat $(I_n)_{n\geq 0}$ een rij niet-lege intervallen zijn.

(a) Toon het volgende aan:

Als voor elke $n \geq 0$, I_n gesloten is en $I_n \supseteq I_{n+1}$, dan is $\bigcap_{n\geq 0} I_n$ niet-leeg.

(b) Wat gebeurt er als we *gesloten* door *open* vervangen?

☆✍ **7.** Toon aan dat een begrensde rij in $\mathbb{R}$ dan en slechts dan convergent is als alle convergente deelrijen van de rij dezelfde limiet hebben.

8. Laat $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ en $(c_n)_{n\geq 0}$ reële rijen zijn. Bewijs of weerleg:

(a) Als $(a_n)_{n\geq 0}$ niet naar boven begrensd is dan is ook geen van zijn deelrijen naar boven begrensd.

(b) Als $b \in \mathbb{R}$ een bovengrens van $(b_n)_{n\geq 0}$ is dan heeft elke van zijn deelrijen ook b als een bovengrens.

(c) Als $c \in \mathbb{R}$ het supremum van $(c_n)_{n\geq 0}$ is dan heeft elke van zijn deelrijen ook c als een supremum.

✍ **9.** Bewijs rechtstreeks uit de definitie: Als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ reële Cauchy-rijen zijn dan is ook $(x_n + y_n)_{n\geqslant 0}$ een Cauchy-rij.

10. Noem twee Cauchy-rijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ equivalent als

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Laat zien dat dit een equivalentie-relatie is.

✍ **11.** Construeer een reële rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ met de eigenschap dat iedere $x \in [0,1]$ de limiet is van een deelrij van $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

12. Laat zien dat er Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ bestaan die geen limiet in $\mathbb{Q}$ hebben.

IV.5 De exponentiële functie

De exponentiële functie e^x (en algemener a^x met $a > 0$), is iedereen bekend. Maar hoe is deze functie precies gedefinieerd? En hoe leid je de bekende eigenschappen van de e-macht af? In deze paragraaf geven we antwoorden op deze vraag. Er zijn echter vele equivalente definitie van de e-macht, zoals we zullen zien in andere paragrafen.

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ We onderzoeken eerst de rij met termen $(1+x/n)^n$ waarbij $n = 1, 2, \ldots$ en $x \in \mathbb{R}$.

IV.5.1 Lemma. Zij $x \in \mathbb{R}$. Zij $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $1+x/n > 0$. Dan geldt $\Big((1+x/n)^n\Big)_{n\geqslant N}$ is een stijgende rij en $(1+x/n)^n > 0$ voor alle $n \geq N$.

Bewijs. Uit de Ongelijkheid van Meetkundig en Rekenkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) met $n+1$ elementen volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot 1 \\
&\leq \left(\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)+\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt ook dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $(1+x/n)^n \geq (1+x/N)^N > 0$. ∎

IV.5.2 Lemma. Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan is de rij $\Big((1+x/n)^n\Big)_{n\geqslant 1}$ naar boven begregensd.

Bewijs. Neem $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zó dat $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ voor alle $n \geq N$. Uit Lemma IV.5.1 volgt dat $\Big((1-x/n)^n\Big)_{n\geqslant N}$ is stijgend en $(1-x/n)^n > 0$ voor alle $n \geq N$. Hieruit volgt dat $\left(\frac{1}{(1-x/n)^n}\right)_{n\geq N}$ een dalende rij is en in het bijzonder geldt voor alle $n \geq N$ dat

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{(1-x/n)^n} \leq \frac{1}{(1-x/N)^N} = \left(1-\frac{x}{N}\right)^{-N}. \tag{IV.4}$$

Merk nu op dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right) = 1-\frac{x^2}{n^2} \leq 1,$$

en dus voor alle $n \geq 1$ geldt

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq 1.$$

Uit dit laatste en (IV.4) vinden we dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \left(1-\frac{x}{N}\right)^{-N}.$$

Conclusie: $\Big((1+x/n)^n\Big)_{n\geqslant N}$ is naar boven begrensd. Hieruit volgt het gevraagde. ∎

IV.5.3 Stelling. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is de rij $\Big((1+x/n)^n\Big)_{n\geqslant N}$ convergent.

Bewijs. Dit volgt uit bovenstaande twee lemmas en de Monotone Convergentiestelling IV.3.3. ∎

IV.5.4 Definitie. De exponentiële functie $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n.$$

exp

Voor $x \in \mathbb{R}$ en zien we uit bovenstaande lemmas dat voor $n \in \mathbb{N}$ voldoende groot $\exp(x) \geq \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n$ en dus $\exp(x) > 0$. Als $x > 0$ dan geldt zelfs dat $\exp(x) > 1$. Ook geldt dat $\exp(0) = 1$.

IV.5.5 Stelling. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Bewijs. Neem $x, y \in \mathbb{R}$ vast. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > (1+|x|)(1+|y|)$ om te garanderen dat in de onderstaande berekening alle getallen positief zijn. Kies $n \geq N$ willekeurig. Uit de Ongelijkheid van het Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde (zie Opgave III.2.19) volgt dat

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{x+y}{n-1}\Big)^{n-1}\Big(1+\frac{xy}{n}\Big) &\leq \Big[\frac{(n-1)\big(1+\frac{x+y}{n-1}+\big(1+\frac{xy}{n}\big)\big)}{n}\Big]^n\\ &= \Big[\frac{n+x+y+\frac{xy}{n}}{n}\Big]^n = \Big[1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\Big]^n\\ &= \Big[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{y}{n}\Big)\Big]^n.\end{aligned}$$

Dus we vinden dat

$$\Big(1+\frac{x+y}{n-1}\Big)^{n-1} \leq \Big[\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{y}{n}\Big)\Big]^n$$

voor alle $n \geq N$. Door het nemen van limieten volgt dat

$$\exp(x+y) \leq \exp(x)\exp(y).$$

Om de omgekeerde ongelijkheid te vinden kun je een zelfde argument gebruiken. Er geldt

$$\begin{aligned}\Big(\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\Big(\Big(1+\frac{y}{n}\Big)^n &\leq \Big[\frac{n\Big(1+\frac{x}{n}\Big)+n\Big(1+\frac{y}{n}\Big)}{2n}\Big]^{2n}\\ &= \Big[\frac{2n+x+y}{2n}\Big]^{2n} = \Big[1+\frac{x+y}{2n}\Big]^{2n}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\exp(x+y) \geq \exp(x)\exp(y)$. We kunnen dus concluderen dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. ∎

Herhaald toepassen van Stelling IV.5.5 geeft dat $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$.

Het getal e definiëren we als $e = \exp(1)$, dus

$$e = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Er volgt dat $\exp(m) = e^m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$.

Neem $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Uit Stelling IV.5.5 volgt dat

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right)^q = \exp\left(q\frac{p}{q}\right) = \exp(p).$$

Dus $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp(p)^{1/q} = [\exp(1)^p]^{1/q} = e^{p/q}$. Stelling IV.5.5 geeft dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Dus $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Als we bovenstaande combineren zien we dat

$$\exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Dit motiveert de schrijfwijze $e^x = \exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgaven

✍ **1.** Bewijs dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

★✍ **2.** Bewijs: als $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij is zó dat $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$ dan geldt

$$\lim_{n\to\infty}(1 + x_n)^n = 1.$$

✍ **3.** Geef met behulp van Opgave IV.5.2 een alternatief bewijs van de regel $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ voor $x, y \in \mathbb{R}$.

V CONTINUÏTEIT

In dit hoofdstuk bestuderen we continue reëelwaardige functies op deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We leiden een aantal belangrijke eigenschappen af en laten zien dat elke continue functie op een gesloten en begrensd interval uniform continu is.

V.1 Continue functies

We beginnen met de definitie van continuïteit. Erg informeel gezegd betekent continuïteit zoiets als: kleine oorzaken hebben kleine gevolgen. Deze betekenis geeft dan ook meteen het maatschappelijk nut aan van dit begrip, waar men bang is voor kleine oorzaken met grote gevolgen. Nu de formele definitie.

V.1.1 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f\colon D \to \mathbb{R}$. Laat $c \in D$.

(i) We noemen f *continu in het punt* c als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } |x - c| < \delta : \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

We noemen $f\colon D \to \mathbb{R}$ *continu* als f continu is in ieder punt van D.

(ii) We zeggen dat f *linkscontinu in het punt* c is indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } c - \delta < x \leqslant c : \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

(iii) We zeggen dat f *rechtscontinu in het punt* c is indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } c \leqslant x < c + \delta : \quad \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon.$$

(iv) Als f niet continu is in het punt c dan noemen we $f : D \to \mathbb{R}$ *discontinu in het punt* c.

V.1.2 Opmerking. Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ is continu in c dan en slechts dan als f links- en rechtcontinu is in c. Zie Opgave V.1.6.

V.1.3 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = |x|$ is continu in elke $c \in \mathbb{R}$. We zoeken voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x - c| < \delta$ geldt $\big||x| - |c|\big| < \varepsilon$. We gaan hiervoor de omgekeerde driehoeksongelijkheid $\big||x| - |c|\big| \leqslant |x - c|$ gebruiken (zie Gevolg III.2.12).

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon$. Neem aan dat $x, c \in \mathbb{R}$ en $|x - c| < \delta$. Er volgt

$$|f(x) - f(c)| = \big||x| - |c|\big| \leqslant |x - c| < \varepsilon.$$

Dus f is continu. ▬

V.1.4 Voorbeeld. De functie $f\colon (-1,0) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,0) \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

is continu, want het volgt onmiddellijk uit de definitie dat f continu is in ieder punt van $(-1,0)$ en $(0,1)$.

Daarentegen is de functie $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,0] \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

niet continu, want f is niet continu in het punt 0. Inderdaad, neem bijvoorbeeld $\varepsilon = 1/2$. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Neem $x\delta/2$. Dan geldt $|x - 0| = |x| < \delta$ en

$$\big|f(x) - f(0)\big| = |f(x)| = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

▬

De volgende stelling geeft het verband tussen continuïteit en limieten van rijen.

V.1.5 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$ gegeven zijn. Voor een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

(i) f is continu in het punt c;
(ii) voor iedere rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ in D met $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): Neem aan dat f continu is in c, en zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij in D met $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Zij $\varepsilon > 0$. Omdat f continu is in c is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $\big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon$. Wegens $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n \geqslant N$ geldt dat $|x_n - c| < \delta$. Hieruit volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt $\big|f(x_n) - f(c)\big| < \varepsilon$. Dit laat zien dat $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neem eens aan dat f niet continu is in c. Dan is er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap: voor iedere $n \geq 1$ bestaat een punt $x_n \in D$, met de eigenschap $|x_n - c| < 1/n$ en $\big|f(x_n) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon$. De resulterende rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ligt in D en voldoet aan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, maar de rij $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ convergeert niet naar $f(c)$. ■

Met behulp van deze stelling kunnen we uit de rekenregels voor limieten van rijen overeenkomstige rekenregels voor continue functies afleiden (vergelijk Stelling IV.2.1).

Rekenregels voor continuïteit

V.1.6 Stelling. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Als $f\colon D \to \mathbb{R}$ en $g\colon D \to \mathbb{R}$ twee functies zijn die continu zijn in het punt $c \in D$, en $\alpha \in \mathbb{R}$ is een reëel getal, dan geldt

(i) αf is continu in c.
(ii) $f + g$ is continu in c.
(iii) fg is continu in c.
(iv) Als $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$, dan is $1/f$, $x \mapsto 1/f(x)$ continu in c.
(v) $|f|$ is continu in c.

V.1.7 Voorbeeld. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ is continu op $\mathbb{R}$ (neem $\delta = \varepsilon$ in de definitie van continuïteit). Uit (iii) volgt dan dat, voor iedere gehele $k \geqslant 1$, de functie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^k = x \cdot \cdots \cdot x$ (k maal) continu is op $\mathbb{R}$. ▬

V.1.8 Stelling. Laat D en E twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, en laat $f\colon D \to \mathbb{R}$ en $g\colon E \to \mathbb{R}$ twee functies zijn, met $f[D] \subseteq E$. Laat $c \in D$. Als f continu is in c, en g continu is in $f(c)$, dan is de samengestelde functie[1] $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ continu in c.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een rij met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Dan volgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ omdat f continu is in c, en omdat g continu is in $f(c)$ volgt dan meteen dat

$$\lim_{n\to\infty} \big(g \circ f\big)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(c)\big).$$

■

Opgaven

1. Bewijs aan de hand van de definitie van continuïteit dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ continu is:

(a) in het punt 0;

(b) in het punt -1;

✍ (c) op $\mathbb{R}$.

2. Toon aan dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

continu is. Gebruik de 'rekenregels' voor continuïteit.

✍ **3.** Is de functie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = 1/x$$

continu?

4. Bewijs met behulp van de definitie van de continuïteit dat de functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ continu is.

✍ **5.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$, en laat $f : D \to \mathbb{R}$ functie zijn die continu is in c. Bewijs of weerleg;

(a) Als $f(c) > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) \geq 0$

(b) Als $f(c) \geq 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) \geq 0$

6. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Laat $c \in (a,b)$.
Bewijs: f is continu in c dan en slechts dan als f rechts- en linkscontinu in c is.

✍ **7.** Bewijs Stelling V.1.6.

✍ **8.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ heet *Lipschitz continu* als er een $K \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in D$ geldt

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq K|x - y|.$$

De constante K wordt de Lipschitz constante van f genoemd.
Bewijs: een Lipschitz continue functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ is continu.

9. Geef een voorbeeld van een $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die continu is, maar niet Lipschitz continu.

10. Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bewijs dat f in geen $x \in \mathbb{R}$ continu is.

✯**11.** Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat f continu in 0 is

(b) Bewijs dat f in geen enkel ander punt continu is.

[1] Strikt genomen kunnen we g en f niet samenstellen, want $f\colon D \to \mathbb{R}$, en $g\colon E \to \mathbb{R}$, dus het domein van g is niet het codomein van f. Maar het beeld van f is bevat in E, dus voor iedere x in D is $g(f(x))$ goed gedefinieerd.

V.2 Limieten van functies

Beschouw een deelverzameling $D \subseteq \mathbb{R}$, een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ en zij $c \in \mathbb{R}$. We willen het gedrag van f in de buurt van c bestuderen. De functiewaarde in c is daarvoor niet belangrijk, de functie hoeft in c zelfs niet gedefinieerd te zijn (want c hoeft geen element van D te zijn). Wat wel nodig is, is de mogelijkheid het punt c met behulp van punten uit D willekeurig nauwkeurig te kunnen benaderen. Dit leidt tot de volgende definitie.

V.2.1 Definitie. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ en zij $c \in \mathbb{R}$. We noemen c een *verdichtingspunt*[2] van D als er voor iedere $\delta > 0$ een $x \in D \setminus \{c\}$ bestaat met $|x - c| < \delta$.

Intuïtief betekent dit dat willekeurig "dicht" bij c kunnen komen binnen de verzameling $D \setminus \{c\}$.

We zijn voornamelijk geïnteresseerd in de volgende situaties.

V.2.2 Voorbeeld. Laat a, b en c reële getallen zijn.

(i) Als $a < b$ en $a \leqslant c \leqslant b$, dan is c verdichtingspunt van de intervallen (a, b) en $[a, b]$.

(ii) Als $a < c < b$, dan is c een verdichtingspunt van het *gepuncteerde* interval $(a, b) \setminus \{c\}$.

V.2.3 Definitie. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, en $g\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en zij $c \in \mathbb{R}$.

(i) Neem aan dat c een verdichtingspunt van D is. We noemen een reëel getal L de *limiet van g in c* indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } 0 < |x - c| < \delta : \quad \bigl|g(x) - L\bigr| < \varepsilon.$$

We noteren dan

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

(ii) De *linkerlimiet*[3] wordt gedefinieerd door in het bovenstaande alleen $x \in D$ met $c - \delta < x < c$ te beschouwen. Notatie: $\lim_{x \uparrow c} g(x) = L$.

(iii) De rechterlimiet wordt gedefinieerd door in het bovenstaande alleen $x \in D$ met $c < x < c + \delta$ te beschouwen. Notatie: $\lim_{x \downarrow c} g(x) = L$.

V.2.4 Opmerking. (i) Merk op: als c een verdichtingspunt van D is, bevat $D \setminus \{c\}$ voor iedere $\delta > 0$ inderdaad punten waarvoor $|x - c| < \delta$. De limiet is dan uniek en we kunnen spreken van *de* limiet. Een soortgelijk argument laat zien dat ook linker en rechter limieten uniek zijn. Let wel: net als bij rijen hoeft een functie niet zulke limieten te hebben. Zie Voorbeeld V.2.7.

(ii) In de definitie van limiet mag $x \in D$ niet gelijk aan c genomen worden. Dit is uitgesloten doordat we eisen $0 < |x - c|$.

(iii) Een onmiddellijk gevolg van de definitie is de volgende karakterisering van continuïteit in termen van limieten: als $c \in D$ een verdichtingspunt is van D, dan is een functie $g\colon D \to \mathbb{R}$ is continu in c dan en slechts dan als $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ (zie Opgave V.2.1).

[2] Let wel: c hoeft niet zelf in D te liggen. En ook als $c \in D$ dan hoeft c nog geen verdichtingspunt van D te zijn.

[3] Dit betekent: limiet vanaf de linkerkant van c.

(iv) Analoog als voor rijen kunnen we $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ definiëren.

De volgende stelling geeft het verband tussen limieten van functies en limieten van rijen.

V.2.5 Stelling. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$, zij $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie, en zij $c \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D. Voor een reëel getal L zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

(ii) Voor iedere rij $(x_n)_{n \geqslant 0}$ in $D \setminus \{c\}$ met $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ geldt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Het bewijs gaat precies zo als het bewijs van Stelling V.1.5, we laten het daarom als een oefening, zie Opgave V.2.3.

V.2.6 Voorbeeld. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, gegeven zijn door $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. We tonen aan dat $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Merk op dat

$$f(x) = (x+1)(x-1)/(x-1) = x+1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Het is eenvoudig om te zien dat $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$. Hieruit volgt het gevraagde. ▬

V.2.7 Voorbeeld. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = 1/x$. Neem eens aan dat er een $L \in \mathbb{R}$ is met $\lim_{x \to 0} f(x) = L$. Zij $\varepsilon = 1$. Volgens de definitie van de limiet is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: als $0 < |x| < \delta$ dan $|f(x) - L| < \varepsilon$. We nemen zo'n δ. Dan geldt, voor $x \in (0, \delta)$, dat $f(x) \in (L-1, L+1)$. Maar $f[(0, \delta)] = (1/\delta, \infty)$. Dit is een tegenspraak. Dus heeft f geen limiet in 0. ▬

De volgende rekenregels voor limieten kunnen direct worden afgeleid uit Stelling V.2.5 en de rekenregels voor limieten van rijen.

V.2.8 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, en $a \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D. Neem aan dat $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Dan

(i) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

(ii) $\lim_{x \to a}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot M$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.

(iv) Als $M \neq 0$, dan $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$.

(v) $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

(vi) Als voor alle $x \in D$: $f(x) \leq g(x)$, dan $L \leq M$.

V.2.9 Opmerking.

(i) Ook geldt er weer een insluitstelling voor de limieten die we hier beschouwen. Probeer deze zelf te formuleren.

(ii) De bovenstaande rekenregels gelden ook voor linker- en rechterlimieten.

We kunnen ook limieten van functies bewijzen voor $x \to \infty$ of $x \to -\infty$. De precieze definitie is als volgt:

V.2.10 Definitie. Voor $a \in \mathbb{R}$ en een functie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ zeggen we dat

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

als voor elke $\varepsilon > 0$ een $M \geq a$ bestaat zó dat voor alle $x \geq M$ geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. De definitie van $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ gaat analoog.

Voor deze limieten gelden ook weer de rekenregels van Stelling V.2.8. Analoog als voor rijen kunnen we $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ definiëren.

Monotone functies

Als een functie $f : D \to \mathbb{R}$ niet continu is in een verdichtingspunt $c \in D$ dan kan de zogenoemde discontinuït van f in c verschillende vormen hebben. Zo kan het bijvoorbeeld zijn dat $\lim_{x \uparrow c} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ beide niet bestaan (zie Opgave V.2.13). Het kan ook gebeuren dat f niet continu is in c, maar $\lim_{x \uparrow c} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ bestaan wel.

V.2.11 Voorbeeld. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ x + 1 & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

Er geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$. Dus f is niet continu wegens Opmerking V.2.4. ∎

V.2.12 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Een reële functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we:

(i) *stijgend* als voor alle $x, y \in D$ uit $x < y$ volgt dat $f(x) \leq f(y)$.
(ii) *strikt stijgend* als voor alle $x, y \in D$ uit $x < y$ volgt dat $f(x) < f(y)$.

Dalende en *strikt dalende* functies definiëren we analoog.
Een functie die stijgend of dalend is wordt *monotoon* genoemd

V.2.13 Definitie. Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we *naar boven begrensd (naar beneden begrensd))* als er een $M \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ geldt dat $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$). Een naar boven en beneden begrensde functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we *begrensd.*

V.2.14 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een stijgende en naar boven begrensde functie is, dan bestaat $\lim_{x \uparrow b} f(x)$. Bovendien geldt dat

$$\lim_{x \uparrow b} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Bewijs. Laat $M = \sup\{f(x) : x \in (a, b)\}$. We bewijzen dat $\lim_{x \uparrow b} f(x) = M$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien $M - \varepsilon$ geen bovengrens is voor $\{f(x) : x \in (a, b)\}$ bestaat er een $x_1 \in (a, b)$ zó dat $f(x_1) > M - \varepsilon$. Neem $\delta = b - x_1$. Er volgt dat voor alle $x \in (a, b)$ met $b - \delta < x < b$ geldt

$$|f(x) - M| = M - f(x) \leq M - f(x_1) < \varepsilon.$$

∎

V.2.15 Opmerking. Analoog als in Stelling V.2.14 kunnen we laten zien dat $\lim_{x \downarrow b} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (a, b)\}$ voor dalende naar beneden begrensde functies f.

V.2.16 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een stijgende en naar boven begrensde functie is, dan geldt dat voor elke $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) \quad \text{en} \quad \lim_{x \downarrow c} f(x) \ \text{ bestaan}$$

en er geldt

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \downarrow c} f(x).$$

In het bijzonder zijn de enige discontinuïteiten van f punten $c \in (a, b)$ waar geldt

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) < \lim_{x \downarrow c} f(x).$$

Opgaven

1. Zij c een verdichtingspunt van D. Bewijs dat een functie $g \colon D \to \mathbb{R}$ continu in c is dan en slechts dan als

$$\lim_{x \to c} g(x) = g(c).$$

2. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat als

(a) $a = -1$, en $f \colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$;

(b) $a = 2$, en $f \colon \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^3 - 3x - 2)/(x^2 - 3x + 2)$;

(c) $a = 0$, en $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (x^2 + x)/x$.

3. Bewijs Stelling V.2.5.

✍ **4.** Definieer $f \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestaat $\lim_{x \to 0} f(x)$? Zo ja, wat is de waarde van de limiet? Zo nee, waarom niet?

(b) Is f continu in 0?

✍ **5.** Laat $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Bewijs dat $\lim_{x \to 0} f(x)$ niet bestaat met behulp van Stelling V.2.5.

6. Laat $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x/|x|$. Bepaal of de $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestaat.

7. Bewijs Stelling V.2.8.

8. Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een functie en $c \in D$ een verdichtingspunt van D. Neem aan dat $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$ en $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$. Toon aan dat $\lim_{x \to c} 1/f(x) = 0$.

9. Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een functie. Bewijs de volgende uitspraken:

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{x \downarrow 0} f(\frac{1}{x})$ bestaat, en in dat geval geldt $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(\frac{1}{x})$.

(b) $\lim_{x \to 0} f(|x|)$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ bestaat, en in dat geval geldt $\lim_{x \to 0} f(|x|) = \lim_{x \downarrow 0} f(x)$

✍**10.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en $c \in D$ een verdichtingspunt. Bewijs met de definitie van limiet: Als $f(c) < 0$ en $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) < 0$.

✍**11.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Laat $c \in (a, b)$ en $L \in \mathbb{R}$. Bewijs: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan en slechts dan als $\lim_{x \uparrow c} f(x) = \lim_{x \downarrow c} f(x) = L$.

12. Herinner dat $D \subseteq \mathbb{R}$ een open verzameling is als er voor elke $x \in D$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq D$. Zij D een open verzameling. Toon aan dat elke $x \in D$ een verdichtingspunt is.

13. Laat $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Toon aan dat $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ beide niet bestaan.

14. Geef de details van het bewijs van Gevolg V.2.16.

✍**15.** Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend zijn. Toon het volgende aan: als $f\big[[a, b]\big]$ een interval is, dan is f continu.

V.3 Uniforme continuïteit

De continuïteit van $f\colon D \to \mathbb{R}$ betekent dat we voor iedere $c \in D$ en iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ kunnen vinden met de volgende eigenschap:

$$\text{voor alle } \ x \in D \ \text{ met } \ |x-c| < \delta \quad \text{geldt } \ \bigl|f(x) - f(c)\bigr| < \varepsilon.$$

Deze δ is afhankelijk van ε en c. We vragen ons nu het volgende af: wanneer bestaat er een δ die *onafhankelijk van c* is?

uniform continue functie

V.3.1 Definitie. Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ heet *uniform continu* als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } \ x, y \in D \ \text{ met } \ |x-y| < \delta \quad \text{geldt } \ \bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon.$$

Het volgt meteen uit deze definitie dat een uniform continue functie continu is, zie Opgave V.3.1.

V.3.2 Voorbeeld. Zij $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. We bewijzen dat f uniform continu is. Laat $\varepsilon > 0$. We nemen $\delta = \varepsilon/2$. Voor alle $x, y \in [0,1]$ met $|x-y| < \delta$ geldt dan

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = |x^2 - y^2| = |x-y| \cdot |x+y| \leqslant 2|x-y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Niet iedere continue functie is echter uniform continu.

V.3.3 Voorbeeld. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$. We beweren dat f niet uniform continu is. Immers, neem $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$. Neem nu $x = 1/\delta$ en $y = 1/\delta + \delta/2$. Voor zulke x en y geldt dan $|x-y| < \delta$ en

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| = |x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y| = \frac{1}{2}\delta|x+y| \geqslant \frac{1}{2}\delta \cdot \frac{2}{\delta} = 1 = \varepsilon.$$

De uniforme continuïteit in het eerste voorbeeld is geen toeval: er geldt de volgende algemene stelling.

V.3.4 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Iedere continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is uniform continu.

Bewijs. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en stel eens dat f niet uniform continu is. We zullen een tegenspraak afleiden.

Omdat f niet uniform continu is, kunnen we niet voor alle $\varepsilon > 0$ een zodanige $\delta > 0$ vinden dat voor alle $x, y \in [a,b]$ met $|x-y| < \delta$ geldt $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon$.

Er is dus een $\varepsilon > 0$ waarvoor géén $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in [a,b]$ met $|x-y| < \delta$ geldt $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon$.

Er is dus een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor er voor alle $\delta > 0$ een tweetal punten $x, y \in [a,b]$ bestaat waarvoor wèl geldt dat $|x-y| < \delta$, maar niet $\bigl|f(x)-f(y)\bigr| < \varepsilon$.

We nemen nu zo'n ε, en voor δ achtereenvolgens 1, 1/2, 1/3, enzovoort. Voor iedere $n \geqslant 0$ vinden we zo een tweetal punten $x_n, y_n \in [a,b]$ met

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{en} \quad \bigl|f(x_n) - f(y_n)\bigr| \geqslant \varepsilon. \tag{V.1}$$

De rij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd, en met Stelling IV.4.3 van Bolzano-Weierstrass vinden we een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$. Zij x de limiet van deze deelrij. Dan is $x \in [a,b]$. Voor alle $k \geqslant 0$ geldt

$$|y_{n_k} - x| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leqslant \frac{1}{n_k+1} + |x_{n_k} - x|.$$

Wegens $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ volgt hieruit dat de rij $(y_{n_k})_{k\geqslant 0}$ eveneens convergeert en dat

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x.$$

Omdat f continu is, levert dit

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Uit de definitie van een convergente rij volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met de volgende eigenschap: voor alle indices $k \geq N$ geldt

$$\big|f(x_{n_k}) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{en} \qquad \big|f(y_{n_k}) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maar voor deze k volgt dan

$$\big|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big| \leqslant \big|f(x_{n_k}) - f(x)\big| + \big|f(x) - f(y_{n_k})\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deze tegenspraak besluit het bewijs. ■

Opgaven

1. Bewijs dat een uniform continue functie continu is.

✍ **2.** Toon aan met behulp van de definitie dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = 5x$$

uniform continu is.

✍ **3.** Laat zien dat de functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ niet uniform continu is.

4. Toon aan dat iedere Lipschitz continue functie uniform continu is (vergelijk Opgave V.1.8).

5. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan:

(a) $f + g$ is uniform continu.

✍ (b) Als f en g begrensd zijn, dan is fg uniform continu.

(c) Geef een voorbeeld waarin f en g uniform continu zijn en fg niet.

☆✍ **6.** Stel $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ is uniform continu. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat.

7. Definieer $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \sqrt{x}$. Bewijs, direct met de definities, dat f uniform continu is, maar niet Lipschitz continu.

8. Toon aan dat dat de functie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ niet uniform continu is.

☆ **9.**

(a) Geef een voorbeeld van een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

(b) Geef een voorbeeld van een functie $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ die continu en begrensd is maar niet uniform continu.

10. Laat $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan dat f begrensd is.

☆**11.** Laat $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Toon aan dat er een unieke continue functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ bestaat zó dat $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in (0,1)$.

V.4 Eigenschappen van continue functies

We bestuderen een paar belangrijke stellingen over continue functies.

Maxima en minima

De stelling over continue functies die we in deze paragraaf bewijzen zegt dat een continue functie op een begrensd en gesloten interval altijd ergens een maximum en een minimum aanneemt. Om dit te bewijzen hebben we het volgende nodig.

V.4.1 Propositie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \le b$. Als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is f begrensd.

Bewijs. Neem aan dat f niet naar boven begrensd is. Kies voor iedere $n \geqslant 0$ een $x_n \in [a,b]$ met $f(x_n) \geqslant n$. Met behulp van de Bolzano-Weierstrass stelling vinden we een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geqslant 0}$ van $(x_n)_{n \geqslant 0}$. Noem de limiet van deze deelrij x; merk op dat $x \in [a,b]$. Dan geldt dat $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Aan de andere kant geldt $(f(x_{n_k}))_{n \geq 0}$ is onbegrensd, omdat $f(x_{n_k}) \geqslant n_k$. Dit is een tegenspraak. Dus f is wel naar boven begrensd.

Door het bovenstaande toe te passen op $-f$ volgt dat f naar beneden begrensd is. ∎

V.4.2 Stelling (Bolzano, 1917)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \le b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan bestaat er $x_1, x_2 \in [a,b]$ zó dat

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \text{voor alle } x \in [a,b].$$

Met andere woorden f neemt zijn maximum en minimum aan.

Bewijs. We laten zien dat f zijn maximum aanneemt. Bekijk de verzameling $V = \{f(x) : x \in [a,b]\}$. Uit Propositie V.4.1 weten we dat V naar boven begrensd is. Zij

$$M = \sup V.$$

We moeten laten dat er een $x_2 \in [a,b]$ bestaat met $f(x_2) = M$. Stel dat zo'n x_2 niet bestaat. Dan geldt $f(x) < M$ voor alle $x \in [a,b]$. Bekijk nu de functie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Uit Stelling V.1.6 (v) volgt dat g continu is. In het bijzonder zien we uit Propositie V.4.1 dat g begrensd is. Dus er bestaat een $K > 0$ zó dat $g(x) \le K$. Er volgt

$$\frac{1}{M - f(x)} \le K, \quad \text{dus} \quad M - f(x) \ge \frac{1}{K} > 0 \quad \text{voor alle } x \in [a,b].$$

Dit geeft dat $f(x) \le M - \frac{1}{K} < M$ voor alle $x \in [a,b]$. Maar dan is $M - \frac{1}{K}$ een kleinere bovengrens voor V. Tegenspraak.

Conclusie: er bestaat een $x_2 \in [a,b]$ zó dat $f(x_2) = M$.

Door bovenstaande toe te passen op $-f$ vinden we dat f zijn minimum aanneemt. ∎

Nulpunten

Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, en $f\colon D \to \mathbb{R}$. Een punt $x \in D$ waarvoor geldt dat $f(x) = 0$ noemen we een *nulpunt* van f. De volgende stelling laat zien dat een continue functie die op een interval van teken wisselt, altijd een nulpunt heeft.

Nulpuntstelling

V.4.3 Stelling (Nulpuntstelling)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $f(a) < 0 < f(b)$. Dan is er een $\xi \in (a,b)$ waarvoor geldt $f(\xi) = 0$.

Bewijs. Zij $V = \{x \in [a,b] : f(x) \leqslant 0\}$. Wegens $a \in V$, is V niet-leeg, en duidelijk is dat b een bovengrens voor V is. Dus bestaat $\xi = \sup V$, en er geldt $\xi \in [a,b]$. We tonen aan dat $f(\xi) = 0$.

Voor $n = 1, 2, \ldots$ is $\xi - \frac{1}{n}$ geen bovengrens van V, en dus bestaat er een $x_n \in V$ met $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$. Hieruit zien we dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Uit de continuïteit van f volgt dus dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Aangezien $f(x_n) < 0$ voor alle $n \geq 1$ geldt dat $f(\xi) \leq 0$.

Merk op dat wegens $f(\xi) \leq 0$ ook geldt dat $\xi < b$. We bewijzen nu $f(\xi) \geq 0$. Voor $n \geq 1$ voldoende groot geldt dat $\xi + \frac{1}{n} \leq b$. Aangezien $\xi + \frac{1}{n} > \xi$ volgt dat $\xi + \frac{1}{n} \notin V$ en dus $f(\xi + \frac{1}{n}) \geq 0$ voor alle $n \geq 1$ voldoende groot. Omdat $\lim_{n\to\infty} \xi + \dfrac{1}{n} = \xi$ volgt uit de continuïteit van f dat $f(\xi) \geq 0$.

We hebben bewezen dat $f(\xi) = 0$. Aangezien $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$ moet gelden dat $\xi \in (a,b)$.

■

V.4.4 Opmerking. Door $-f$ in plaats van f te beschouwen zien we dat een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ met $f(b) < 0 < f(a)$ ook altijd een nulpunt heeft.

Het belang van de Nulpuntstelling is gelegen in het feit dat zij het bestaan van nulpunten garandeert, ook wanneer deze moeilijk of zelfs niet expliciet bepaald kunnen worden.

V.4.5 Voorbeeld. Beschouw de vergelijking $e^{-\frac{1}{2}x} = x$. We onderzoeken of dit oplossingen $x \in \mathbb{R}$ heeft. Het is duidelijk dat als er een oplossing is, deze in $[0, \infty)$ moet liggen. Bekijk de functie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - x$. Dan geldt $f(0) = 1$ en $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 1 - 1 = 0$. In Paragraaf V.5 zullen we zien dat $x \mapsto e^x$ (en dus ook f) een continue functie is. Uit de nulpuntstelling volgt dat er een $x_0 \in (0,1)$ is zó dat $f(x_0) = 0$. Dat wil zeggen $e^{-\frac{1}{2}x_0} = x_0$. In dit geval is het eenvoudig te zien dat er maar één oplossing is, omdat f strikt dalend is en dus injectief.

V.4.6 Voorbeeld. We gebruiken de Nulpuntstelling om te bewijzen dat ieder 3e-graads reëel polynoom p een reëel nulpunt heeft. Na delen door de kopcoëfficiënt is het polynoom van de vorm $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, met a, b, c in $\mathbb{R}$. Wegens

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) = 1$$

is er een $\xi_1 > 0$ zodanig dat $p(\xi_1)/\xi_1^3 > 1/2$. Dan geldt $p(\xi_1) > \xi_1^3/2 > 0$. Op dezelfde manier volgt uit $\lim_{x\to-\infty} p(x)/x^3 = 1$ dat er een $\xi_0 < 0$ bestaat met $p(\xi_0)/\xi_0^3 > 1/2$, zodat $p(\xi_0) < \xi_0^3/2 < 0$. Uit de Nulpuntstelling volgt dan dat p een nulpunt heeft in het interval $[\xi_0, \xi_1]$.

Vaak is het handig om de volgende, iets algemenere, variant van de Nulpuntstelling tot onze beschikking te hebben:

Tussenwaardestelling

V.4.7 Gevolg (Tussenwaardestelling)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie, en neem aan dat $f(a) \leqslant f(b)$. Dan geldt: voor iedere t in $[f(a), f(b)]$ bestaat een $c \in [a,b]$ met $f(c) = t$.

Bewijs. Als $f(a) = C$ of $f(b) = C$ is er niets te bewijzen. Als $f(a) < C < f(b)$, pas dan de Nulpuntstelling toe op de functie $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = f(x) - C$. ■

Combinatie van Stellingen V.4.2 en V.4.7 levert het volgende op:

V.4.8 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan geldt $f\big[[a, b]\big] = [m, M]$, waarbij $m \in \mathbb{R}$ het minimum van f is en $M \in \mathbb{R}$ het maximum van f is.

Herinner dat $f\big[[a, b]\big]$ het beeld van de verzameling $[a, b]$ is:

$$f\big[[a, b]\big] = \{y \in \mathbb{R} : \text{er bestaat een } x \in [a, b] \text{ met } y = f(x)\}.$$

Bewijs. Volgens Stelling V.4.2 bestaan er $x_1, x_2 \in [a, b]$ zó dat

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M \quad \text{voor alle } x \in [a, b].$$

Als $x_1 = x_2$, dan is f constant, en dus bestaat $f\big[[a, b]\big]$ uit één punt.

Stel nu dat $x_1 < x_2$. Volgens de Tussenwaardestelling (toegepast op het interval $[x_1, x_2]$ geldt dat f alle waarden tussen $[m, M]$ aanneemt. We zien dus dat $[m, M] = f([x_1, x_2]) \subseteq f\big[[a, b]\big] \subseteq [m, M]$. Dus $f\big[[a, b]\big] = [m, M]$.

Het geval $x_1 > x_2$ gaat analoog. ∎

Inverse functies

We kunnen de bovenstaande stellingen gebruiken om het bestaan te bewijzen van reële getallen met bepaalde eigenschappen. Algemener kunnen we ze gebruiken om aan te tonen dat functies (continue) inverses hebben.

continue versie

V.4.9 Stelling (Inverse Functiestelling, continue versie)**.**
Laat $J = [a, b]$ een interval zijn, en $f : J \to \mathbb{R}$ een strikt stijgende continue functie. Definieer $I = f(J)$. Dan is $f : J \to I$ een bijectie, en de inverse functie $f^{-1} : I \to J$ is strikt stijgend en continu.

Bewijs. Uit Stelling V.4.8 volgt dat I een interval is. De surjectiviteit van f is duidelijk en de injectiviteit volgt uit het feit dat f strikt stijgend is. Dus de inverse $f^{-1} : I \to J$ bestaat. We laten eerst zien dat f^{-1} strikt stijgend is.

Stel $f(a) \leqslant y_1 < y_2 \leqslant f(b)$ en laat $x_1, x_2 \in [a, b]$ zijn met $f^{-1}(y_1) = x_1$ en $f^{-1}(y_2) = x_2$. Dan $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ en $x_1 \neq x_2$ (want $f(x_1) \neq f(x_2)$). Als $x_2 < x_1$ krijgen we een tegenspraak: $y_2 = f(x_2) < f(x_1) = y_1$. Er moet dus gelden dat $x_1 < x_2$ ofwel $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

We bewijzen nu de continuïteit. Zij $y_0 \in I$ en neem eerst aan dat y_0 geen eindpunt van I is. Zij $\varepsilon > 0$ en laat $x_0 = f^{-1}(y_0)$ zijn. Laat $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, x_0 - a, b - x_0\}$ zijn. Noem $x_1 = x_0 - \varepsilon'$ en $x_2 = x_0 + \varepsilon'$ en $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. Dan geldt $y_1 < y_0 < y_2$. Kies

$$\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}.$$

Kies $y \in I$ met $|y - y_0| < \delta$ willekeurig. Dan geldt $y_1 < y < y_2$, en dus

$$x_0 - \varepsilon' = x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 = x_0 + \varepsilon'.$$

Dit geeft $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Als $y_0 \in I$ een eindpunt is dan kun je op dezelfde manier laten zien dat f^{-1} links- of rechtscontinu is in y_0. ∎

V.4.10 Opmerking. Bovenstaand bewijs breidt uit naar het geval dat J een ander soort interval is (open, halfopen, oneindig, etc.).

Ter illustratie leiden we het bestaan van wortels af.

$\sqrt[k]{x}$

V.4.11 Voorbeeld. Zij $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 2$. De functie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gedefinieerd door $f(x) = x^k$ is continu en strikt stijgend en $f\big[[0, \infty)\big] = [0, \infty)$. Uit Stelling V.4.9 volgt dat f een continue inverse $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ heeft. Notatie: $\sqrt[k]{x} = f^{-1}(x)$ en ook $x^{\frac{1}{k}} = f^{-1}(x)$.

Tegelijkertijd bewijst dit de existentie van wortels: voor elke $x \geq 0$ bestaat een uniek reëel getal $y \geqslant 0$ met de eigenschap dat $y^k = x$. Neem maar $y = f^{-1}(x)$.[4]

Opgaven

✍ **1.** De functie $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 1/x$ is continu en voldoet aan $f(-1) = -1$ en $f(1) = 1$. Toch heeft f geen nulpunt. Leg uit waarom dit niet in strijd is met de Nulpuntstelling.

2. Bewijs dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan $2\sin(x) = x - 1$.

3. Bewijs dat iedere polynoomfunctie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van *oneven* graad een nulpunt heeft.

4. Beschouw de vergelijking

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-3)^5} = 0,$$

waarbij $a, b > 0$. Toon aan dat deze vergelijking tenminste één oplossing heeft in het interval $(1, 3)$.

✍ **5.** Bewijs dat $x^3 + 3x + 5 = 0$ op het interval $[-2, -1]$ precies één oplossing heeft.

6. Beschouw de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = x^6 - 3x + 1.$$

✍ (a) Bereken $f(0)$, $f(1/2)$ en $f(1)$.

(b) Toon aan dat f een nulpunt heeft.

(c) Ga na dat $f(x) \geqslant 1$ voor alle $x \leqslant 0$.

(d) Ga na dat $f(x) \geqslant -1$ voor alle $x \geqslant 1$.

(e) Toon aan dat f een minimum heeft, en dat dit minimum ergens wordt aangenomen in het interval $[0, 1]$.

7. Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \frac{x^8 + x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}.$$

(a) Toon aan dat f continu is. *Tip:* Gebruik stelling V.1.5. De definitie van continuïteit hoef je niet meer te gebruiken bij deze opgave.

(b) Bewijs dat f tenminste 2 nulpunten heeft.

(c) Toon aan dat $f(x) \geq 0$ als $x \leq -1$, en dat $f(x) \geq 0$ als $x \geq 2$

(d) Bewijs dat f een minimum heeft, en dat dit minimum ergens wordt aangenomen in het interval $[-1, 2]$.

✍ **8.** Laat $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ functies zijn en neem aan dat $g(x) = |f(x)|$. Neem aan dat g een maximum en een minimum heeft. Bewijs of weerleg:

(a) f heeft een maximum of een minimum.

(b) f heeft een minimum en een minimum.

✍ **9.** Laat $f : [a, b] \to [a, b]$ een continue functie zijn. Toon aan dat[5] er een $x \in [a, b]$ is zó dat $f(x) = x$.

10. Zij $J \subseteq \mathbb{R}$ een niet-leeg interval en $f : J \to \mathbb{R}$ een continue functie. Laat $m = \inf f[J]$ en $M = \sup f(J)$, waarbij we afspreken dat $m = -\infty$ als f niet naar beneden begrensd is, en $M = \infty$ als f niet naar boven begrensd is. Toon aan dat $f[J]$ een interval is met eindpunten m en M.

☆✍ **11.** Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Definieer $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ als

$$g(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}.$$

Toon aan dat g continu is.

12. Ga na welke van de volgende functies $f\colon V \to W$ een inverse $f^{-1}\colon W \to V$ heeft, en of deze inverse continu is.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$

(b) $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$

(d) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$.

☆✍ **13.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie en zij (x, y) een punt dat niet op de grafiek van f ligt. We gaan aantonen dat er een $t \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor de afstand tussen de punten $(t, f(t))$ en (x, y) minimaal is.
Zij $d(t)$ de afstand van het punt $(t, f(t))$ tot (x, y).

(a) Toon aan dat de functie $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is.

(b) Toon aan: als $|t - x| > \big|y - f(x)\big|$, dan is $d(t) > d(x)$. Teken een plaatje!

(c) Beredeneer dat de beperking van d tot het interval $\big[x - |y - f(x)|, x + |y - f(x)|\big]$ ergens op dit interval een minimum aanneemt.

(d) Beredeneer aan de hand van (b) dat het minimum uit (c) tevens het minimum van d is op heel $\mathbb{R}$.

[4] De oplettende lezer heeft gezien dat we in andere hoofdstukken al gebruik gemaakt hebben van $\sqrt[k]{x}$ en $x^{\frac{1}{k}}$.

[5] Een punt $x \in [a, b]$ met $f(x) = x$ wordt een dekpunt of vast punt genoemd.

V.5 De exponentiële functie

In deze paragraaf bewijzen we enkele belangrijke eigenschappen van de e-macht. Herinner uit Paragraaf IV.5 dat $e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$ voor $x \in \mathbb{R}$.

V.5.1 Stelling. De volgende eigenschappen van de functie $x \mapsto e^x$ gelden:

(i) $x \mapsto e^x$ is strikt stijgend.
(ii) $x \mapsto e^x$ is continu.
(iii) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
(iv) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Bewijs. (i): Herinner uit Paragraaf IV.5 dat $e^t > 1$ voor alle $t > 0$. Kies nu $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$. Wegens Stelling IV.5.5 geldt

$$e^y = e^{y-x}e^x > e^x.$$

(ii): We tonen eerst aan dat $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. *Bewering:* voor alle $x < 1$ geldt

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Kies eerst $x \geq -1$. Uit Lemma IV.5.1 en de definitie van e^x volgt dat

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{1}\right)^1 = 1 + x.$$

Indien $x < -1$, dan geldt $e^x > 0 > x + 1$. Dit bewijst $1 + x \leq e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als we dit toepassen op $-x$ vinden we $1 - x \leq e^{-x}$. Met $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ volgt dat $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ als $x < 1$. Dit bewijst de bewering.

Uit de Bewering en de Insluitsluitstelling volgt dat $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. Zij nu $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. Duidelijk is dat $\lim_{x\to c} e^{x-c} = \lim_{h\to 0} e^h = 1$. Dus ook

$$\lim_{x\to c} e^x = e^c \lim_{x\to c} e^{x-c} = e^c \cdot 1 = e^c.$$

Hieruit volgt de continuïteit in c.

(iii): In het bewijs van de bewering hebben we gezien dat $e^x \geq 1 + x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(iv): Aangezien $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ volgt nu uit (iii) dat

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} 1/e^x = 0.$$

■

V.5.2 Stelling. De functie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gedefinieerd door $f(x) = e^x$ is inverteerbaar. De inverse is $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is strikt stijgend en continu.

Bewijs. Dit volgt uit de Inverse Functie Stelling V.4.9 en Stelling V.5.1. ■

logaritme

Definieer $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als de inverse van de e-macht: $\ln x = f^{-1}(x)$. De functie ln noemen we de natuurlijke logaritme, en wordt ook vaak genoteerd als log.

Merk op dat voor $n \in \mathbb{N}$ en $x > 0$ geldt dat

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{\ln x + \cdots + \ln x} = e^{n \ln x}.$$

Voor $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt:

$$x^n = (e^{n \ln x}) = (e^{\frac{n}{m} \ln x})^m,$$

dus $x^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m} \ln x}$. Er volgt nu eenvoudig dat $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ voor alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ en $x > 0$ door nogmaals $1 = e^u e^{-u}$ te gebruiken.

x^α Definiëer nu voor alle $x > 0$ en $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Men kan de volgende rekenregels afleiden

V.5.3 Stelling. Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $x, y > 0$. Dan geldt:

(i) $\ln 1 = 0$.
(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
(iii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
(iv) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
(v) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
(vi) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

V.5.4 Opmerking. In Opgave V.5.2 wordt je geacht aan te tonen dat de functie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gegeven door $f(x) = a^x$ strikt stijgend, continu en inverteerbaar is. De inverse kunnen we ook uitrekenen. We hebben

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{x \ln a} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x \ln a.$$

We vinden dus $x = \frac{\ln y}{\ln a}$. Conclusie $f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$. Deze functie wordt meestal genoteerd als

$$\log_a(x) = f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Het getal $z = \log_a(x)$ is dus het unieke getal dat voldoet aan $a^z = x$.

Opgaven

1. Bewijs Stelling V.5.3.

2. Zij $a > 0$, en definieer $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ door $f(x) = a^x$. Toon aan:
(a) Als $a > 1$, dan is de functie f strikt stijgend, continu en inverteerbaar.
(b) Als $a \in (0, 1)$, dan is de functie f strikt dalend en continu.

3. Laat zien dat $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ voor alle $x > 0$.

4. Uit Opgave V.5.3 zien we dat voor elke $n \geq 1$ geldt dat

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

(a) Laat met behulp van bovenstaande zien dat voor elke $n \geq 1$ geldt dat

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2 \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

(b) Bewijs dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2$.

5. (a) Toon aan dat dat $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(b) Toon aan dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$.

VI REEKSEN

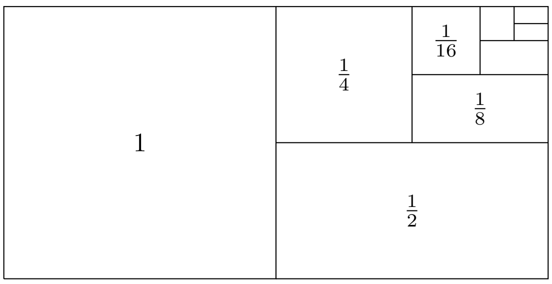
Inmiddels heb je misschien al een aantal keer de volgende notatie gezien:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

In dit hoofdstuk zullen we ons bezig houden met de vraag of je oneindig veel getallen bij elkaar op kunt tellen. Dus wat is

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{of} \quad \sum_{j=k}^{\infty} a_j.$$

Voorbeeld: In de volgende figuur wordt geïllustreerd hoe je het getal 2 als een som van oneindig veel getallen kunt schrijven:



Figuur 6.1: Het getal twee verdeeld in oneindig veel oppervlakten

In formule-vorm zou dat zijn

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Voorbeeld: Wat is:

$$s = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots \quad ???$$

of kun je dit niet sommeren? Je kunt eenvoudig controleren dat indien we oneven veel termen bij elkaar optellen vinden we 1 als antwoord. Indien we even veel termen nemen vinden we 0 als antwoord.

VI.1 Convergentie van reeksen

Reeks

Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij reële getallen zijn. Uit $(a_j)_{j\geq 0}$ kunnen we voor ieder $n \in \mathbb{N}$ de *partiële som* vormen:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

De rij van partiële sommen $(s_n)_{n\geqslant 0}$ wordt de *reeks* van $(a_j)_{j\geq 0}$ genoemd en zullen we in het vervolg noteren als

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{of} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

De a_j's worden de *termen* van de reeks genoemd.

VI.1.1 Definitie. Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heet *convergent* met som $s \in \mathbb{R}$ als de rij $(s_n)_{n\geqslant 0}$ van partiële sommen convergent is en $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. In dit geval noteren we de som als

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ die niet convergent is zullen we *divergent* noemen.

VI.1.2 Opmerking.

(i) De convergentie van $\sum_{j=k}^{\infty} a_j = a_k + a_{k+1} + \ldots$ wordt op een soortgelijke manier gedefineerd.

(ii) In het geval van convergentie heeft het symbool $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ dus *twee* betekenissen: de reeks en de som van de reeks.

meetkundige reeks

VI.1.3 Voorbeeld. De *meetkundige reeks* $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$, met $r \in \mathbb{R}$. Uit Paragraaf II.1 weten we dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{als } r \neq 1.$$

Als $|r| < 1$ dan geldt $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ en dus $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ is convergent en[1]

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Als $|r| \geq 1$, dan is de reeks divergent. ▬

harmonische reeks

VI.1.4 Voorbeeld. De *harmonische reeks* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. We tonen aan dat deze reeks divergent is.

Laat $s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j}$ voor $n \geq 0$.

Bewering: voor alle $m \in \mathbb{N}$ geldt dat $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$. Uit de bewering volgt dat $(s_n)_{n\geq 1}$ divergeert. Er resteert om de bewering te bewijzen. Dit kun je met

[1] Het geval $r = \frac{1}{2}$ stemt overeen met het voorbeeld aan het begin van dit hoofdstuk.

behulp van volledige inductie in $m \in \mathbb{N}$ laten zien. We geven een intuitievere uitleg en laten het precieze bewijs aan de lezer over.[2] Er geldt:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1,\ s_2 = \frac{3}{2}, \\
s_4 &= s_2 + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) \geq \frac{3}{2} + \big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\big) = 2. \\
s_8 &= s_4 + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) \geq 2 + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{5}{2} \\
s_{16} &= s_8 + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) \geq \frac{5}{2} + \Big(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) = 3.
\end{aligned}$$

telescoopreeks

VI.1.5 Voorbeeld. De *telescoopreeks* $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$. Merk eerst op dat geldt $\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$. Hieruit volgt dat voor alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \\
&= \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$ convergent is en

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

VI.1.6 Opmerking. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een reële rij.

(i) Laat $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Bekijk de reeksen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \text{en} \quad \sum_{j=k}^{\infty} a_j.$$

Noemen we partiële sommen van deze reeksen $(s_n)_{n\geqslant 0}$ en $(t_n)_{n\geq k}$ respektievelijk, dan geldt:

$$s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + t_n, \quad \text{voor elke } n \geq k.$$

Hier volgt dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is dan en slechts dan als $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ convergent is en in dit geval

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{j=k}^{\infty} a_j.$$

In het bijzonder volgt hieruit dat het convergentiegedrag van een reeks niet verandert als we eindig veel termen van de reeks veranderen (de som van de reeks verandert natuurlijk wel).

(ii) Als $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeert, dan geldt $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j = 0$. (zie Opgave VI.1.8).

VI.1.7 Stelling. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een reële rij. Als de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeert, dan geldt $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$.

[2] Een precies bewijs staat in Voorbeeld VI.2.6.

Bewijs. Laat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ de rij van partiële sommen zijn. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Aangezien $a_n = s_n - s_{n-1}$ volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

VI.1.8 Opmerking.

(i) Uit Stelling VI.1.7 zien we direct dat $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ divergeert als $|r| \geq 1$.

(ii) Merk op dat de omkering van Stelling VI.1.7 niet waar is:
De reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ is divergent, maar wel $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0$.

VI.1.9 Stelling. Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ reële rijen zijn en laat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Als $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent zijn, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j)$ convergent en

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$$

Bewijs. Zie Opgave VI.1.6. ■

Opgaven

✍ **1.** Toon aan dat de volgende reeksen convergeren en bereken de som

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j+1}{5^j}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \Big(-\frac{3}{4}\Big)^n \quad \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+7\cdot 4^k}{10^k}.$$

2. Toon aan dat de volgende reeksen convergeren en bereken de som

$$(a) \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j+2)(j+1)} \quad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)k}.$$

3. Wat zegt Stelling VI.1.7 over de convergentie van de volgende reeksen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a}$ waarbij $a > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1/n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1/n}$

(d) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j$.

4. Zij $|r| < 1$, $a \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\sum_{j=k}^{\infty} a \cdot r^j = \frac{ar^k}{1-r}$.

5. Laat $a_j = \sqrt{j+1} - \sqrt{j}$, voor elke $j \geq 0$.

(a) Toon aan dat $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

(b) Toon aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent is.

6. Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ beide reële rijen zijn en laat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Laat $(s_n)_{n\geq 0}$ en $(t_n)_{n\geq 0}$ de partiële sommen van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zijn. Laat $(u_n)_{n\geq 0}$ de partële sommen van $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + \beta b_j)$ zijn. Ga na dat voor alle $n \geq 0$ geldt

$$u_n = \alpha s_n + \beta t_n.$$

(b) Bewijs Stelling VI.1.9. Hint: gebruik (a) en rekenregels voor limieten.

7. Laat $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ voor $n \geq 1$. In Voorbeeld VI.1.4 wordt beweerd dat voor alle $m \geq 0$ geldt

$$s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Bewijs dit met behulp van volledige inductie.

8. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een convergente reeks zijn. Toon aan dat $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j = 0$.

VI.2 Reeksen met positieve termen

In deze paragraaf kijken we naar reeksen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ met $a_j \geq 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Merk op dat in dit geval voor de rij van partiële sommen $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ met $n \geq 0$, geldt dat

$$s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$$

Dus de rij van partiële sommen is stijgend. Uit Stelling IV.3.3 en Propositie IV.1.6 weten we dat zulke rijen convergeren precies wanneer ze naar boven begrensd zijn.

VI.2.1 Propositie. Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij met $a_j \geq 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Dan geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent dan en slechts dan als de rij van partiële sommen naar boven begrensd is.

Majorantenkenmerk

Een belangrijk gevolg is het volgende vergelijkingskenmerk.

VI.2.2 Stelling (Majorantenkenmerk van Weierstrass)**.** Als voor de rijen $(a_j)_{j\geq 0}$ en $(b_j)_{j\geq 0}$ geldt dat $0 \leq a_j \leq b_j$ voor alle $j \in \mathbb{N}$, en als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent. Bovendien geldt dan dat $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Bewijs. Laat $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ en $t_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$ voor elke $n \geq 0$. Er geldt $0 \leq s_n \leq t_n$ voor elke $n \geq 0$. De rij $(t_n)_{n\geq 0}$ is convergent en dus naar boven begrensd door een getal $M \geq 0$. Dus ook $(s_n)_{n\geq 0}$ is naar boven begrensd door M, en dus convergent wegens Propositie VI.2.1. ■

VI.2.3 Opmerking.

(i) Aangezien de convergentie van een reeks niet afhangt van het begin van de rij, geldt het Majorantenkenmerk ook indien er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $0 \leq a_j \leq t_j$ voor alle $j \geq k$ en $\sum_{j=k}^{\infty} b_j$ convergent is.

(ii) Het Majorantenkenmerk kan ook gebruikt worden om divergentie van een reeks af te leiden. Immers, als $0 \leq a_j \leq b_j$ en is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent, dan moet $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent zijn.

VI.2.4 Voorbeeld. (i) Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. Voor alle $j \geq 2$ geldt

$$0 \leq \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)}.$$

In Voorbeeld VI.1.5 hebben we gezien dat $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)}$ convergent is. Uit het Majorantenkenmerk volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ convergent is.[3]

(ii) Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j+1}$. Er geldt

$$\frac{1}{3j+1} \geq \frac{1}{3j+j} = \frac{1}{4j}.$$

We weten dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergeert (harmonische reeks), en dus $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j}$ ook. Uit het Majorantenkenmerk volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j+1}$ divergent is.

Het volgende verdichtingscriterium van Cauchy zal handig zijn.

verdichtingscriterium van Cauchy

VI.2.5 Stelling. Zij $(a_j)_{j\geq 1}$ een rij getallen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zó dat $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Dan geldt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ is convergent} \iff \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} \text{ is convergent.}$$

Bewijs. Laat $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ en $t_n = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}$. Wegens Propositie VI.2.1 voldoet het te bewijzen dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd $\Leftrightarrow$ $(t_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd.

"$\Rightarrow$" Neem aan dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is door een constante M_1. Laat $k \geq 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}t_k &= \frac{1}{2}\cdot a_1 + 2^0 a_2 + 2^1 a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= s_{2^k} \leq M_1.\end{aligned}$$

Dus $t_k \leq 2M_1$.

"$\Leftarrow$" Neem aan dat $(t_n)_{n\geqslant 0}$ begrensd is door een constante M_2. Laat $n \geq 0$. Kies $k \in \mathbb{N}$ zó dat $n < 2^k$. Dan geldt

$$\begin{aligned}s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \leq M_2.\end{aligned}$$

■

VI.2.6 Voorbeeld. Zij $p \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \text{ is convergent} \iff p > 1.$$

Aangezien $a_j = \frac{1}{j^p}$ met $j \geq 1$ dalend is kunnen we Stelling VI.2.5 toepassen. Merk op dat $2^j a_{2^j} = 2^{j(1-p)} = r^j$, met $r = 2^{1-p}$. Dus wegens Voorbeeld VI.1.3 geldt: $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ is convergent dan en slechts dan als $|r| < 1$. Dit laatste geldt dan en slechts dan als $p > 1$.

Limietkenmerk

De volgende stelling kan een handig hulpmiddel zijn om convergentie van reeksen aan te tonen.

VI.2.7 Stelling (Limietkenmerk)**.** Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeksen zijn. Neem aan dat $a_j \geq 0$ en $b_j > 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ voldoende groot en dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = L$$

bestaat. Als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent.

Bewijs. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $j \geq N$ geldt dat $\left|\frac{a_j}{b_j} - L\right| < 1$. Er volgt dat voor alle $j \geq N$

$$0 \leq \frac{a_j}{b_j} \leq L + 1.$$

Dus $0 \leq a_j \leq (L+1)b_j$ voor all $j \geq N$. Uit het Majorantenkenmerk zien we dat uit de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ volgt. ■

[3] Het is bekend dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \pi^2/6$, maar dit is ingewikkelder.

VI.2.8 Opmerking. Als in de bovenstaande stelling $L > 0$ is, dan bestaat ook

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = L,$$

end dus geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent dan en slechts dan als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ is convergent.

VI.2.9 Voorbeeld. Bekijk de reeks

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^4+4j}{j^6+3j^2+3}.$$

We passen het Limietkenmerk toe met $a_j = \frac{j^2+4j}{j^4+3j^2+3}$ en $b_j = \frac{1}{j^2}$. Er geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = 1.$$

Aangezien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ convergeert volgt dat de reeks in $(*)$ ook convergeert. ∎

VI.2.10 Voorbeeld. Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\frac{1}{j}}}$. We passen het Limietkenmerk toe met $a_j = \frac{1}{j^{1+\frac{1}{j}}}$ en $b_j = \frac{1}{j}$. Er geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \lim_{j\to\infty} j^{\frac{1}{j}} = 1.$$

Aangezien $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ divergent is volgt ook dat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergent is. ∎

Quotientenkenmerk

Het volgende kenmerk is handig voor veel reeksen.

VI.2.11 Stelling (Quotientenkenmerk)**.** Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een reeks zijn. Neem aan dat $a_j > 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ voldoende groot en dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = L$$

bestaat.

(i) Als $L < 1$ dan is de reeks convergent.
(ii) Als $L > 1$ dan is de reeks divergent (termen niet naar nul).

Bewijs. (1): Kies $r \in \mathbb{R}$ zó dat $L < r < 1$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\frac{a_{j+1}}{a_j} < r$ voor alle $j \geq N$. Er volgt dat $a_{j+1} < ra_j$ voor alle $j \geq N$. Hieruit zien we dat voor $j \geq N$ geldt

$$0 < a_j < ra_{j-1} < r^2 a_{j-2} < \ldots < r^{j-N} a_N = (r^{-N} a_N) r^j.$$

Aangezien de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} (r^{-N} a_N) r^j$ convergent is volgt uit het Majorantenkenmerk dat ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

(2) : Zie Opgave VI.2.11. ∎

VI.2.12 Opmerking. Er bestaan zowel convergente als divergente reeksen met $L = 1$. Bekijk maar eens $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. Dit is een divergente reeks. Voor de termen geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)}{1/j} = 1.$$

Indien we de convergente reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ bekijken, dan geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)^2}{1/j^2} = 1.$$

Het geval $L = 1$ moeten we dus altijd nauwkeuriger onderzoeken.

VI.2.13 Voorbeeld. Bekijk $\sum_{j=1}^{\infty} j^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^j$. Dan geldt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}}{j^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^j} = \frac{1}{2}.$$

Dus de reeks is convergent wegens het Quotientenkenmerk. ▬

VI.2.14 Voorbeeld. Bekijk $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$. We passen het Quotientenkenmerk toe.

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j+1)!}{1/j!} = \lim_{j\to\infty} \frac{j!}{(j+1)!} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j+1} = 0.$$

Dus de reeks is convergent.[4] ▬

Decimaal-ontwikkeling

Ten slotte bespreken we de decimaalontwikkeling van een reëel getal. We beperken ons tot het interval $[0,1]$. Een getal zoals bijvoorbeeld $x = 0.35673\ldots$ is eigenlijk niets anders dan een speciale reeks. We bedoelen hiermee namelijk niets anders dan

$$x = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \ldots$$

Algemener: als $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ met $a_j \in \{0,1,2\ldots,9\}$ dan betekent dit

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}.$$

Uit het Majorantenkenmerk volgt dat de reeks convergent is. Inderdaad voor alle $j \geq 1$ geldt dat

$$0 \leq \frac{a_j}{10^j} \leq 9\left(\frac{1}{10}\right)^j,$$

en de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^j$ is convergent. Bovendien geldt

$$0 \leq x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^j = 9\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Dus iedere decimaalontwikkeling stelt een reeël getal in $[0,1]$ voor. Omgekeerd heeft ieder reeël getal $x \in [0,1]$ een decimaalontwikkeling. (zie Opgave VI.2.16) Deze is niet uniek. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}
0.179999\ldots &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{9}{10^j} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{9}{10^3}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^j} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{9}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^2} = 0.18.
\end{aligned}$$

Als we afspreken dat we geen "staarten" van negens toestaan dan is de decimaal-ontwikkeling wel uniek (zie Opgave VI.2.16).

[4] Er geldt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$ (zie Paragraaf VI.4).

Opgaven

1. Geef met behulp van het Majorantenkenmerk, Voorbeelden VI.1.4 en VI.2.4 een direct bewijs van het volgende

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ is convergent als $p > 2$.

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ is divergent als $p < 1$.

✍ **2.** Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^3+1} \qquad (b) \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j^2-1} \qquad (c) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j+1}{3^j+1}$$

✍ **3.** Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j(j+1)}{(j+4)^4} \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 2^k}{k!} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^8+3n)\frac{3^n}{4^{n+1}}$$

4. Toon aan: als $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$ en $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent, dan is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$ convergent.

5. Toon aan: als $a_j \geq 0$ en $(a_j)_{j\geq 0}$ is dalend en $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent, dan geldt $\lim_{j\to\infty} ia_j = 0$.

6. Laat met een voorbeeld zien dat de eis dat $(a_j)_{j\geq 0}$ dalend is in Stelling VI.2.5, niet weggelaten kan worden.

7. Onderzoek welke van de volgende reeksen convergent zijn

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad (b) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^8+3n)\frac{n^4}{3^n}$$

✯ **8.** Bewijs de volgende sterkere versie van het Limietkenmerk:[5] Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ twee reeksen zijn. Neem aan dat $a_j \geq 0$ en $b_j > 0$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ voldoende groot en dat[6]

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{j\geq n} \frac{a_j}{b_j} \right)$$

bestaat. Toon aan: als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ convergent is, dan is ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent.

9. Laat $a_j = 2^{-j}$ als j is even en 0 als j is oneven.

(a) Toon aan dat het Limietkenmerk met $b_j = 2^{-j}$ met $j \geq 0$ niet toegepast kan worden op deze rij.

(b) Toon aan dat de sterkere versie van het Limietkenmerk uit Opgave VI.2.8 wel toegepast kan worden. Wat geeft dit kenmerk voor informatie?

✯ **10.** Onderzoek de convergentie van de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j}$.

11. Bewijs Stelling VI.2.11 (2). Bewijs ook dat de reeks divergeert als $\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \infty$.

Wortelkenmerk

12. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een reeks zijn. Neem aan dat $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$ voldoende groot en

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = L$$

bestaat. Toon aan dat

(a) Als $L < 1$ dan is de reeks convergent.

(b) Als $L > 1$ of $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = \infty$, dan is de reeks divergent.

(c) Geef zowel een voorbeeld van een convergente en een divergente reeks met $L = 1$.[7]

13. Definieer de rij $(a_j)_{j\geq 0}$ door $a_{2j} = 2^{-j}$ en $a_{2j+1} = 3^{-j}$, met $j \geq 0$.

(a) Laat zien dat het Quotientenkenmerk niet kan worden toegepast op deze rij.

(b) Laat zien dat het Wortelkenmerk wel toegepast kan worden op deze rij. Wat volgt er uit het Wortelkenmerk?

14. Laat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ een convergente reeks zijn met $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$. Toon aan dat

$$\sup\Big\{\sum_F a_j : F \subset \mathbb{N} \text{ is eindig}\Big\} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

15. Bepaal voor welke $p > 0$ geldt dat $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent is.

16.

(a) Bewijs dat iedere $x \in [0,1)$ een decimaalontwikkeling heeft.

(b) Indien we geen “staarten” van negens toestaan, bewijs dat de decimaalontwikkeling voor elke $x \in [0,1)$ uniek is.

[5]Analoge versterkingen van het Quotientenkenmerk en het Wortelkenmerk gelden ook.

[6] $\lim_{n\to\infty}\sup_{j\geq n}$ is niets anders dan $\limsup_{j\to\infty}$ uit Opgave IV.3.7.

[7]In dit geval kan dus net als bij het Limietkenmerk geen uitspraak gedaan worden.

VI.3 Absolute convergentie

In deze paragraaf onderzoeken we reeksen waarvan de termen positief en negatief mogen zijn.[8] We beginnen met een equivalente formulering voor convergentie van reeksen.

VI.3.1 Stelling. Voor een rij $(a_j)_{j\geq 0}$ zijn de volgende uitspraken equivalent:

(i) De reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ is convergent

(ii) Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \geq n \geq N$ geldt

$$(*) \qquad \Big| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

Bewijs. (ii) $\Rightarrow$ (i): We moeten laten zien dat de rij van partiële sommen $(s_n)_{n\geq 0}$ convergent is. Wegens de Volledigheidsstelling IV.4.8 is het voldoende te bewijzen dat $(s_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zoals in de stelling. Kies $m, n \geq N$. Er zijn 3 gevallen: (1) $m = n$, (2) $m > n$, (3) $m < n$. Voor (1) geldt $|s_m - s_n| = 0 < \varepsilon$. Voor (2) geldt wegens $(*)$

$$\Big| s_m - s_n \Big| = \Big| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

Voor (3) kunnen we n en m verwisselen in (2). Conclusie: $(s_n)_{n\geq 0}$ is een Cauchy-rij.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Zie Opgave VI.3.1 ■

absoluut convergent

VI.3.2 Definitie. Een reeks $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heet *absoluut convergent* als $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ convergent is.

VI.3.3 Stelling. Als $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absoluut convergent is, dan is $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent. Bovendien geldt dan

$$\Big| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|.$$

Bewijs. We gebruiken Stelling VI.3.1. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $m \geq n \geq N$ geldt dat $\sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat voor alle $m \geq n \geq N$ geldt:

$$\Big| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \Big| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon.$$

Nu volgt (weer uit Stelling VI.3.1) dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

Aangezien voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\Big|\sum_{j=0}^{n} a_j\Big| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ volgt de ongelijkheid in de stelling als we de limiet voor n naar oneindig nemen en de rekenregels voor limieten gebruiken. ■

Als we nu de convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ willen onderzoeken, dan kunnen we de volgende strategie proberen. Bekijk eerst $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$. Aangezien $|a_j| \geq 0$ kunnen we hierop de convergentie criteria van Paragraaf VI.2 toepassen. Als nu blijkt dat $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ convergent is, dan volgt uit bovenstaande stelling dat ook $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

[8] De bewijzen die we geven kunnen ook gebruikt worden voor reeksen waarbij de termen complexe getallen zijn.

VI.3.4 Voorbeeld. De reeks $\sum_{j=0}^{\infty} jx^j$ is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < 1$ absoluut convergent, en dus ook convergent. Inderdaad, met $a_j = j|x|^j$ volgt dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)x^{j+1}}{jx^j} = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)}{j} x = x.$$

Dus het Quotientenkenmerk geeft de convergentie voor alle $|x| < 1$. Merk op dat de reeks niet convergent is als $|x| \geq 1$, omdat dan de termen niet naar nul gaan. ∎

VI.3.5 Opmerking (Verwisselen van termen deel 1)**.** Als een reeks absoluut convergent is, dan is het toegestaan de elementen van de reeks in een andere volgorde op te tellen zonder de som te veranderen. Dit bewijzen we in Opgave VI.3.8.

Alternerende reeksen

Zij $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij getallen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Reeksen van de vorm

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots$$

worden *alternerende reeksen* genoemd.

Het volgende voorbeeld is een reeks die wel convergent is, maar niet absoluut convergent.

alternerende harmonische reeks

VI.3.6 Voorbeeld. Bekijk

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots.$$

Deze reeks is niet absoluut convergent want $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}$ is divergent. We onderzoeken de convergentie met behulp van partiële sommen. Laat $s_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j+1}$ voor $n \geq 0$. Zij $x_n = s_{2n-1}$ voor $n \geq 1$ en $y_n = s_{2n}$ voor $n \geq 0$. Dan gelden de volgende eigenschappen (zie Opgave VI.3.4):

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ is stijgend.
(ii) $(y_n)_{n\geq 0}$ is dalend.
(iii) Voor alle $n \geq 1$ geldt $x_n \leq y_n$.
(iv) $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$.

Uit Stelling IV.3.6 volgt nu dat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en $(y_n)_{n\geqslant 0}$ beide convergeren naar hetzelfde getal s. Maar dan geldt ook dat $(s_n)_{n\geqslant 0}$ naar s convergeert.[9] ∎

Kenmerk van Leibniz

Op een zelfde manier kun je de volgende stelling bewijzen:

VI.3.7 Stelling (Convergentie kenmerk van Leibniz)**.** Laat $(a_j)_{j\geq 0}$ een rij reële getallen zijn zó dat:

(1) $a_j \geq 0$ voor alle $j \geq 0$.
(2) $(a_j)_{j\geq 0}$ is dalend.
(3) $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

[9] In Opgave VI.3.7 wordt bewezen dat $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2$.

Dan is de reeks $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots$ convergent.

VI.3.8 Voorbeeld. Bekijk de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}}$. Merk op dat de reeks niet absoluut convergent is. De reeks is wel convergent wegens Stelling VI.3.7 met $a_j = \frac{1}{\sqrt{j}}$, met $j \geq 1$. ▄

VI.3.9 Opmerking (Verwisselen van termen deel 2)**.** Indien een reeks convergent is maar niet absoluut convergent is het erg gevaarlijk om de volgorde van sommatie te veranderen. Hierdoor kan de som namelijk veranderen. Dit illustreren we aan de hand van de alternerende harmonische reeks. Stel eens dat we termen mogen verwisselen. Dan kunnen we het volgende doen:

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \cdots \\
&= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} \cdots \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} \cdots \\
&= \tfrac{1}{2}\big(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \cdots\big) \\
&= \tfrac{1}{2} s.
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat $s = 0$. Maar dat klopt niet want $s > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Blijkbaar mogen we dus geen termen verwisselen. Er is nog veel meer aan de hand: uit Riemann's *rearrangement theorem* (zie bijvoorbeeld wikipedia) volgt dat door de termen te verwisselen in bovenstaande reeks, je ieder reëel getal kunt krijgen als uitkomst.

Opgaven

1. Bewijs Stelling VI.3.1 (i) $\Rightarrow$ (ii) .

2. Onderzoek of de volgende reeksen absoluut convergent en/of convergent zijn:

$$(a)\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j+2} \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k+1)!} \quad (d)\ \sum_{m=1}^{\infty} m(-1)^m.$$

3. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ de volgende reeksen absoluut convergent en/of convergent zijn

$$(a)\ \sum_{j=1}^{\infty} j^2 x^j \quad (b)\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} j! x^j.$$

4. Ga na dat de eigenschappen (i)-(iv) in Voorbeeld VI.3.6 gelden.

5. Bewijs Stelling VI.3.7. Hint: Volg het argument in Voorbeeld VI.3.6.

6. Laat met behulp van tegenvoorbeelden zien dat geen van de voorwaarden (1), (2) of (3) weggelaten kan worden in Stelling VI.3.7.

✍ **7.** Beschouw de harmonische reeks $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}$.

(a) Toon aan dat voor elke $n \geq 2$ geldt dat

$$x_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

waar $(x_n)_{n \geq 0}$ de rij uit in Voorbeeld VI.3.6 is.

(b) Bewijs dat $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = \ln 2$.

☆✍ **8.** Neem aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absoluut convergent is. Zij $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie. Dan geldt $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ is convergent en[10]

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}.$$

[10]Het omgekeerde is ook waar: als de volgorde van sommeren niet uitmaakt, dan moet de reeks absoluut convergent zijn.

VI.4 De exponentiële functie

In deze paragraaf bespreken we een connectie tussen de reeks[11] $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ en de exponentiële functie e^x die we bestudeerd hebben in Paragrafen IV.5 en V.5. Herinner dat $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ voor $x \in \mathbb{R}$.

VI.4.1 Stelling. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ is (absoluut) convergent en

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

In het bijzonder geldt dus

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Bewijs. Net als in Voorbeeld VI.2.14 kan de convergentie worden aangetoond met het Quotientenkenmerk. Inderdaad voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|x^{j+1}/(j+1)!|}{|x^j/j!|} = \lim_{j\to\infty} \frac{|x|}{j+1} = 0.$$

Dit bewijst de absolute convergentie van de reeks. De convergentie volgt dan uit Stelling VI.3.3.

Nu bewijzen we dat de som gelijk is aan e^x. Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Definieer

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \quad \text{en} \quad t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Verder definiëren we $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ en $t = \lim_{n\to\infty} t_n = e^x$.
Bewering: Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $|s-t| \leq \varepsilon$.

Zij $\varepsilon > 0$. Met behulp van het Binomium van Newton (Stelling II.1.4) vinden we

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{x^j}{n^j} = 1 + x + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\frac{x^n}{n!}.$$

Er volgt

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| &\leq \left(1 - \frac{n(n-1)}{n^2}\right)\frac{|x|^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\right)\frac{|x|^2}{n!} \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!}. \end{aligned}$$

Zij $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Voor iedere $n > N$ kunnen we bovenstaande som in twee stukken splitsen:

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| \leq &\sum_{j=N+1}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!} \\ &+ \sum_{j=2}^{N} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\right)\frac{|x|^j}{j!}. \end{aligned}$$

[11]Hierbij spreken we af dat $0^0 = 1$.

Merk op dat voor de eerste term geldt:

$$\sum_{j=N+1}^{n}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\leq\sum_{j=N+1}^{n}\frac{|x|^j}{j!}\leq\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}.$$

Aangezien $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}$ een convergente reeks is, kunnen we een $N\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ vinden zodat $\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{|x|^j}{j!}<\varepsilon$. Voor $n>N$ geldt dan

$$|s_n-t_n|\leq\sum_{j=2}^{N}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}+\varepsilon.$$

Uit de rekenregels voor limieten volgt dat (merk op $\sum_{j=2}^{N}$ is een eindige som)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{N}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\\&\qquad=\sum_{j=2}^{N}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}\Big)\frac{|x|^j}{j!}\Big)=0.\end{aligned}$$

Uit de rekenregels voor limieten concluderen we dat $|s-t|\leq\varepsilon$ en dit bewijst de bewering.

Uit de bewering volgt direct dat $s=t$, en dit bewijst de stelling. ∎

$e\notin\mathbb{Q}$

VI.4.2 Stelling. Het getal e is irrationaal: $e\notin\mathbb{Q}$

Bewijs. Zij $s_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}$. Uit Stelling VI.4.1 volgt dat voor elke $n\geq 1$ geldt

$$\begin{aligned}0<e-s_n=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}&=\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\Big)\\&\leq\frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\Big).\end{aligned}$$

De reeks $\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}$ is een meetkundige reeks en we vinden dat[12]

$$0<e-s_n\leq\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{n!}\frac{1}{n}.$$

Stel dat $e\in\mathbb{Q}$. Aangezien $e>0$ volgt dat $e=\frac{p}{q}$ met $p,q\in\mathbb{N}_{\geq 1}$. Voor elke $n\geq 1$ volgt dat

$$0<\frac{p}{q}-s_n\leq\frac{1}{n!}\frac{1}{n}\quad\text{ofwel}\quad 0<n!\Big(\frac{p}{q}-s_n\Big)\leq\frac{1}{n}.$$

Er geldt $n!s_n\in\mathbb{N}$ en $n!\frac{p}{q}\in\mathbb{N}$ als $n\geq q$. Er volgt dat $0<n!\frac{p}{q}-n!s_n\in\mathbb{N}$ voor alle $n\geq q$. Maar dan volgt

$$1\leq n!\frac{p}{q}-n!s_n\leq\frac{1}{n}\quad\text{voor alle } n\geq q.$$

Dit geeft een tegenspraak, dus $e\notin\mathbb{Q}$. ∎

[12] Uit afschatting volgt ook dat s_n heel snel naar e convergeert. Probeer maar eens $n=5$.

VII AFGELEIDE

VII.1 Differentiëren

In het vorige hoofdstuk hebben we continuïteit gedefinieerd voor functies op willekeurige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. In dit hoofdstuk, over differentieerbaarheid, beperken we ons tot *open* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Herinner dat $D \subseteq \mathbb{R}$ *open* is als er voor elke $x \in D$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq D$. Merk op dat ieder punt uit een open verzameling een verdichtingpunt is (zie Opgave V.2.12).

VII.1.1 Definitie. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ open, en $f \colon D \to \mathbb{R}$. Laat $x_0 \in D$. Dan heet f *differentieerbaar* in x_0 als de limiet [1]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

bestaat. In dat geval noemen we deze limiet de *afgeleide* van f in x_0, notatie: $f'(x_0)$.

We noemen f *differentieerbaar* als f differentieerbaar is in ieder punt van D.

VII.1.2 Opmerking. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. De *linkerafgeleide* van f in $x_0 \in (a, b]$ is gedefinieerd als

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

indien de limiet bestaat en in dit geval noemen we f linksdifferentieerbaar in x_0. De rechterafgeleide in $x_0 \in [a, b)$ is gedefinieerd als

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$$

indien de limiet bestaat en in dit geval noemen we f rechtsdifferentieerbaar in x_0.

VII.1.3 Opmerking. Merk op dat

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van limiet.

[1] We zijn hier slordig. Strikt genomen moeten we een functie definiëren ($g \colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$, in dit geval) waarvan we de limiet nemen. In het vervolg maken we geen opmerkingen meer over deze slordigheid. Merk wel op dat x_0 inderdaad een verdichtingspunt van $D \setminus \{x_0\}$ is (waarom?).

Differentieerbare functies zijn automatisch continu.

VII.1.4 Stelling. Als $D \subseteq \mathbb{R}$ open is, $x_0 \in D$, en $f\colon D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in x_0, dan is f continu in x_0.

Bewijs. Dit volgt uit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)-f(x_0)\bigr) &= \lim_{h\to 0}\bigl(f(x_0+h)-f(x_0)\bigr)\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right)\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

∎

Het omgekeerde geldt niet: de absolute waarde-functie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ is niet differentieerbaar in 0, zie Opgave VII.1.5.

Eigenschappen van de afgeleide

Voor het nemen van afgeleiden gelden de bekende rekenregels:

VII.1.5 Stelling (Rekenregels voor afgeleiden)**.** Laat $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ en $g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ twee functies zijn. Zij verder $x_0 \in (a,b)$ gegeven, en zij α een reëel getal. Als f en g beide differentieerbaar zijn in x_0, bewijs dat dan geldt:

(i) αf is differentieerbaar in x_0 met afgeleide $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
(ii) $f+g$ is differentieerbaar in x_0 met afgeleide $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.
(iii) fg is differentieerbaar in x_0 met afgeleide $(fg)'(x_0) = f(c)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$.
(iv) Als bovendien $g(x)\neq 0$ voor alle $x\in(a,b)$, dan geldt: $1/g$ is differentieerbaar in het punt x_0 met afgeleide

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Bewijs. Zie Opgave VII.1.9. ∎

We gaan nu de *kettingregel* bewijzen, die zegt dat de samenstelling van twee differentieerbare functies weer differentieerbaar is. Bovendien geeft de kettingregel een formule voor de afgeleide van de samenstelling. We beginnen met handige herformulering van de definitie van differentieerbaarheid.

linealiseren

VII.1.6 Stelling (Lineariseren)**.** Zij $D\subseteq\mathbb{R}$ open, $f\colon D\to\mathbb{R}$ een functie, $x_0\in D$ en $L\in\mathbb{R}$. De volgende beweringen zijn equivalent:

(i) f is differentieerbaar in het punt x_0 en $f'(x_0)=L$.
(ii) er is een functie R, gedefinieerd op een open interval rond nul met $\lim_{h\to 0} R(h)/h = 0$ zó dat voor elke x in dit open interval rond nul geldt dat

$$f(x) = f(x_0) + L\cdot(x-x_0) + R(x-x_0).$$

Bewijs. Neem aan dat f differentieerbaar is in $x_0\in D$ met $f'(x_0)=L$. Definieer R als:

$$R(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - Lh.$$

Ga zelf na dat R de gewenste eigenschappen heeft.
Omgekeerd, zij R zoals in (ii). Dan geldt

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(L+\frac{R(h)}{h}\right) = L,$$

dus f is differentieerbaar in x_0 met afgeleide $f'(x_0)=L$. ∎

linearisering

We kunnen deze stelling als volgt interpreteren: rond het punt x_0 is $f(x)$ bij benadering gelijk aan zijn *linearisering*

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

waarbij de *foutterm* voldoet aan $\lim_{x\to x_0} R(x-x_0)/(x-x_0) = 0$.

Kettingregel

VII.1.7 Stelling (Kettingregel)**.** Laat D_1, D_2 open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ en $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$, en neem aan dat $f[D_1] \subseteq D_2$. Laat $x_0 \in D_1$ en neem aan dat f differentieerbaar is in x_0 en dat g differentieerbaar is in $y_0 = f(x_0)$. Dan is ook de samengestelde functie $g \circ f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in x_0, en er geldt

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Bewijs. Volgens Stelling VII.1.6 bestaan er functies R_1 en R_2 met de eigenschap $\lim_{h\to 0} R_1(h)/h = \lim_{k\to 0} R_2(k)/k = 0$ zó dat

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(h),$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + g'(y_0)k + R_2(k)$$

voor alle h, k in een open interval rond nul. Dan geldt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_0 + h) &= g\big(f(x_0 + h)\big) = g\big(y_0 + f'(x_0)h + R_1(h)\big)\\ &= g(y_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + g'(y_0)R_1(h) + R_2\big(f'(x_0)h + R_1(h)\big)\\ &= g \circ f(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + R_3(h),\end{aligned}$$

waarbij $R_3(h) = g'(y_0)R_1(h) + R_2\big(f'(x_0)h + R_1(h)\big)$. Het is eenvoudig om zien dat $\lim_{h\to 0} R_3(h)/h = 0$. Uit Stelling VII.1.6 volgt nu dat $g \circ f$ differentieerbaar is in x_0 met afgeleide $g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$. ■

De volgende stelling is een uitbreiding van Stelling V.4.9 en geeft onder bepaalde voorwaarden de differentieerbaarheid van de inverse functie.

Inverse Functiestelling

VII.1.8 Stelling (Inverse Functiestelling, differentieerbare versie)**.** Laat $J = [a, b]$ een interval zijn, en $f : J \to \mathbb{R}$ een strikt stijgende functie. Definieer $I = f(J)$. Dan is $f : J \to I$ een bijectie, en de inverse functie $f^{-1} : I \to J$ is strikt stijgend an continu. Zij $x_0 \in (a, b)$. Als f differentieerbaar is in x_0 met $f'(x_0) \neq 0$, dan is de inverse functie $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a, b]$ differentieerbaar in $y_0 = f(x_0)$ met afgeleide:

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bewijs. Neem een rij $(y_n)_{n\geq 1}$ in $[f(a), f(b)]$ zó dat $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ en $y_n \neq y_0$ voor alle $n \geq 1$. Noem $x_n = f^{-1}(y_n)$. Dan is $x_n \neq x_0$ voor alle $n \geq 1$, en $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, want f^{-1} is continu. Nu is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Uit Stelling V.2.5 volgt dat

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

dus f^{-1} is differentieerbaar in y_0 en $\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

VII.1.9 Opmerking. (i) Als f^{-1} differentieerbaar is in $y_0 = f(x_0)$ dan volgt uit de kettingregel:

$$1 = \big(f^{-1} \circ f\big)'(x_0) = f^{-1\prime}\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

De formule voor $\big(f^{-1}\big)'(y_0)$ is dus duidelijk maar dat f^{-1} differentieerbaaar is in $y_0 = f(x_0)$ moet apart bewezen worden.

(ii) Beschouw de functie $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ gegeven door $f(x) = x^3$. Dan geldt dat f is strikt stijgend. Echter $f'(0) = 0$, en dus f^{-1} is niet differentieerbaar in 0. De voorwaarde $f'(x_0) \neq 0$ in Stelling VII.1.8 mag dus niet worden weggelaten.

(iii) Stelling VII.1.8 geldt ook voor andere soorten van intervallen (oneindig, open, halfopen, etc), zolang x_0 maar niet op de rand van het interval J gekozen wordt.

VII.1.10 Voorbeeld. Voor $n \geq 1$ bekijken we de functie $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ met voorschrift $f(x) = x^n$. Deze functie is inverteerbaar met inverse $g(x) = \sqrt[n]{x}$. In Voorbeeld V.4.11 hebben we bewezen dat g continu is. We tonen hier aan dat g ook differentieerbaar is.

Laat $y_0 \in (0, \infty)$ en zij $x_0 = g(y_0) = \sqrt[n]{y_0}$. Dan geldt

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1} \neq 0.$$

Uit de differentieerbare versie van de Inverse Functiestelling volgt nu dat g differentieerbaar is in het punt y_0, met afgeleide

$$g'(y_0) = g'(x_0^n) = \frac{1}{n x_0^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{y_0^{n-1}}} = \frac{1}{n} y_0^{\frac{1}{n}-1}.$$

■

Opgaven

1. Toon aan met behulp van de definitie van afgeleide:

(a) De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ is differentieerbaar op $\mathbb{R}$, met afgeleide $f'(x) = 1$;

(b) De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ is differentieerbaar op $\mathbb{R}$, met afgeleide $f'(x) = 2x$.

✍ **2.** Zij $n \geqslant 1$ een geheel getal. Toon aan dat de functie $f(x) = x^n$ differentieerbaar is op $\mathbb{R}$, met afgeleide $f'(x) = nx^{n-1}$. *Aanwijzing*: Gebruik volledige inductie, of de binomiaalformule van Newton, of iets anders.

✍ **3.** Welke van de volgende functies $f\colon D \to \mathbb{R}$ zijn differentieerbaar op hun domein D?

(a) $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

✍ **4.** Ga na dat de volgende functies $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn en bepaal hun afgeleiden:

(a) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$

✍ **5.** Ga na welke van de volgende functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in 0. Bepaal indien mogelijk $f'(0)$.
(a) $f(x) = |x|$
(b) $f(x) = x \cdot |x|$
(c) $f(x) = \sqrt{|x|}$
(d) $f(x) = x\sqrt{|x|}$

6. Toon aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = |x|$, links- en rechtsdifferentieerbaar is in 0.

7. Bewijs: $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar in een $c \in (a, b)$ dan en slechts dan als de linker- en rechterafgeleiden van f in c bestaan en aan elkaar gelijk zijn.

8. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{als} \quad x \geq 1 \\ a(x^3 + 5) & \text{als} \quad x < 1 \end{cases}$$

differentieerbaar?

✍ **9.** Bewijs Stelling VII.1.5.

10. Zij $f\colon (0, 2) \to (2, 14)$ gegeven door $f(x) = x^3 + x^2 + 2$. Toon aan dat f inverteerbaar is en bereken $(f^{-1})'(4)$.

11. Zij $f\colon (0, 3) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2$.
(a) Vind $a, b \in \mathbb{R}$ zó dat $f[(0, 3)] = (a, b)$, en laat zien dat $f\colon (0, 3) \to (a, b)$ inverteerbaar is.
(b) Bereken $(f^{-1})'(2)$.
✍ (c) Bereken $(f^{-1})'(-39/32)$.

12. Ga na welke van de volgende functies $f\colon V \to W$ een inverse $f^{-1}\colon W \to V$ heeft, en of deze inverse continu en/of differentieebaar is.
(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$
(b) $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$
(c) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$
(d) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$.

13. Vind met behulp van de Inverse Functiestelling (controleer ook dat aan alle voorwaarden voldaan is):
(a) $(\arcsin x)'$;
(b) $(\arccos x)'$;
(c) $(\arctan x)'$.

✍ **14.** We geven een voldoende voorwaarde dat een functie met continue afgeleide inverteerbaar is.
(a) Neem aan dat $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie is zó dat f' continu is op (a, b) en $f'(c) \neq 0$ voor een $c \in (a, b)$. Laat zien dat er een deelinterval van (a, b) bestaat waarop f inverteerbaar is.
(b) Beschouw de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ga na dat f differentieerbaar is met $f'(0) \neq 0$ maar dat f op geen open interval rond 0 inverteerbaar is. (Merk op dat f' niet continu is in 0; de voorwaarde 'continu differentieerbaar' in (a) kunnen we dus niet weglaten.)

VII.2 De Middelwaardestelling

Van het vwo weten we dat een differentieerbare functie $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stijgend is dan en slechts dan als de afgeleide niet-negatief is: $f'(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a,b)$. Deze paragraaf besteden we aan het precieze bewijs van deze stelling.

VII.2.1 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Als $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een stijgende differentieerbare functie is, dan is $f'(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a,b)$.

Bewijs. Laat $x \in (a,b)$. Dan geldt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

waar we gebruiken dat $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$ wanneer $h > 0$. ∎

De omkering is lastiger te bewijzen. We beginnen met een hulpresultaat.

VII.2.2 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Neem aan dat de functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een maximum of een minimum aanneemt in een punt $x_0 \in (a,b)$. Als f differentieerbaar is in x_0, dan geldt $f'(x_0) = 0$.

Bewijs. Neem aan dat f in x_0 een maximum aanneemt (het geval dat f in x_0 een minimum aanneemt gaat analoog). Dan geldt

$$f'(x_0) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0 \quad \text{omdat } f(x_0+h) \leqslant f(x_0) \text{ voor } h < 0, \text{ en}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0 \quad \text{omdat } f(x_0+h) \leqslant f(x_0) \text{ voor } h > 0.$$

∎

Het volgende resultaat staat bekend als de *Stelling van Rolle* (M. Rolle).

Stelling van Rolle

VII.2.3 Stelling (Rolle, 1691)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a,b). Als $f(a) = f(b) = 0$, dan bestaat er een $\xi \in (a,b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Bewijs. Volgens Stelling V.4.2 neemt f op het interval $[a,b]$ een minimum en een maximum aan, er bestaan dus $\xi_0 \in [a,b]$ en $\xi_1 \in [a,b]$ met $f(\xi_0) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_1)$ voor alle $x \in [a,b]$.

Als $f(\xi_1) \neq 0$, dan, vanwege $f(a) = f(b) = 0$, geldt $\xi_1 \in (a,b)$. Uit Stelling VII.2.2 volgt dan dat $f'(\xi_1) = 0$ en kunnen we $\xi = \xi_1$ nemen. Net zo, als $f(\xi_0) \neq 0$, dan volgt dat $\xi_0 \in (a,b)$, dat $f'(\xi_0) = 0$ en kunnen we $\xi = \xi_0$ nemen. In het overgebleven geval is $f(\xi_0) = f(\xi_1) = 0$. Maar dan is f constant 0 is. In het bijzonder is ook f' constant 0 op (a,b) en voldoet iedere $\xi \in (a,b)$. ∎

Uit de Stelling van Rolle leiden we het volgende resultaat af.

Middelwaardestelling

VII.2.4 Stelling (Middelwaardestelling)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a,b). Dan bestaat er een $\xi \in (a,b)$ waarvoor geldt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bewijs. Beschouw de functie $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \qquad x \in [a, b].$$

Deze functie is continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b), met afgeleide

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad x \in (a, b).$$

Bovendien geldt $F(a) = F(b) = 0$. Volgens de stelling van Rolle is er dus een $\xi \in (a, b)$ met $F'(\xi) = 0$. Dit betekent dat

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

De Middelwaardestelling heeft een aantal belangrijke gevolgen, waaronder de omkering van Stelling VII.2.1.

VII.2.5 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a, b).

(i) Als $f'(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f stijgend op $[a, b]$.
(ii) Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f strikt stijgend op $[a, b]$.
(iii) Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f constant op $[a, b]$.

Bewijs. Opgave VII.2.7. ■

Deze stelling is minder triviaal dan men misschien op het eerste gezicht geneigd is te denken! De volledigheid van $\mathbb{R}$ speelt hier een cruciale rol.

Middelwaarde-ongelijkheid

VII.2.6 Gevolg (Middelwaardeongelijkheid)**.** Laat a en b in $\mathbb{R}$ zijn, met $a < b$. Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu, en differentieerbaar op (a, b). Laat $C \in \mathbb{R}$ en neem aan dat

$$\text{voor alle } x \in (a, b): \quad \big|f'(x)\big| \leqslant C.$$

Dan geldt

$$\text{voor alle } x, y \in [a, b]: \quad \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant C|y - x|.$$

Bewijs. Laat $x, y \in [a, b]$. Als $x = y$, dan is de uitspraak duidelijk waar. Ook is de uitspraak symmetrisch in x en y. We mogen (en zullen) dus aannemen dat $x < y$. Door de Middelwaardestelling toe te passen op het interval $[x, y]$ vinden we een $\xi \in (x, y)$ waarvoor

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Maar we weten dat $|f'(\xi)| \leqslant C$, zodat

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{y - x} = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = |f'(\xi)| \leqslant C.$$

■

Deze ongelijkheid heeft de volgende fysische interpretatie: wie in het tijdsinterval $[x, y]$ niet harder rijdt dan C km/u legt in dit tijdsinterval hoogstens $C|y - x|$ km af.

Opgaven

1. Agent A ziet op de snelweg een Porsche voorbijrijden met snelheid 90 km/u. Hij vertrouwt de zaak niet en belt voor de zekerheid zijn collega B, die 10 km verderop staat. Deze ziet de Porsche precies 6 minuten later voorbij komen, wederom met 90 km/u. De maximumsnelheid is 100 km/u. Kan Agent B bewijzen dat de Porsche harder dan 100 km/u gereden heeft?

2. Wat zal een goede rechter van Agent B's argument zeggen? Is er een $\varepsilon > 0$ waarvoor Agent B kan bewijzen dat de Porsche harder dan $100 + \varepsilon$ km/u gereden heeft?

✍ **3.** Bewijs dat de vergelijking $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = 0$ precies één reële oplossing heeft.

✍ **4.** Zij $N \geqslant 2$ een gegeven geheel getal. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, en zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met N verschillende nulpunten. Toon aan dat de afgeleide $f'\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tenminste $N - 1$ verschillende nulpunten heeft.

5. (a) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, en $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met begrensde afgeleide. Toon aan dat f uniform continu is.

(b) Laat zien dat een differentieerbare en uniform continue functie $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ geen begrensde afgeleide hoeft te hebben.

✍ **6.** Laat $L \in \mathbb{R}$ en $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ voldoen aan:

1. f is continu.
2. f is differentieerbaar op $(-1, 1) \setminus \{0\}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = L$.

Bewijs dat f ook differentieerbaar is in 0, en dat $f'(0) = L$.

✍ **7.** Bewijs Stelling VII.2.5.

8. Zij $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$. Toon aan dat voor alle $y \geq x > 0$ geldt dat

$$\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} \leq \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}(y - x).$$

VII.3 De exponentiële functie

In deze paragraaf bewijzen we de differentieerbaarheid van de e-macht en tonen aan dat $(e^x)' = e^x$. Ook bewijzen we dat $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

VII.3.1 Stelling. De functie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gegeven door $f(x) = e^x$ is differentieerbaar en $f'(x) = e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs. We bewijzen de volgende *bewering:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Hiervoor vinden we eerst een goede afschatting van $e^x - 1 - x$. Stelling VI.4.1 zegt dat $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Hieruit volgt dat voor alle $x \in [-1, 1]$ geldt

$$\begin{aligned} |e^x - 1 - x| &= \Big| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \Big| \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \le x^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|x|^{j-1}}{j!} \\ &\le x^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \le (e-2)x^2. \end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \min\{\varepsilon/(e-2), 1\}$. Uit het bovenstaande vinden we dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $0 < |x| < \delta$ geldt

$$\Big| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \Big| = \Big| \frac{e^x - 1 - x}{x} \Big| \le \frac{(e-2)x^2}{|x|} = (e-2)|x| < (e-2)\delta < \varepsilon.$$

Dit bewijst de bewering.

Nu kunnen we bewijzen dat f differentieerbaar is en $f'(x) = e^x$. Zij $x_0 \in \mathbb{R}$ willekeurig. Uit de bewering en $e^{x+y} = e^x e^y$ volgt dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

Hieruit volgt f is differentieerbaar in x_0 en $f'(x_0) = e^{x_0}$. ∎

VII.3.2 Stelling. De functie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = \ln x$ is differentieerbaar en $g'(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Merk op: g is de inverse van de functie f uit Stelling VII.3.1. Zij $y_0 \in (0, \infty)$ willekeurig. Kies $x_0 \in \mathbb{R}$ zó dat $f(x_0) = e^{x_0} = y_0$. Aangezien $f'(x_0) = e^{x_0} = y_0 \neq 0$ volgt uit de Inverse Functiestelling VII.1.8 dat

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{y_0}.$$

∎

Opgaven

1. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Laat $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ gedefinieerd zijn door $f(x) = x^\alpha$. Toon aan dat $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ voor alle $x \in (0, \infty)$.

2. Zij $a > 0$. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = a^x$. Toon aan dat f differentieerbaar is en $f'(x) = \ln(a)a^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Laat $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = x^x$. Toon aan dat f differentieerbaar is en bereken $f'(x)$ voor alle $x \in (0, \infty)$.

differentiaal-vergelijking

4. Zij $a \in \mathbb{R}$ een constante.

(a) Toon aan dat de functie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $y(x) = e^{ax}$ voldoet aan $y'(x) = ay(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $y(0) = 1$.

(b) Toon aan dat als een differentieerbare functie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan $y'(x) = ay(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $y(0) = 1$, dan geldt $y(x) = e^{ax}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Hint: Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = e^{-ax}y(x)$, en laat zien dat g constant is.

5. Bereken de volgende limiet $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

6. Laat zien dat $\lim\limits_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x$.

7. Definieer de functies $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{en} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Laat zien dat $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ en $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.

☆ **8.** Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{voor } x > 0, \\ 0, & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en bereken zijn afgeleide.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0 en bereken zijn afgeleide.

Hint: Gebruik Opgave VII.2.6.

(c) Toon aan dat f' differentieerbaar is en bereken zijn afgeleide.

(d) Toon aan dat f oneindig vaak differentieerbaar is.[2] Wat is de n-de afgeleide in 0 ?

[2]Dit betekent $f'' = (f')'$ is differentieerbaar, $f''' = (f'')'$ is differentieebaar, etc.

VIII RIEMANN-INTEGRAAL

Oppervlakten spelen al duizenden jaren een belangrijke rol in de maatschappij. Er zijn veel methoden ontwikkeld om oppervlakten uit te rekenen. Enkele eeuwen geleden is gebleken dat de integratie-theorie een krachtige tool is om oppervlakten te bepalen. In de 17e eeuw is het begin van de integratie-theorie ontdekt door Newton en Leibniz. Een precieze wiskundige theorie is pas veel later geformuleerd door Riemann in de 19e eeuw. In dit hoofdstuk zullen we een variant van Riemann's theorie uit leggen.[1] Het zal blijken dat de resultaten in dit hoofdstuk gebruik maken van bijna alle technieken uit de andere hoofdstukken. Aan het begin van de 20e eeuw is een nog krachtigere integraal ontwikkeld door Lebesgue. Deze speelt inmiddels een centrale rol in de moderne wiskunde, maar maakt geen deel uit van dit vak.[2]

VIII.1 Definitie en criteria voor Riemann-integreerbaarheid

Laat $D \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f\colon D \to \mathbb{R}$ is *begrensd* als er een $M \geq 0$ is zó dat $\left|f(x)\right| \leqslant M$ voor alle $x \in D$.

Om de Riemann-integraal te definiëren hebben we een aantal begrippen nodig.

partities

VIII.1.1 Definitie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Een *partitie* van het interval $[a, b]$ is een eindige verzameling $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ punten uit $[a, b]$ met de eigenschap dat $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Als P_1 en P_2 partities van $[a, b]$ zijn dan noemen we P_2 *fijner dan* P_1 als $P_1 \subseteq P_2$.

VIII.1.2 Opmerking.

(i) Het woord partitie (verdeling) duidt aan dat we, met behulp van de punten van P, het interval $[a, b]$ in deelintervallen verdelen. Als $a = b$ dan is er precies één partitie van $[a, b]$, te weten $a = x_0 = b$.

(ii) Als P_2 fijner is dan P_1 betekent dit dat elk intervalletje uit de verdeling P_1 door P_2 verder wordt verdeeld.

(iii) Als P_1 en P_2 partities van $[a, b]$ zijn, dan krijgen we een nieuwe partitie P door P_1 en P_2 samen te voegen: $P = P_1 \cup P_2$. Merk op dat deze partitie P een verfijning is van zowel P_1 als P_2.

[1] Eigenlijk presenteren we hier een integraal die equivalent aan de Riemann-integraal is, en bekend staat onder de naam Darboux integraal.

[2] Een uitgebreidere geschiedenis van integratie-theorie is te vinden op wikipedia onder de naam *Integral*.

Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \leq c \leq d \leq b$. In de volgende definitie gebruiken we de verkorte notaties

$$\sup_{x\in[c,d]} f(x) = \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\}, \quad \text{en} \quad \inf_{x\in[c,d]} f(x) = \inf\{f(x) : c \leq x \leq d\}.$$

Boven- en ondersommen

VIII.1.3 Definitie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$ en neem aan dat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie is. Zij $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ een partitie van $[a,b]$. Voor $i = 1, \ldots, n$ definiëren we

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad \text{en} \quad \Delta_i = x_i - x_{i-1}.$$

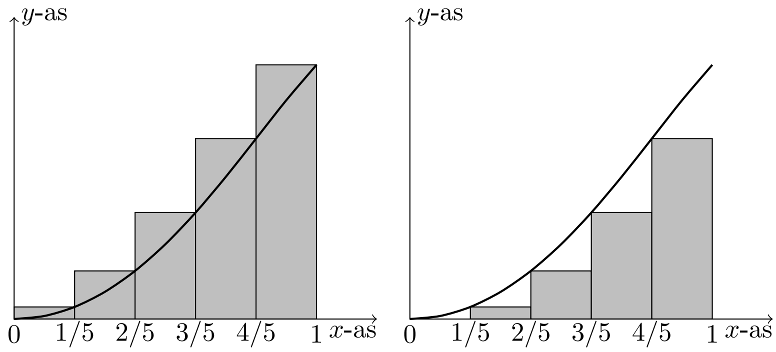
De *bovensom* $U(P,f)$ is gedefinieerd door

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

en de *ondersom* $L(P,f)$ is gedefinieerd door

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i.$$

VIII.1.4 Voorbeeld. De functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sin(x^2)$ is begrensd op het gesloten en begrensd interval $[0,1]$; de Riemann-sommen voor f zijn dus gedefinieerd. In Figuur 8.1 zien we de boven- en ondersom voor de partitie $P = \big\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\big\}$.



Figuur 8.1: Boven- en ondersom van $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$

■

VIII.1.5 Opmerking. Uit bovenstaande voorbeeld is duidelijk dat zodra de partitie fijner wordt de onder- en bovensommen een betere benadering geven van de oppervlakte tussen de grafiek van f en de lijnen $x = 1$ en $y = 0$. Elk van de bovensommen is een bovengrens van deze oppervlakte, en elk van de ondersommen is een ondergrens van deze oppervlakte. Wat de oppervlakte precies is, zullen we pas aangeven in Definitie VIII.1.9.

In het volgende lemma bewijzen we enkele elementaire eigenschappen van boven- en ondersommen.

VIII.1.6 Lemma. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie en laat

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{en} \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

(i) Als P een partitie van $[a,b]$ is, dan geldt
$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a).$$
(ii) Laat P en Q partities van $[a,b]$ zijn zó dat $P \subseteq Q$, dan geldt
$$L(P,f) \leq L(Q,f) \quad \text{en} \quad U(Q,f) \leq U(P,f).$$
(iii) Als P en Q partities van $[a,b]$ zijn, dan geldt
$$L(P,f) \leq U(Q,f).$$

Bewijs.

(i): Laat $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Aangezien $m_i \leq M_i$ volgt dat
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i = U(P,f).$$
Omdat $M_i \leq M$ volgt ook dat $U(P,f) \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i = M(b-a)$. Analoog zien we dat $L(P,f) \geq m(b-a)$.

(ii): Laat $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Neem eerst aan dat Q één punt meer heeft dan P, dus $Q = P \cup \{y\}$ met $x_{k-1} \leq y \leq x_k$ voor een $1 \leq k \leq n$. Laat $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ en $\Delta_i = (x_i - x_{i-1})$ voor $i = 1, \ldots, n$. Er geldt
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i, \qquad \text{en}$$
$$U(Q,f) = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} M_i \Delta_i + \sup_{x \in [x_{k-1}, y]} f(x) \cdot (y - x_{k-1}) + \sup_{x \in [y, x_k]} f(x) \cdot (x_k - y).$$
Om $U(Q,f) \leq U(P,f)$ te bewijzen, voldoet het te laten zien dat
$$\sup_{x \in [x_{k-1}, y]} f(x) \cdot (y - x_{k-1}) + \sup_{x \in [y, x_k]} f(x) \cdot (x_k - y) \leq M_k \Delta_k,$$
Dit laatste volgt direct uit
$$\sup_{x \in [x_{k-1}, y]} f(x) \leq M_k \quad \text{en} \quad \sup_{x \in [y, x_k]} f(x) \leq M_k.$$
Als Q een willekeurige partitie is die fijner dan P is, dan kunnen we $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ vinden zó dat $Q_j = P \cup \{y_1, \ldots, y_j\}$ voor $j = 1, \ldots, m$, en $Q_m = Q$. Uit het bovenstaande volgt dan dat
$$U(Q,f) = U(Q_m, f) \leq U(Q_{m-1}, f) \leq \ldots \leq U(Q_1, f) \leq U(P,f).$$
Analoog kun je aantonen dat $L(Q,f) \geq L(P,f)$ (zie Opgave VIII.1.1).

(iii): Laat P en Q willekeurige partities van $[a,b]$ zijn. Definieer $R = P \cup Q$. Dan geldt R is fijner dan P en Q. Uit (i) en (ii) volgt dat
$$L(P,f) \leq L(R,f) \leq U(R,f) \leq U(Q,f).$$
■

boven- en onderintegraal

VIII.1.7 Definitie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd. De *bovenintegraal van* f over $[a,b]$ is gedefinieerd door
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\big\{U(P,f) : P \text{ is een partitie van } [a,b]\big\}.$$
De *onderintegraal van* f over $[a,b]$ is gedefinieerd door
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\big\{L(P,f) : P \text{ is een partitie van } [a,b]\big\}.$$

VIII.1.8 Opmerking. Zij $a \leq b$ en $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Merk op dat uit Lemma VIII.1.6 en de definitie van het infimum en supremum volgt dat

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Het bewijs van de middelste ongelijkheid gaat als volgt. Zij Q een partitie van $[a,b]$. Uit Lemma VIII.1.6 (iii) volgt dat voor alle partities P van $[a,b]$ geldt dat $L(P,f) \leq U(Q,f)$ en dus

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(Q,f).$$

Aangezien Q willekeurig is, volgt dat bovenstaande ongelijkheid voor alle partities Q geldt, en dus volgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Riemann-integraal

VIII.1.9 Definitie. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heet *Riemann-integreerbaar* op $[a,b]$ als f begrensd is en

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

In dit geval noemen we dit getal *de Riemann-integraal van f over* $[a,b]$.

Notatie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Als $a \leq c \leq d \leq b$ dan zeggen we dat f Riemann-integreerbaar is op $[c,d]$ als $f|_{[c,d]}$ Riemann-integreerbaar is op $[c,d]$.

VIII.1.10 Opmerking. Onder de aannames van de bovenstaande definitie is het vaak handig ook $\int_b^a f(x)\,dx$ te definiëren. We spreken daarom af:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Er geldt $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (zie Opgave VIII.1.3).

Met de volgende stelling kun je de Riemann-integreerbaarheid van een functie f controleren.

criterium

VIII.1.11 Stelling (Criterium voor Riemann-integreerbaarheid)**.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Laat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

(1) f is Riemann-integreerbaar op $[a,b]$.
(2) Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een partitie P van $[a,b]$ zó dat $U(P,f) - L(P,f) \leq \varepsilon$.
(3) Er zijn partities $P_0, P_1, \ldots$ van $[a,b]$ met $\lim_{n\to\infty} U(P_n,f) - L(P_n,f) = 0$.

In geval (3) geldt dat de rijen $(U(P_n,f))_{n\geq 0}$ en $(L(P_n,f))_{n\geq 0}$ convergent zijn en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n,f). \tag{VIII.1}$$

Bewijs. (1) ⇒ (2): Neem aan dat (1) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Kies P en Q zó dat

$$U(P,f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en} \quad L(P,f) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Er volgt dat

$$U(P,f) - L(P,f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon.$$

(2) ⇒ (3): Dit volgt door in (2) ε gelijk aan 1, 1/2, 1/3, etc. te nemen en de bijbehorende partities P_0, P_1, P_2, etc. te noemen.

(3) ⇒ (1): Neem aan dat (3) geldt en noem $s = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n,f)$. Merk op dat

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \inf_{n\geq 1} U(P_n,f) \leq s \leq \sup_{n\geq 1} L(P_n,f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Uit Opmerking VIII.1.8 volgt nu dat

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = s.$$

Hieruit volgt dat f Riemann integreerbaar is en dat (VIII.1) geldt. ■

VIII.1.12 Voorbeeld. We bewijzen dat $\int_0^1 x\,dx = 1/2$ met behulp van Stelling VIII.1.11. Zij $f(x) = x$ en beschouw voor elke $n \geq 1$ de partitie

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

van $[0,1]$. Dan geldt

$$L(P_n,f) = 0 + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{2}(n-1)n}{n^2} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$$

en

$$U(P_n,f) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

We vinden dat

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n,f) - L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dus uit Stelling VIII.1.11 volgt dat f Riemann-integreerbaar is op $[0,1]$ en

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = 1/2.$$

Ook kunnen we nu de volgende belangrijke stelling bewijzen.

VIII.1.13 Stelling. Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is f Riemann-integreerbaar op $[a,b]$.

Bewijs. Merk eerst op dat uit Propositie V.4.1 volgt dat f begrensd is. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Uit Stelling V.3.4 volgt dat f uniform continu is. Kies $\delta > 0$ zó dat voor alle $x, y \in [a, b]$ met $|x - y| < \delta$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$. Kies $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zo groot dat $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Neem $x_i = \frac{i(b-a)}{n}$ en $\Delta_i = \frac{b-a}{n}$ voor $i = 0, \ldots, n$, en $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Definieer voor elke $i = 1, \ldots, n$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{en} \quad M_i = \sup_{y \in [x_{i-1}, x_i]} f(y).$$

Voor elke $i = 1, \ldots, n$ geldt

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= \Big(\sup_{y \in [x_{i-1}, x_i]} f(y) \Big) - \Big(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Big) \\ &= \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} \big(f(y) - f(x) \big) \leq \frac{\varepsilon}{b - a}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta_i = \varepsilon.$$

De Riemann-integreerbaarheid volgt nu uit Stelling VIII.1.11. ■

VIII.1.14 Opmerking. Er zijn ook niet-continue functies die Riemann-integreerbaar zijn (zie Opgaven VIII.1.12, VIII.2.6 en VIII.1.14).

Het volgende voorbeeld laat zien dat er begrensde functies bestaan die niet Riemann-integreerbaar zijn; zulke functies moeten noodzakelijk in oneindig veel punten niet continu zijn (zie Opgave VIII.2.6).

niet integreerbare functie

VIII.1.15 Voorbeeld. Beschouw $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{als} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zij P een partitie. Er geldt dat $U(P, f) = 1$, omdat tussen elk paar verschillende reële getallen een rationaal getal ligt. Er geldt $L(P, f) = 0$, omdat tussen elk paar verschillende reële getallen een irrationaal getal ligt. Hieruit volgt

$$\underline{\int_0^1} f(x)\, dx = 0 \quad \text{en} \quad \overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 1,$$

en dus is de functie niet Riemann-integreerbaar op $[0, 1]$. ■

Opgaven

1. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Laat P en Q partities zijn zó dat $P \subseteq Q$. Toon aan dat $L(P, f) \leq L(Q, f)$ (zie Lemma VIII.1.6).

2. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. Zij $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ een partitie en $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ voor $i = 1, \ldots, n$. Toon aan dat

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} \big(f(x) - f(y) \big).$$

3. Zij $f : [a, a] \to \mathbb{R}$ een functie. Laat zien dat $\int_a^a f(x)\, dx = 0$.

4. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de constante functie met waarde M.

(a) Toon aan dat
$$L(f,P) = U(f,P) = M(b-a)$$
voor iedere partitie P van $[a,b]$.

(b) Leid af uit (a) dat
$$\int_a^b f(x)\,dx = M(b-a).$$

✍ **5.** Bewijs met behulp van Stelling VIII.1.11 dat $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

6. Zij $a < b$. Bewijs met behulp van Stelling VIII.1.11 dat
$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

7. Zij $a < b$. Bewijs met behulp van Stelling VIII.1.11 dat
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

8. Zij $a > 0$. Bewijs met behulp van Stelling VIII.1.11 dat
$$\int_0^a e^x\,dx = e^a - 1.$$

☆✍ **9.** Zij $0 < a < b$. Bewijs met behulp van Stelling VIII.1.11 dat
$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(a).$$

10. Zij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = e^{x^2}$.

(a) Bewijs dat f Riemann-integreerbaar is op $[0,1]$.

(b) Geef een benadering van $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ met een fout die minder is dan $\frac{1}{1000}$.

11. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $f(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in [a,b]$. Toon aan: als
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$
dan is $f(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$.

✍ **12.** Bewijs dat de functie $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{als} \quad 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$
Riemann-integreerbaar is op $[0,2]$ en bereken de waarde van $\int_0^2 f(x)\,dx$.

13. Laat $a > 0$. Zij $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ *oneven*, dat wil zeggen, $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in [-a,a]$, en continu. Toon aan dat
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

☆ **14.** Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie zijn. Toon aan dat f Riemann-integreerbaar is op $[a,b]$.

VIII.2 Eigenschappen van de Riemann-integraal

In deze paragraaf bespreken we enkele belangrijke eigenschappen van de Riemann-integraal. Vanaf nu zullen we Riemann-integreerbaar afkorten tot integreerbaar.

VIII.2.1 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Neem aan dat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbare functies zijn en zij $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) De functie $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ is integreerbaar op $[a,b]$ en

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) De functie $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is integreerbaar op $[a,b]$ en

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) Als voor alle $x \in [a,b]$ geldt dat $f(x) \leq g(x)$, dan

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bewijs. (i): Aangezien f en g integreerbaar zijn op $[a,b]$ kunnen we met Stelling VIII.1.11 partities $P_0, P_1, \ldots$ en $Q_0, Q_1, \ldots$ vinden zó dat voor elke $n \geq 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n, f) - L(P_n, f) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} U(Q_n, g) - L(Q_n, g) = 0. \tag{VIII.2}$$

Definieer $R_n = P_n \cup Q_n$ voor $n = 0, 1, \ldots$. Dan volgt uit Lemma VIII.1.6 en de Insluitstelling dat (VIII.2) geldt met P_n en Q_n vervangen door R_n. Merk op dat (zie Opgave VIII.2.1)

$$\begin{aligned} U(R_n, f+g) &\leq U(R_n, f) + U(R_n, g), \\ L(R_n, f+g) &\geq L(R_n, f) + L(R_n, g). \end{aligned} \tag{VIII.3}$$

Uit (VIII.3) volgt dat voor elke $n \geq 0$ geldt

$$\begin{aligned} 0 \leq U(R_n, f+g) - L(R_n, f+g) &\leq U(R_n, f) + U(R_n, g) - \big(L(R_n, f) + L(R_n, g)\big) \\ &= U(R_n, f) - L(R_n, f) + U(R_n, g) - L(R_n, g). \end{aligned}$$

De Insluitstelling geeft dan dat $\lim_{n\to\infty} U(R_n, f+g) - L(R_n, f+g) = 0$, dus met Stelling VIII.1.11 zien we dat $f+g$ integreerbaar is op $[a,b]$. Als we Stelling VIII.1.11 en (VIII.3) combineren vinden we dat

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} U(R_n, f+g) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \Big(U(R_n, f) + U(R_n, g)\Big) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} L(R_n, f+g) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \Big(L(R_n, f) + L(R_n, g)\Big) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dit bewijst (i).

(ii): Het geval $\lambda \geq 0$ is Opgave VIII.2.2.

Voor het geval $\lambda < 0$ voldoet het $\lambda = -1$ te beschouwen. Met behulp van Stelling VIII.1.11 vinden we partities $P_0, P_1, \ldots$ zó dat

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Merk op dat $U(P_n, -f) = -L(P_n, f)$ en $L(P_n, -f) = -U(P_n, f)$ voor elke $n \geq 0$. Er volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n, -f) = \lim_{n\to\infty} -L(P_n, f) = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, -f) = \lim_{n\to\infty} -U(P_n, f) = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Met behulp van Stelling VIII.1.11 volgt dat $-f$ integreerbaar is op $[a, b]$, en

$$\int_a^b -f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n, -f) = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

(iii): Laat $h = g - f$. Uit (i) en (ii) volgt dat

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx,$$

Het voldoet te bewijzen dat $\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$. Merk op voor alle $x \in [a, b]$ geldt $h(x) \geq 0$. Neem als partitie $P = \{a, b\}$. Dan geldt $L(P, h) = m_1(b - a)$, waarbij $m_1 = \inf\limits_{x\in[a,b]} h(x)$. Aangezien $m_1 \geq 0$ en $b - a \geq 0$ volgt dat $L(P, h) \geq 0$. Dus

$$0 \leq L(P, h) \leq \underline{\int_a^b} h(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx.$$

■

We willen nu laten zien dat integreerbaarheid behouden blijft onder het nemen van absolute waarde, producten, etc. Hiervoor bewijzen we eerst het volgende lemma.

VIII.2.2 Lemma. Neem aan dat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie is. Laat $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ en $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Zij $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ een Lipschitz functie. Dan geldt $\phi \circ f$ is integreerbaar op $[a, b]$.

Bewijs. Kies $K > 0$ zó dat voor alle $x, y \in [m, M]$ geldt

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|.$$

We gebruiken Stelling VIII.1.11. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies een patitie P van $[a, b]$ zó dat $U(P, f) - L(P, f) \leq \varepsilon/K$. Met behulp van Opgave VIII.2.3 volgt dat

$$U(P, \phi \circ f) - L(P, \phi \circ f) \leq K\Big(U(P, f) - L(P, f)\Big) \leq \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\phi \circ f$ integreerbaar is op $[a, b]$. ■

Nu kunnen we de volgende stelling bewijzen.

VIII.2.3 Stelling. Neem aan dat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integreerbare functies op $[a, b]$ zijn. Dan geldt

(i) De functie $|f|$ is integreerbaar op $[a,b]$ en

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{(driehoeksongelijkheid voor integralen)}$$

(ii) De functie f^2 is integreerbaar op $[a,b]$.
(iii) De functie fg is integreerbaar op $[a,b]$.
(iv) De functie $\max\{f,g\}$ is integreerbaar op $[a,b]$.
(v) De functie $\min\{f,g\}$ is integreerbaar op $[a,b]$.

Bewijs. (i): De integreerbaarheid volgt uit Lemma VIII.2.2 met $\phi(x) = |x|$.

Om de ongelijkheid te bewijzen kies $c \in \{-1,1\}$ zó dat $c\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Aangezien $cf(x) \le |f(x)|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, volgt uit Stelling VIII.2.1 dat

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| = c\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b cf(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(ii): De integreerbaarheid van f^2 volgt uit Lemma VIII.2.2 met $\phi(x) = x^2$.

(iii): Dit volgt uit (ii), Stelling VIII.2.1 en de polarisatie identiteit

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

(iv): Uit Lemma VIII.2.2 met $\phi(x) = \max\{x,0\}$ volgt dat $\phi \circ h = \max\{h,0\}$ integreerbaar is als h integreerbaar is op $[a,b]$. Het is eenvoudig om na te gaan dat

$$\max\{f,g\} = f + \phi\circ(g-f).$$

Dus de integreerbaarheid van $\max\{f,g\}$ volgt uit Stelling VIII.2.1.

(v): Dit volgt uit $\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$ en (iv) en Stelling VIII.2.1. ■

De volgende stelling over het opdelen van integralen over deelintervallen is vaak van belang.

VIII.2.4 Stelling.

(i) Laat $a \le c < d \le b$. Als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar is op $[a,b]$, dan is f ook integreerbaar op $[c,d]$.
(ii) Laat $a \le c \le b$. Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar is op $[a,c]$ en op $[c,b]$, dan is f ook integreerbaar op $[a,b]$ en er geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bewijs. Zie Opgave VIII.2.5. ■

Opgaven

1. Laat $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensde functies zijn. Laat P een partitie van $[a,b]$ zijn.
(a) Bewijs dat $U(P,f+g) \le U(P,f) + U(P,g)$.
(b) Bewijs dat $U(P,-f) = -L(P,f)$.
(c) Leidt af dat $L(P,-f) = -U(P,f)$ en $L(P,f+g) \ge L(P,f) + L(P,g)$.
Hint: gebruik deel (a) en (b).

✍

2. Bewijs Stelling VIII.2.1 (ii) in het geval $\lambda \geq 0$.

3. Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. Laat P een partitie van $[a,b]$ zijn. Laat ϕ als in Lemma VIII.2.2 zijn. Toon aan dat

$$U(P, \phi \circ f) - L(P, \phi \circ f) \leq K \cdot \big(U(P,f) - L(P,f)\big),$$

waarbij $K > 0$ zo is dat voor alle $x, y \in [a,b]$ geldt $|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x-y|$ is.

4. Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Neem aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $x \in [a,b]$ geldt $f(x) \geq \delta$. Toon met behulp van Lemma VIII.2.2 aan dat $1/f$ integreerbaar is.

✍ **5.** Bewijs Stelling VIII.2.4.

✭ **6.** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Zij $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie die continu is buiten een eindig aantal punten van $[a,b]$. Bewijs dat f integreerbaar is over $[a,b]$.

✭ **7.** Laat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. Gegeven is dat voor elke $\delta > 0$ de functie f integreerbaar is op $[\delta, 1]$. Bewijs de volgende uitspraken:

✍ (a) f is integreerbaar op $[0,1]$.

(b) De limiet $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 f(x)\,dx$ bestaat en

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 f(x)\,dx.$$

✭ **8.** Laat zien dat Lemma VIII.2.2 ook waar is als we eisen dat ϕ uniform continu is in plaats van Lipschitz continu.

VIII.3 De Hoofdstelling van de Integraalrekening

Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar is dan kunnen we een nieuwe functie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiëren door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Merk op dat de integreerbaarheid van f op $[a,x]$ volgt uit Stelling VIII.2.4. In deze paragraaf onderzoeken we de eigenschappen van de bovenstaande functie F.

VIII.3.1 Propositie. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar, en definieer $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dan geldt F is continu op $[a,b]$.

Bewijs. Aangezien f begrensd is kunnen we een $M \geq 0$ vinden zó dat voor alle $x \in [a,b]$ geldt $|f(x)| \leq M$. Voor alle $a \leq x \leq y \leq b$ volgt uit Stelling VIII.2.4 dat

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Uit Stelling VIII.2.3 volgt dat

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt.$$

Met behulp van Stelling VIII.2.1 vinden we dat

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt = M(y-x).$$

Er volgt dat F een Lipschitz continue functie is, en dus ook dat F continu is. ■

VIII.3.2 Voorbeeld. (i) Zij $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 1/x$. In Opgave VIII.1.9 hebben we gezien dat voor $0 < a \leq b$ geldt dat

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln(b) - \ln(a).$$

Neem nu $a = 1$. Definieer $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Dan geldt dus blijkbaar $F(x) = \ln x$ voor alle $x \in (0,\infty)$.

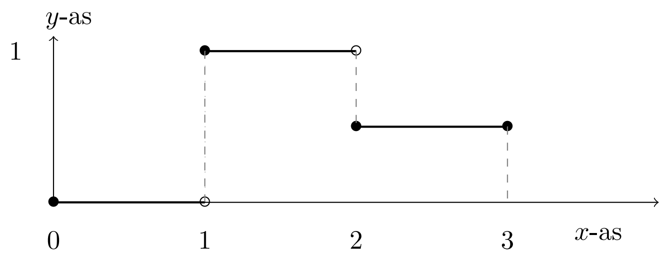
(ii) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = e^{-x^2}$. De functie f is continu op $\mathbb{R}$, en dus integreerbaar op ieder begrensd interval. Definieer $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Het is echter onmogelijk om deze functie F in bekende functies uit te drukken.

(iii) Definieer $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



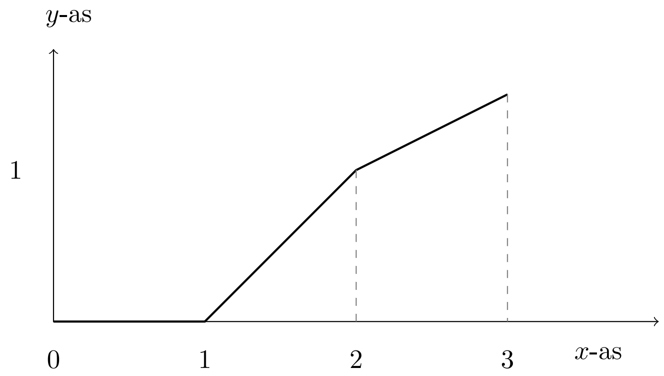
Figuur 8.2: De grafiek van de functie f

Definieer $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Dan geldt

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



Figuur 8.3: De grafiek van de functie F

Kunnen we de functie f uit de functie F terugvinden als we de functie F kennen? Dit kan in het algemeen niet. Als we f in eindig veel punten veranderen, dan verandert de functie F niet. Als we meer aannemen over de functie f dan kan het wel. Dit is de inhoud van de volgende stelling.

Hoofdstelling van de Integraalrekening

VIII.3.3 Stelling (Hoofdstelling van de Integraalrekening)**.**
Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu, en definieer de functie $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dan is F differentieerbaar en voor alle $x \in (a, b)$ geldt $F'(x) = f(x)$.

Bewijs. Laat $x_0 \in [a, b)$. Voor alle $h > 0$ zó dat $x_0 + h \in [a, b]$ volgt uit Stelling VIII.2.4 dat:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Ook geldt dat

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt.$$

Uit Stelling VIII.2.1 volgt dus

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt$$

Vervolgens vinden we met Stelling VIII.2.3 dat

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt\Big|\\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt.\end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in [a,b]$ met $|x - x_0| < \delta$ geldt dat

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Er volgt dat voor alle $h \in (0,\delta)$ met $x_0 + h \in [a,b]$ geldt dat

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt\\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

waarbij laatste ongelijkheid volgt uit Stelling VIII.2.1 (iii). Dit bewijst dat F rechtsdifferentieerbaar is in x_0 met rechterafgeleide $f(x_0)$.

Op dezelfde manier kun je bewijzen dat F linksdifferentieerbaar is in x_0 met linkerafgeleide $f(x_0)$ (zie Opgave VIII.3.1). Hieruit volgt dat F differentieerbaar is in x_0 met afgeleide $f(x_0)$. Aangezien $x_0 \in (a,b)$ willekeurig is volgt de stelling. ■

Hiermee zijn we in staat de volgende bijzondere stelling te bewijzen die ons in staat stelt veel integralen uit te rekenen zonder terug te hoeven naar de definitie van de integraal.

VIII.3.4 Stelling. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie en zij $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu op $[a,b]$, en differentieerbaar op (a,b) met $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a,b)$. Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Bewijs. Definieer $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$G(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x f(t)\,dt.$$

We moeten aantonen dat $G(b) = 0$. Uit Propositie VIII.3.1 volgt dat G continu is. Uit de Hoofdstelling van de Integraalrekening en de differentieerbaarheid van F op (a,b) volgt dat G differentieerbaar is op (a,b) met afgeleide

$$G'(x) = F'(x) - f(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad x \in (a,b).$$

Maar dan volgt uit Stelling VII.2.5 dat G constant is op $[a,b]$. Uit de definitie van G volgt dat $G(a) = 0$. Maar dan geldt $G(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$, dus ook $G(b) = 0$. ■

VIII.3.5 Opmerking. Een functie zoals de functie F in Stelling VIII.3.4 wordt *een primitieve van* f genoemd. Merk op dat een functie veel primitieven heeft. Namelijk iedere functie $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ van de vorm $H = F + K$, waarbij K een constante is, voldoet aan $H' = f$. Er geldt ook dat iedere primitieve van deze vorm moet zijn (zie Opgave VIII.3.3).

We laten nu zien hoe effectief het kan zijn om met Stelling VIII.3.4 een integraal uit te rekenen.

VIII.3.6 Voorbeeld. Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de functie $f(x) = \sqrt{x}$. We beschouwen $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$. Aangezien f een continue functie is, is f integreerbaar op $[0, 1]$. Laat $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de functie $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ zijn. Dan geldt F is continu op $[0, 1]$ en $F' = f$ op $(0, 1)$. Met de Stelling VIII.3.4 vinden we

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = F(1) - F(0) = \frac{2}{3}.$$

Dit is niet zo eenvoudig om direct te bewijzen met behulp van boven- en ondersommen. ■

Opgaven

1. Bewijs dat de functie F in Stelling VIII.3.3 linksdifferentieerbaar is op (a, b).

2. Definieer de functie $g \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ door

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Laat met behulp van de Hoofdstelling van de integraalrekening zien dat $g(x) = \ln x$ voor alle $x \in (0, \infty)$.

3. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat f en F zoals in Stelling VIII.3.4 zijn. Zij $H \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een continu op $[a, b]$, en differentieerbaar op (a, b) met $H'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a, b)$. Toon aan dat er een constante $K \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $H = F + K$.

4. Toon aan dat de functie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + y^4}\, dy$$

differentieerbaar is, en bepaal de afgeleide van deze functie.
Aanwijzing: Pas de kettingregel toe op $h(x) = x^2$ en $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y^4}\, dy$.

5. Zij $M \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, en $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie met de eigenschap dat $\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant M|x - y|$ voor alle $x, y \in [a, b]$. Toon aan dat

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - f(a)(b - a) \right| \leqslant \frac{M}{2}(b - a)^2.$$

6. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ tweemaal differentieerbaar met continue tweede afgeleide f''. Laat $c \in (a, b)$ en definieer de functie $g_c \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ door

$$g_c(x) = \int_c^x (x - t) f''(t)\, dt \qquad (x \in (a, b)).$$

(a) Toon aan dat g_c differentieerbaar is op (a,b) en bepaal $g_c'(x)$.

(b) Gebruik dit om aan te tonen dat

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x-c) + \int_c^x (x-t)f''(t)\,dt$$

voor alle $x \in (a,b)$.

(c) Toon aan: als $M \geq 0$ en

$$\text{voor alle } x \in (a,b): \quad \bigl|f''(x)\bigr| \leqslant M,$$

dan geldt voor alle $x \in (a,b)$ de volgende afschatting:

$$\bigl|f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)\bigr| \leqslant M|x-c|^2/2.$$

Partiëel integreren

7. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue functies zijn zó dat f' en g' bestaan en ook continu zijn op $[a,b]$.[3] Toon aan:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Aanwijzing: Gebruik de productregel voor differentiëren.

[3] Hierbij gebruiken we de linker- en rechter afgeleide in de eindpunten.

IX PUNTSGEWIJZE EN UNIFORME CONVERGENTIE

In vorige hoofdstukken hebben we convergentie van getallenrijen bestudeerd. In de Analyse zijn echter rijen die functies als termen hebben van groot belang. Zulke functierijen hebben we eigenlijk al wel gezien:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x^j, \quad x \in (-1, 1).$$

Het is duidelijk wat in elk van deze gevallen de rij $f_0(x), f_1(x), \dots$ is.

Convergentie van functierijen speelt onder andere een rol bij de vraag of de volgende identiteit geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Met andere woorden kun je integraal en limiet omwisselen? Het volgend voorbeeld geeft aan dat dit niet altijd kan.

Voorbeeld Bekijk $\int_0^1 \frac{n^2x}{(nx+1)^3}\,dx$. Voor elke $x \in [0,1]$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2x}{(nx+1)^3} = 0$. Hierdoor vermoeden we dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2x}{(nx+1)^3}\,dx = 0.$$

We kunnen in dit geval ook ieder van de integralen $\int_0^1 \frac{n^2x}{(nx+1)^3}\,dx$ uitrekenen met behulp van de technieken uit het vorige hoofdstuk. Merk op dat

$$\frac{n^2x}{(nx+1)^3} = \frac{n(nx+1)-n}{(nx+1)^3} = \frac{n}{(nx+1)^2} - \frac{n}{(nx+1)^3}.$$

De functie $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $F_n(x) = -\frac{1}{nx+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(nx+1)^2}$ is een primitieve van f, en er volgt

$$\int_0^1 \frac{n^2x}{(nx+1)^3}\,dx = F_n(1) - F_n(0) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2}.$$

Hieruit zien we dat

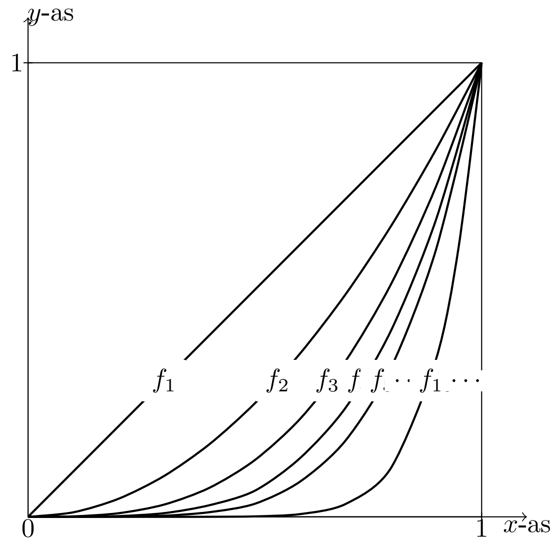
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2x}{(nx+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}.$$

IX.1 Convergentie van rijen van functies

In deze paragraaf zullen we bekijken hoe we convergentie van een functierij kunnen definiëren.

Puntsgewijze convergentie

Laten we de rij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ nemen, waarbij voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie f_n op het interval $(0,1)$ gedefinieerd is door $f_n(x) = x^n$, zie Figuur 9.1.



Figuur 9.1: Functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ waarbij $f_n(x) = x^n$

Een methode om een limietfunctie te definiëren ligt voor de hand: voor elke $x \in (0,1)$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; de limietfunctie van deze rij is dan de functie f gedefinieerd door $f(x) = 0$.

puntgewijze convergentie

IX.1.1 Definitie. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ *puntsgewijs convergeert* als voor elke $x \in D$ de reële rij $(f_n(x))_{n\geq 0}$ convergent is. De *limietfunctie* $f\colon D \to \mathbb{R}$ is dan gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Notatie: $f_n \xrightarrow{p} f$.

IX.1.2 Opmerking.

(i) Merk op dat de limietfunctie, indien zij bestaat, uniek is. Dit volgt direct uit de uniciteit van limieten van reele rijen.

(ii) Er geldt $f_n \xrightarrow{p} f$ dan en slechts dan als als voor iedere $x \in D$ en voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N \text{ geldt } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(iii) De functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ is puntsgewijs convergent dan en slechts dan als voor elke $x \in D$, de reele rij $(f_n(x))_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is.

IX.1.3 Voorbeeld. De functierij hierboven convergeert puntsgewijs op het interval $(0,1)$ naar de nulfunctie.

IX.1.4 Voorbeeld. Definieer nu, net als in Voorbeeld IX.1.3, de rij $(g_n)_{n\geq 0}$, $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, door $g_n(x) = x^n$. Er geldt (zie Stelling IV.1.8): $g_n \xrightarrow{p} g$ met

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0,1), \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Merk op dat de continuïteit verloren ging: hoewel elke g_n continu is, is g niet continu.

IX.1.5 Voorbeeld. We beschouw de functierij uit de introductie van dit hoofdstuk. Zij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f_n(x) = \frac{n^2 x}{(nx+1)^3}$ voor $n = 0, 1, \ldots$. Dan volgt uit de rekenregels voor limieten dat geldt $f_n \xrightarrow{p} 0$. Inderdaad, voor $x = 0$ geldt $f_n(x) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $x \in (0,1]$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{x}{(x + \frac{1}{n})^3} = 0 \cdot \frac{x}{x^3} = 0.$$

Uniforme convergentie

Puntsgewijze convergentie is een natuurlijk begrip maar blijkt in de praktijk niet zo goed te werken:

- In Voorbeeld IX.1.4 was elke g_n continu maar de limietfunctie was niet continu.
- In Voorbeeld IX.1.5 convergeert de functierij puntsgewijs naar nul, maar de reele rij $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\geq 0}$ convergeert naar $\frac{1}{2}$ (zie introductie).

In de volgende definitie introduceren we een sterkere vorm van convergentie, die veel betere eigenschappen heeft, maar wel lastiger te controleren is.

uniforme convergentie

IX.1.6 Definitie. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en laat voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. Laat ook $f\colon D \to \mathbb{R}$. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ *uniform naar f convergeert* als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } n \geq N \text{ en voor alle } x \in D \text{ geldt } \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notatie: $f_n \xrightarrow{u} f$.

IX.1.7 Opmerking.

(i) Merk op op dat in de bovenstaande definitie, het getal $N \in \mathbb{N}$ niet van $x \in D$ af mag hangen.

(ii) Er geldt $f_n \xrightarrow{u} f$ dan en slechts dan als (zie Opgave IX.1.3)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

(iii) Als $f_n \xrightarrow{u} f$ dan geldt ook $f_n \xrightarrow{p} f$ (zie Opgave IX.1.4).

IX.1.8 Voorbeeld. Beschouw de functierij $(g_n)_{n\geq 0}$ uit Voorbeeld IX.1.4. We zullen aantonen dat deze functierij *niet* uniform convergeert naar de functie g.

Neem $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Laat $N \in \mathbb{N}$. Neem nu $n = N$ en $x \in [0,1)$ met $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/N}$. Voor deze n en x hebben we

$$\left|g_n(x) - g(x)\right| \geq \varepsilon,$$

dus $(g_n)_{n\geq 0}$ convergeert niet uniform naar g.

Analoog kunnen we aantonen dat ook de $(f_n)_{n\geq 0}$ uit Voorbeeld IX.1.3 niet uniform naar f convergeert, zie Opgave IX.1.2.

IX.1.9 Voorbeeld. Door de definitieverzameling kleiner te nemen kan de convergentie uniform worden. Neem bijvoorbeeld $h_n\colon [0,1/2] \to [0,1]$ met $h_n(x) = x^n$ voor elke $x \in [0,1/2]$. Dan geldt $h_n \overset{u}{\to} h$ met $h(x) = 0$ voor elke $x \in [0,1/2]$. Immers, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een N met $\varepsilon > (\frac{1}{2})^N$ en met zo een N hebben we:

$$\text{voor alle } x \in [0,1/2] \text{ en } n \geq N \text{ geldt } \big|h_n(x) - h(x)\big| < \varepsilon.$$

Continuïteit

Uniforme convergentie garandeert dat de limietfunctie van continue functies continu is.

IX.1.10 Stelling. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Laat $f\colon D \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Als elke f_n continu is en $f_n \overset{u}{\to} f$ dan is ook f continu.

Bewijs. We moeten bewijzen dat f continu in c is voor elke $c \in D$. Laat $c \in D$.

Zij $\varepsilon > 0$. We zoeken een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt dat $\big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon$. Omdat $f_n \overset{u}{\to} f$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\text{voor alle } y \in D \text{ geldt } \big|f_N(y) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Volgens de veronderstelling is de functie f_N continu in het punt $c \in D$; kies dus een $\delta > 0$ met $\big|f_N(x) - f_N(c)\big| < \varepsilon/3$ voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$. Er volgt dat voor elke $x \in D$ met $|x - c| < \delta$ geldt

$$\big|f(x)-f(c)\big| \leqslant \big|f(x)-f_N(x)\big| + \big|f_N(x)-f_N(c)\big| + \big|f_N(c)-f(c)\big| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dit bewijst de continuïteit van f. ■

Opgaven

1. Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en neem aan $f_n : D \to \mathbb{R}$ en $g_n : D \to \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Toon aan: als $f_n \overset{p}{\to} f$ en $g_n \overset{p}{\to} g$ dan

(a) $f_n + g_n \overset{p}{\to} f + g$;

(b) $\alpha f_n \overset{p}{\to} \alpha f$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $f_n g_n \overset{p}{\to} fg$.

2. Laat zien dat de functierij uit Voorbeeld IX.1.3 niet uniform naar f convergeert.

3. Bewijs Opmerking IX.1.7 (ii).

✍ **4.** Bewijs de uitspraak in Opmerking IX.1.7 (iii).

✍ **5.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = x^n.$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \overset{p}{\to} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \overset{u}{\to} f$.

✍ **6.** Toon met behulp van de definitie aan dat de functierij uit Voorbeeld IX.1.5 niet uniform naar de nulfunctie convergeert.

✍ **7.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ met $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_n(x) = x/n$. Toon aan dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

✍ **8.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 1}$ met $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \cos(x/n).$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$.

✍ **9.** Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

(a) Bewijs of weerleg: er is een $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{p} f$.

(b) Bewijs of weerleg: er is een $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$.

10. Laat $a \leq x_0 \leq b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Bewijs het volgende: Als $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergent is, dan geldt

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

11. Contrueer continue functies $f_0, f_1, \ldots, \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ zó dat $f_n \xrightarrow{p} 0$ en

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

✯**12.** Laat $a \leq x_0 \leq b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Neem aan dat $A_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ bestaat en dat $f_n \xrightarrow{u} f$ met $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Toon aan dat $(A_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij is en dat[1]

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

✯**13.** Laat $D \subseteq \mathbb{R}$ en, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ en $g_n \colon D \to \mathbb{R}$. Toon aan: als $f_n \xrightarrow{u} f$ en $g_n \xrightarrow{u} g$ dan

(a) $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$;

(b) $\alpha f_n \xrightarrow{u} \alpha f$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) als alle f_n en g_n begrensd zijn dan geldt ook $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$;

✍ (d) de voorwaarde in (c) betreffende begrensdheid kan niet gemist worden.

✯**14.** Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergent is dan en slechts dan als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } m, n \geq N \text{ en voor alle } x \in D \text{ geldt } \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

[1] Dit is een sterkere uitspraak dan in Opgave IX.1.10. Er is namelijk geen continuïteit van de f_n's geeist.

IX.2 Uniforme convergentie en integratie

Uniforme convergentie wordt onder andere gebruikt voor "het verwisselen van limiet en integraal". Puntsgewijze convergentie is in het algemeen niet voldoende om limiet en integraal te verwisselen zoals blijkt uit het voorbeeld in de introductie van dit hoofdstuk. Een ander voorbeeld is te vinden in Opgave IX.2.1.

We bewijzen eerst een stelling over het verwisselen van limiet en integraal.

IX.2.1 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn.[2] Als $f_n \overset{u}{\to} f$ dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f_n(x)\,dx \Big).$$

Bewijs. Merk eerst op dat uit de eigenschappen van de integraal volgt dat

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| = \Big| \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx.$$

We bewijzen nu de convergentie. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \ge N$ en voor alle $x \in [a, b]$ geldt dat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Uit de bovenstaande afschatting en eigenschappen van de integraal volgt dat voor alle $n \ge N$ geldt dat

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \varepsilon/(b - a)\,dx = \varepsilon.$$

Uit bovenstaande kunnen we concluderen dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Als gevolg hiervan geldt het volgende resultaat voor reeksen.

termsgewijs integreren

IX.2.2 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Definieer voor elke $n \ge 0$ de functie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door $f_n = \sum_{j=0}^{n} g_j(x)$. Als $f_n \overset{u}{\to} f$, dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b g_j(x)\,dx.$$

Bewijs. Dit volgt uit Stelling IX.2.1 en

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b g_j(x)\,dx.$$

■

IX.2.3 Voorbeeld. Zij $0 < r < 1$. Beschouw $g_j : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gegeven door $g_j(x) = x^j$. Dan geldt $|g_j(x)| \le r^j$. Aangezien $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ convergent is, volgt uit

[2] Dat f integreerbaar is volgt ook uit de aanname dat $(f_n)_{n\ge 0}$ uniform naar f convergeert, en zouden we dus kunnen weglaten uit de aannames (zie Opgave IX.2.7).

Opgave IX.2.3 dat de functierij $\left(\sum_{j=0}^n g_j\right)_{n\geq 0}$ uniform convergent. De puntsgewijze limiet is de functie $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Zij $t \in [-r, r]$. Uit Gevolg IX.2.2 zien we dat

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t x^j\,dx.$$

Stelling VIII.3.4 geeft dus dat

$$-\ln(1-t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{j+1}.$$

Aangezien $r \in (0, 1)$ en $t \in [-r, r]$ willekeurig zijn, volgt dat de laatste identiteit geldt voor alle $t \in (-1, 1)$. ■

Limiet en differentiatie

Als tweede toepassing van Stelling IX.2.1 kunnen we het volgende resultaat bewijzen.

IX.2.4 Stelling. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $c \in [a, b]$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie op $[a, b]$ zijn[3] zó dat f_n' continu is op $[a, b]$. Laat ook $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie op $[a, b]$ zijn. Als $(f_n')_{n\geq 0}$ uniform convergent is en $f_n \xrightarrow{p} f$, dan geldt dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Bewijs. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zó dat $f_n' \xrightarrow{u} g$. Merk op dat g continu is wegens Stelling IX.1.10. Zij $x \in [a, b]$. Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit Stelling VIII.3.4 volgt dat

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Nu geeft Stelling IX.2.4 dat

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

De Hoofdstelling van de Integraalrekening impliceert dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en $f'(x) = g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$. ■

termsgewijs differentiëren

IX.2.5 Gevolg. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn op $[a, b]$ zijn. Definieer voor elke $n \geq 0$ de functie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \sum_{j=0}^n g_n(x)$. Laat ook $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie op $[a, b]$ zijn. Als $(f_n')_{n\geq 0}$ uniform convergent is en $f_n \xrightarrow{p} f$, dan geldt dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en voor elke $x \in [a, b]$ geldt

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j'(x).$$

Bewijs. Dit volgt uit Stelling IX.2.4 en $f_n' = \sum_{j=0}^n g_j'$. ■

IX.2.6 Opmerking. Zij $a < b$. Laat voor elke $n \geq 0$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn. Als $f_n \xrightarrow{u} f$, dan kun je hieruit niet concluderen dat $f_n' \xrightarrow{p} f'$. Een eenvoudig tegenvoorbeeld wordt gegeven in Opgave IX.2.4.

[3] Hierbij nemen we de linker- en rechter afgeleide in de randpunten

Opgaven

1. Beschouw de functierij $(f_n)_{n\geqslant 0}$ met $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = 2nx^n(1-x^n).$$

Laat zien dat $f_n \xrightarrow{p} 0$ en $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

2. Bewijs dat onder de aannames van Stelling IX.2.4 geldt dat $f_n \xrightarrow{u} f$.

Weierstrass M-test **3.** Zij $D \subseteq \mathbb{R}$. Laat voor elke $j \geq 0$, $g_j : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en neem aan dat er een constante $M_j \geq 0$ is zó dat voor alle $x \in D$ geldt dat $|g_j(x)| \leq M_n$. Bewijs de volgende uitspraak: als $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ convergent is, dan is de functierij $\left(\sum_{j=0}^{n} g_j\right)_{n\geq 0}$ uniform convergent.

4. Definieer voor elke $n \geq 1$, $f_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$.

(a) Laat zien dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

(b) Laat zien dat de functierij $(f_n')_{n\geq 1}$ niet puntsgewijs convergent is.

Hint: maak gebruik van de bekende eigenschappen van sin en cos.

5. Bewijs met behulp van Gevolg IX.2.5 dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\Big)' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

6. Bewijs met behulp van Gevolg IX.2.5 dat voor alle $x \in (-1,1)$ geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

☆✍ **7.** Laat voor elke $n \geq 0$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie zijn. Neem aan dat er een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is zó dat $f_n \xrightarrow{u} f$. Toon aan dat f integreerbaar is.

X APPENDIX

X.1 De Axioma's van Zermelo en Fraenkel

In de verzamelingenleer gebruiken we letters (variabelen), logische symbolen ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, en $\Leftrightarrow$), het $=$-teken (gelijkheid) en natuurlijk $\in$ (is element van).

De betekenis van de logische symbolen is als volgt: $\forall$ is 'voor alle', $\exists$ is 'er is een', $\wedge$ is 'en', $\vee$ is 'of', $\neg$ is 'niet', $\Rightarrow$ is 'impliceert', $\Leftarrow$ is 'is gevolg van', $\Leftrightarrow$ is 'dan en slechts dan', of ook wel 'precies dan als' of ook wel 'is equivalent met'. Als men wil, dan kan men zuiniger zijn met het aantal logische symbolen (bijvoorbeeld kunnen ze allemaal in $\wedge$ en $\neg$ uitgedrukt worden).

Verder is elk individu dat we tegenkomen een verzameling (de variabelen staan voor verzamelingen). In het bijzonder zijn de elementen van al onze verzamelingen zelf dus ook weer verzamelingen.

Het eerste axioma formaliseert hoe gelijkheid van verzamelingen gedefinieerd is.

Axioma van Extensionaliteit Verzamelingen zijn gelijk dan en slechts dan als ze dezelfde elementen hebben:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall X)(X \in A \Leftrightarrow X \in B).$$

De volgende drie axioma's geven regels hoe we uit oude verzamelingen nieuwe kunnen vormen.

Axioma van Paarvorming Voor elk tweetal verzamelingen A en B is er een verzameling die uit alleen de elementen A en B bestaat:

$$(\forall A)(\forall B)(\exists C)(\forall X)\big(X \in C \Leftrightarrow (X = A \vee X = B)\big).$$

Deze verzameling C wordt ook wel als $\{A, B\}$ genoteerd.

Axioma van Vereniging Voor elke verzameling A bestaat een verzameling die uit alle elementen van elementen van A bestaat:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall X)\big(X \in B \Leftrightarrow ((\exists Y)(Y \in A \wedge X \in Y))\big)$$

Voor deze B gebruiken we de notatie $\cup_{Y \in A} Y$.

Axioma van Machtsverzameling Voor elke verzameling A bestaat een verzameling die uit alle deelverzamelingen van A bestaat:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall X)\big(X \in B \Leftrightarrow (\forall Y)((Y \in X) \Rightarrow (Y \in A))\big).$$

Afscheidingsaxioma Als φ een formule is en A een verzameling dan bestaat een verzameling die bestaat uit alle elementen van A die aan φ voldoen:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall X)((X \in B) \Leftrightarrow ((X \in A) \wedge \varphi(X))).$$

Substitutieaxioma Als F een formule is die een 'afbeelding' definieert, dat wil zeggen uit $F(X,Y)$ en $F(X,Z)$ volgt $Y = Z$, dan bestaat voor elke verzameling A de beeldverzameling $F[A]$:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall Y)(Y \in B \Leftrightarrow (\exists X)(X \in A \wedge F(X,Y))).$$

We geven een voorbeeld. We nemen voor $F(X,Y)$ de formule 'Y is de machtsverzameling van X'. Dan volgt dat voor iedere A er een B bestaat waarvan de elementen precies de machtsverzamelingen van de elementen van A zijn.

De axioma's hierboven zijn nog niet sterk genoeg om ons oneindige verzamelingen te geven; die moeten we expliciet postuleren. We gebruiken het symbool $\varnothing$ voor de lege verzameling.

Axioma van Oneindigheid Er is een oneindige verzameling:

$$(\exists A)((\varnothing \in A) \wedge ((\forall X)((X \in A) \Rightarrow (X \cup \{X\} \in A)))).$$

Het volgende axioma zegt dat niet alles een verzameling kan zijn; het verhindert het bestaat van oneindige rijtjes van de vorm $X_0 \ni X_1 \ni X_2 \ni \cdots$.

Regulariteitsaxioma Elke niet-lege verzameling heeft een $\in$-minimaal element.

$$(\forall A)\big((A \neq \varnothing) \Rightarrow ((\exists B)(B \in A \wedge (\forall C)((C \in B) \Rightarrow (C \notin A))))\big).$$

De bovenstaande axioma's vormen het axioma-systeem van Zermelo (Duits wiskundige, 1871–1953) en Fraenkel (Duits en Israëlisch wiskundige, 1891–1965), ook wel afgekort tot ZF. In de verzamelingenleer wordt heel vaak nog het volgende axioma gebruikt, afgekort tot AC (Axiom of Choice).

Keuzeaxioma Elke verzameling S van niet-lege verzamelingen heeft een keuzefunctie, dat wil zeggen, er is een functie $g\colon S \to \cup_{X \in S} X$ zó dat voor alle $X \in S$ geldt $g(X) \in X$.

ZF samen met AC wordt afgekort tot ZFC. In dit dictaat werken we met ZFC.

X.2 Axioma's van Peano

De axioma's van Peano (Italiaans wiskundige, 1858-1932) vormen een korte karakterisering van de natuurlijke getallen met de operaties optelling en vermenigvuldiging. In plaats van direct naar de operaties '+' en '·' te kijken, beschouwt men de afbeelding $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $a \mapsto a+1$. Deze afbeelding S heet de *opvolger*-afbeelding (de S staat voor de Engelse term 'successor'). De *gegevens* zijn dan:

(a) een verzameling $\mathbb{N}$;
(b) een element $0 \in \mathbb{N}$;
(c) een afbeelding $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Deze gegevens moeten voldoen aan de volgende *eigenschappen* (ofwel 'axioma's').

(P0) er is geen $a \in \mathbb{N}$ met $S(a) = 0$;
(P1) de afbeelding S is injectief;
(P2) (axioma van inductie) als $A \subset \mathbb{N}$ de eigenschappen heeft dat $0 \in A$ en dat $a \in A \Rightarrow S(a) \in A$, dan $A = \mathbb{N}$.

Men kan bewijzen dat als ook $(\mathbb{N}', 0', S')$ aan deze eigenschappen voldoet, er een unieke bijectie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ is zodat $f(0) = 0'$, en zodat voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt $f(S(a)) = S'(f(a))$. In deze zin is $(\mathbb{N}, 0, S)$ eenduidig door Peano's axioma's bepaald.

Voorts kan men dan, gebruikmakend van volledige inductie, bewijzen dat er unieke afbeeldingen $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bestaan zodat voor alle $a, b \in \mathbb{N}$ geldt:

(P3) $0 + a = a$;
(P4) $S(a) + b = S(a + b)$;
(P5) $0 \cdot a = 0$;
(P6) $S(a) \cdot b = a \cdot b + b$.

Men definieert dan $1 = S(0)$, en dan kan men bewijzen dat het gegeven $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$ aan alle eigenschappen **(N0)** tot en met **(N11)** van sectie II.1 voldoet.

De standaardmanier om, uitgaand van ZFC, een tripel $(\mathbb{N}, 0, S)$ te maken dat voldoet aan Peano's axioma's **P0**, **P1** en **P2**, is als volgt. Laat A een verzameling zijn als in het Axioma van Oneindigheid. Laat dan $\mathbb{N}$ de doorsnede zijn van alle deelverzamelingen B van A met de eigenschap dat $\varnothing \in B$ en dat $(X \in B) \Rightarrow (X \cup \{X\} \in B)$. Voor het bestaan van die doorsnede, gebruik het Axioma van Machtsverzameling (om de machtsverzameling $\mathcal{P}(A)$ te krijgen), het Afscheidingsaxioma (om de verzameling C van de $B \in \mathcal{P}(A)$ met de gewenste eigenschap te krijgen), en nogmaals het Afscheidingsaxioma (om de deelverzameling $\mathbb{N}$ van A te krijgen, bestaand uit die a die in alle $B \in C$ zitten). Voor $0 \in \mathbb{N}$ neemt men dan $\varnothing$, en voor $X \in \mathbb{N}$ definiëert men $S(X) = X \cup \{X\}$. In deze realisatie geldt bijvoorbeeld dat:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
- $4 = S(3) = 3 \cup \{3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$.

Het zal de lezer duidelijk zijn dat dit systeem als notatie voor getallen bijzonder inefficiënt is.

X.3 De recursiestelling

Soms is het nodig functies met domein $\mathbb{N}$ *recursief* te definiëren. De volgende stelling legt uit wat we hier precies mee bedoelen.

X.3.1 Stelling. Laat X een verzameling, $x \in X$, en $F\colon X \to X$ een afbeelding. Dan is er een unieke $f\colon \mathbb{N} \to X$ zó dat:

$$f(0) = x \text{ en voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } f(n+1) = F(f(n)).$$

Bewijs. Het idee van het bewijs is simpelweg dat we de grafiek van f moeten maken. Laat Y de verzameling zijn van alle deelverzamelingen $\Gamma \subseteq \mathbb{N} \times X$ met de eigenschappen:

1. $(0, x) \in \Gamma$;
2. als $(n, y) \in \Gamma$, dan $(n+1, F(y)) \in \Gamma$.

Omdat $\mathbb{N} \times X$ aan deze twee eigenschappen voldoet, is Y niet leeg. Laat nu f de doorsnede zijn van alle elementen van Y. We gaan bewijzen dat f de gevraagde functie is.

We bewijzen met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ er een $y \in X$ is met $(n, y) \in f$. Dit is duidelijk voor $n = 0$: voor iedere $\Gamma \in Y$ geldt dat $(0, x) \in \Gamma$, dus $(0, x) \in f$. Laat nu $n \in \mathbb{N}$, en neem aan dat $(n, y) \in f$. Dan geldt voor alle $\Gamma \in Y$ dat $(n, y) \in \Gamma$, en dus ook dat $(n+1, F(y)) \in \Gamma$, en dus dat $(n+1, F(y)) \in f$.

Nu bewijzen we met inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat er ten hoogste één $y \in X$ is met $(n, y) \in f$.
Stap 1. Stel dat $(0, y) \in f$ met $y \neq x$. Dan is $f \setminus \{(0, y)\}$ ook een element van Y. Maar dan geldt $(0, y) \notin f$, want f is de doorsnede van alle $\Gamma \in Y$, en dus bevat in $f \setminus \{(0, y)\}$. Deze tegenspraak bewijst dat er geen $y \in X$ is met $y \neq x$ en $(0, y) \in f$.
Stap 2. Laat $n \in \mathbb{N}$, en neem aan dat er precies één $y \in X$ is met $(n, y) \in f$. Stel nu dat er een $y' \in X$ is met $y' \neq F(y)$ en $(n+1, y') \in f$. Dan is $f \setminus \{(n+1, y')\}$ ook een element van Y. Maar dan geldt $(n+1, y') \notin f$, want f is de doorsnede van alle $\Gamma \in Y$, en dus bevat in $f \setminus \{(n+1, y')\}$. Deze tegenspraak bewijst dat er geen $y' \in X$ is met $y' \neq F(y)$ en $(n+1, y') \in f$.

We hebben nu bewezen dat f een functie van $\mathbb{N}$ naar X is. We hebben al bewezen dat $f(0) = x$. We moeten nog bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $f(n+1) = F(f(n))$. Laat $n \in \mathbb{N}$. Dan is $(n, f(n)) \in f$, dus geldt voor alle $\Gamma \in Y$ dat $(n, f(n)) \in \Gamma$. Maar dan geldt voor alle $\Gamma \in Y$ dat $(n+1, F(f(n))) \in \Gamma$. Dus $(n+1, F(f(n))) \in f$, hetgeen betekent dat $f(n+1) = F(f(n))$.

Nu moeten we nog bewijzen dat f de enige functie is met de gevraagde eigenschappen. Laat $g\colon \mathbb{N} \to X$ een functie zijn met die eigenschappen. Dan is (de grafiek van) g een element van Y, en dus geldt dat $f \subseteq g$. Maar dan geldt $f = g$ omdat f en g functies zijn. ∎

X.3.2 Gevolg. Laat X een verzameling zijn. Laat $g\colon \mathbb{N} \times X \to X$, en $x \in X$. Dan is er een unieke $f\colon \mathbb{N} \to X$ met:

$$f(0) = x \text{ en voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } f(n+1) = g(n, f(n)).$$

Bewijs. Laat $F\colon \mathbb{N} \times X \to \mathbb{N} \times X$ gegeven zijn door $F(a, y) = (a+1, g(a, y))$. Vanwege de vorige stelling is er een unieke $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times X$ met $h(0) = (0, x)$, en met, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $h(n+1) = F(h(n))$. Laat $h_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $h_2\colon \mathbb{N} \to X$ gedefinieerd zijn als volgt: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$h(n) = (h_1(n), h_2(n)).$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}(h_1(0), h_2(0)) &= (0, x),\\ (\forall n \in \mathbb{N}) : (h_1(n+1), h_2(n+1)) &= h(n+1) = F(h(n)) = F(h_1(n), h_2(n)) =\\ &= (h_1(n)+1, g(h_1(n), f(h_1(n)))).\end{aligned}$$

Met inductie volgt nu dat voor alle $n \in \mathbb{N}$: $h_1(n) = n$. En dus geldt dat $h_2(0) = x$, en voor alle $n \in \mathbb{N}$: $h_2(n+1) = g(n, h_2(n))$. Uit inductie volgt ook dat h_2 de enige functie is met deze eigenschappen. ■

faculteit

Als eerste toepassing definiëren we de functie 'faculteit' van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$.

X.3.3 Definitie. Laat $n \mapsto n!$ de unieke functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ zijn, met de eigenschappen: $0! = 1$, en voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. (We passen hier Gevolg X.3.2 toe, met $X = \mathbb{N}$, $x = 1$ en $g \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto (a+1)b$.)

X.3.4 Definitie. Voor $n, k \in \mathbb{N}$ met $k \leq n$ definiëren we een rationaal getal door:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

De getallen $\binom{n}{k}$ heten *binomiaalcoëfficiënten*.

binomiaalcoëfficiënt

Per definitie is $\binom{n}{k}$ in $\mathbb{Q}$, maar uit Opgave II.1.16 volgt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

ANTWOORDEN EN UITWERKINGEN

Paragraaf I.1.

3. (d) Een verzameling van n elementen heeft precies 2^n deelverzamelingen.
4. (a) niet waar;
(b) niet waar;
(c) niet waar;
(d) niet waar;
(e) waar;
(f) waar.
7. $A = \varnothing$ of $B = \varnothing$ of $A = B$

Paragraaf I.2.

1. (a) We laten eerst zien dat voor iedere $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$ geldt dat ook $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. Stel dus $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Er zijn twee mogelijkheden: ofwel $x \notin A$ of $x \in A$. In het eerste geval geldt $x \in \Omega \setminus A$ en dus ook $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. In het tweede geval moet gelden $x \notin B$ (gezien onze aanname dat $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$). Dus $x \in \Omega \setminus B$ en dan ook weer $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.

Nu laten omgekeerd zien dat als $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$ dan ook $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Laat $x \in (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$. We weten dat $x \in \Omega \setminus A$ of $x \in \Omega \setminus B$. In het eerste geval geldt dat $x \notin A$ en dus ook $x \notin A \cap B$, dus $x \in \Omega \setminus (A \cap B)$. Het geval $x \in \Omega \setminus B$ gaat net zo.
7. (a) $[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
(b) $(0, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\}$

Paragraaf I.3.

1. 1, $(x - 1)/(x + 1)$, $(1 + x)/(1 - x)$.
2. (a) $f(x) = x^2 - 7x + 7$;
(b) $1/x + \sqrt{1 + x^2}/|x|$.
3. $\{\pm\sqrt{k\pi} : k \in \mathbb{N}\}$; $\{\pm\sqrt{3\pi/2 + 2k\pi} : k \in \mathbb{N}\}$; $\varnothing$.
9. (a) waar;
(b) niet waar;
(c) niet waar;
(d) waar.
10. niet waar; niet waar
12. (b) $B = (-5, -4]$, $g^{-1}(x) = 1/(x + 5)$
13. (a) $B = \mathbb{R}$, $g(x) = (3 + x)/7$;
(b) $B = [0, \infty)$, $g(x) = -\sqrt{x}$;
(c) $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) = (1 - 2x)/(1 + x)$;
(d) $B = [0, 1]$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.
14. Zij $f\colon A \to B$ een bijectie en neem aan dat er twee functies $g\colon B \to A$ en $h\colon B \to A$ bestaan met de eigenschap

$$g(b) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = b.$$

en

$$h(b) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = b.$$

voor elke $a \in A$ en $b \in B$. We moeten bewijzen dat $g = h$. Zij $b \in B$ willekeurig. Dan geldt $f\big(g(b)\big) = b$ en ook $f\big(h(b)\big) = b$, en dus $g(b) = h(b)$ omdat f injectief is.

Paragraaf I.4.

Paragraaf II.1.

1. Zij $a \in \mathbb{N}$ met $a \neq 0$. We laten eerst zien dat ten minste één $b \in \mathbb{N}$ bestaat met $a = b + 1$. Beschouw

$$A = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \text{er is een } m \in \mathbb{N} \text{ met } n = m + 1\}.$$

Blijkbaar $0 \in A$. Als $n \in A$, dan zeker $n \in \mathbb{N}$, en dus $n + 1 \in A$. Volgens **(N6)** geldt nu $A = \mathbb{N}$. Aangezien $a \neq 0$, en ook $a \in A$, is er een $b \in \mathbb{N}$ met $a = b + 1$.
Nu moeten we bewijzen dat ten hoogste één zo'n $b \in \mathbb{N}$ bestaat. Neem aan dat $a \neq 0$, en $a = b + 1$ en $a = b' + 1$. Volgens **(N0)** geldt $b + 1 = 1 + b$ en $b' + 1 = 1 + b'$.
Bijgevolg $1 + b = 1 + b'$ en volgens **(N3)** geldt $b = b'$.

4. $(n + 1)^2$

9. Stap 1: Het getal $11^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ is deelbaar door 7.
Stap 2: Stel dat $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7 voor een natuurlijk getal n. Dan geldt:

$$\begin{aligned} 11^{n+1} - 4^{n+1} &= 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n). \end{aligned}$$

Uit de inductieveronderstelling volgt dat $11^n - 4^n$ deelbaar is door 7, dus het getal $7 \cdot 11^n + 4 \cdot (11^n - 4^n)$ is ook deelbaar door 7.

14. nee

15. In Stap 2 moeten we bewijzen dat *voor elke* $n \geqslant 1$ geldt: 'als P_n waar is dan is ook P_{n+1} waar.' Maar de implicatie $P_1 \Rightarrow P_2$ is niet juist.

Paragraaf II.2.

8. niet waar

10. Neem aan dat $a = q' \cdot b + r'$ en $a = q \cdot b + r$, waarbij $q, q' \in \mathbb{Z}$ en $r, r' \in \mathbb{N}$ met $r < |b|$ en $r' < |b|$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we ook veronderstellen dat $r - r' \geqslant 0$. Dan geldt

$$0 = a - a = (q' - q) \cdot b + (r' - r).$$

Omdat $r < |b|$ en $r' < |b|$ is $r - r'$ een natuurlijk getal kleiner dan $|b|$. Aan de andere kant is $r - r' = (q' - q) \cdot b$ ook een veelvoud van b. Hieruit volgt dat $r - r' = 0$ en bijgevolg $q' - q = 0$, oftewel $r = r'$ en $q = q'$.

11. als $r = 0$ dan is het quotiënt $-q$ en de rest 0; als $r > 0$ dan is het quotiënt $-q - 1$ en de rest $b - r$.

Paragraaf II.3.

Paragraaf II.4.

Paragraaf III.1.

6. Aanwijzing: gebruik de ordening, en additieve inversen.

Paragraaf III.2.

7. *Aanwijzing:* Gebruik de Archimedische eigenschap.

8. (a) $(-1, 0)$;
(b) $(-\infty, -2) \cup \{-1\} \cup (0, \infty)$;
(c) $(-\infty, -1/4] \cup (0, \infty)$;
(d) $(-\infty, 0)$;
(e) $(-2, 0] \cup (2, \infty)$.

13. Schrijf $x = y + (x - y)$ en pas de driehoeksongelijkheid toe.

Paragraaf III.3.

2. (a) $\sup V = \max V = \inf V = \min V = 0$;
(b) $\sup V = \max V = 1$, $\inf V = \min V = -1$;
(c) $\sup V = \max V = 1$, $\inf V = \min V = -1$;
(d) $\inf V = 0$, geen minimum, $\sup V = \max V = 1/2$;
(e) $\inf V = \min V = -1$, $\sup V = \sqrt{2}$, geen maximum.

6. (a) De ongelijkheden volgen rechtsreeks uit het feit dat $\sup V$ een bovengrens en $\inf V$ een ondergrens van V is.
(b) ($\Rightarrow$) Neem aan dat $\inf V = \sup V = x$. Zij $v \in V$ willekeurig, dan $x \leqslant v$ (want $\inf V$ is een ondergrens van V) en $x \geqslant v$ (want $\sup V$ is een bovengrens van V). Hieruit volgt dat $x = v$ voor elke $v \in V$ en dus $V = \{x\}$.
($\Leftarrow$) Deze implicatie is duidelijk.

11. (a) waar
(b) niet waar

12. (a) waar
(b) niet waar

14. (a) ja, ja, neen, ja, ja, neen, ja;
(b) Zij $x \in U \cap V$. Dan is er een $\epsilon_1 > 0$ zodat $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subset U$ en een $\epsilon_2 > 0$ zodat $(x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subset V$. Neem nu $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dan geldt $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U \cap V$.

15. $\sup V$

Paragraaf IV.1.

2. We tonen aan dat de rij uit Opgave IV.1.1 (b) naar 1 convergeert. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. We moeten een $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Er geldt

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Volgens Archimedische Eigenschap is er een $N \in \mathbb{N}$ met $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. We laten zien dat deze N als gewenst is. Kies $n \in \mathbb{N}$ met $n \geqslant N$ willekeurig. Dan geldt $1/(n+1) \leq 1/(N+1) < \varepsilon$. Dus

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

9. *Aanwijzing:* Bewijs met volledige inductie dat $a_n = n$ als n even is, en $a_n = n - 2$ als n oneven is.

10. (a) *Aanwijzing*: Redeneer uit het ongerijmde.

11. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt dat $|x_{2n} - x| < \varepsilon$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt dat $|x_{2n+1} - x| < \varepsilon$. Kies $N = 1 + 2\max\{N_1, N_2\}$. Kies $k \geq N$ wilekeurig. Er zijn twee mogelijkehden (1) k is even of (2) k is oneven. (1): Laat $k = 2n$ met $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt $n \geq N/2 \geq N_1$ en dus

$$|x_k - x| = |x_{2n} - x| < \varepsilon.$$

(2): Laat $k = 2n + 1$ met $n \geq 1$, dan geldt $n \geq N/2 \geq N_2$ en dus

$$|x_k - x| = |x_{2n+1} - x| < \varepsilon.$$

Dit bewijst dat $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Paragraaf IV.2.

2. De rij $(y_n)_{n\geqslant 0}$ is begrensd. Kies $M \geq 0$ zodat $|y_n| \leqslant M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij nu $\varepsilon > 0$. Omdat $(x_n)_{n\geqslant 0}$ naar 0 convergeert kunnen we een $N \in \mathbb{N}$ nemen zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|x_n| < \varepsilon/(M+1)$. Dan geldt, voor alle $n \geq N$, dat
$|x_n y_n| < (\varepsilon/(M+1)) \cdot M \leq \varepsilon$.

4. (b) niet waar

5. (a) Beschouw de rijen $a_n = x_n - x$ en $b_n = y_n - y$ met $n \geq 0$.
(b) Schrijf

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)(y_n - y) + yx_n - xy_n$$

en gebruik (a) en Stelling IV.2.1 (i) en (ii).

6. (a) We bewijzen eerst dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geqslant N$

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Nu bewijzen we dat $\lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Zij $\xi \in \mathbb{R}$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \xi - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geqslant N$

$$n+1 \geqslant N+1 > \xi.$$

Neem $(a_n)_{n\geqslant 0} = \big(1/(n+1)^2\big)_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0} = (n+1)_{n\geqslant 0}$. Volgens de rekenregels voor limieten geldt

$$\lim_{n\to\infty} 1/(n+1)^2 = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) \cdot \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0 \cdot 0 = 0$$

en $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$.
(b) Neem $(a_n)_{n\geqslant 0} = (-3/(n+1))_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0} = (n+1)_{n\geqslant 0}$. Dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -3$ want $(a_n b_n)_{\geqslant 0}$ is een constante rij is met termen gelijk aan -3.
(c) Neem $(a_n)_{n\geqslant 0} = (1/(n+1))_{n\geqslant 0}$ en$(b_n)_{n\geqslant 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geqslant 0}$. Analoog als in (a) kunnen we bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^2 = \infty$. Dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$.
(d) Neem $(a_n)_{n\geqslant 0} = (-1/(n+1))_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geqslant 0}$. Analoog als in (a) kunnen we bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^2 = \infty$. Dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} -n-1 = -\infty$. Ook het bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} -n-1 = -\infty$ is analoog als in (a) en $\lim\limits_{n\to\infty} -1/(n+1) = -\lim\limits_{n\to\infty} 1/(n+1) = -1 \cdot 0 = 0$ volgens de rekenregels voor limieten.
(e) Neem $(a_n)_{n\geqslant 0} = ((-1)^n/(n+1))_{n\geqslant 0}$ en $(b_n)_{n\geqslant 0} = \big((n+1)^2\big)_{n\geqslant 0}$. We bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; zo'n N bestaat volgens de Archimedische Eigenschap. Dan geldt voor elke $n \geqslant N$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

We laten nu zien dat $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (n+1) \neq -\infty$. Neem $\xi = -5$, zij $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is $n = 2N \geqslant N$ en

$$(-1)^n (n+1) = (-1)^{2N} (n+1) = n+1 > -5.$$

Analoog kunnen we bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n (n+1) \neq \infty$.

9. niet waar

10. : Aanwijzing: gebruik de worteltruc:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\Big(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\Big)) = \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Paragraaf IV.3.

1. Neem een dalende naar beneden begrensde rij $(b_n)_{n\geq 0}$. Noem $b = \inf_{n\geq 0} b_n$. Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ door $a_n = -b_n$. Dan geldt (a_n) is stijgend en naar boven begrensd. Er geldt

$$\sup_{n\geq 0} a_n = \sup_{n\geq 0}(-b_n) = -\inf b_n = -b.$$

Met de Monotone Convergentiestelling IV.3.3 volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -b$. Uit de rekenregels voor limieten volgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n = -(-b) = b.$$

5. (c) 1

Paragraaf IV.4.

1. Zij $(x_n)_{n\geqslant 0}$ een convergente reële rij, met limiet x. Laat $\varepsilon > 0$. Er is een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|x_n - x| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geqslant N$. Voor alle $m, n \geqslant N$ geldt dan

$$|x_n - x_m| = \big|(x_n - x) + (x - x_m)\big| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

4. Met volledige inductie bewijzen we eerst dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $n_k \geqslant k$.
Stap 1: Omdat elke n_k een natuurlijk getal is geldt $n_0 \geqslant 0$.
Stap 2. (I.V.) Neem aan dat $n_k \geqslant k$ voor een bepaalde $k \in \mathbb{N}$. Omdat de rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt stijgend is geldt

$$n_{k+1} > n_k \overset{(I.V.)}{\geqslant} k.$$

Hieruit volgt dat $n_{k+1} > k$. Omdat n_{k+1} en k natuurlijke getallen zijn volgt nu dat $n_{k+1} \geqslant k + 1$. Neem nu aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en zij $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ zijn deelrij. We bewijzen dat $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. We zoeken een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k \geqslant N$ geldt: $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Merk eerst op dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ en dus $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Dus is er een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $k \geqslant N$ geldt $|x_k - x| < \varepsilon$. Maar $n_k \geqslant k \geqslant N$ en dus moet ook gelden dat $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

5. Hint: Kijk goed naar het bewijs van Stelling IV.4.8.

7. *Aanwijzing:* Voor één richting kunnen we Opgave IV.4.4 gebruiken. Voor de andere richting kunnen we raden wat de limiet moet zijn. Toon aan, redenerend uit het ongerijmde, dat dit inderdaad zo is.

9. Er zijn twee mogelijke uitwerkingen: (i) Omdat Cauchy-rijen in $\mathbb{R}$ convergent zijn geldt dat $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan met $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ en $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Volgens de rekenregels voor convergente rijen geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. De rij $(x_n + y_n)_{n\geqslant 0}$ is convergent en dus een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$. (ii) We gebruiken de characterizering van opgaave IV.3.1. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n, m \geq N_1$ geldt $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n, m \geq N_2$ geldt $|y_n - y_m| < \varepsilon/2$. Definieer $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid dat voor alle $n, m \geq N$ geldt:

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

11. De verzameling van alle rationale getallen is aftelbaar en dus kunnen we een aftelling $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemen. Beschouw de rij $(q_n)_{n\geqslant 0}$. Zij $x \in [0, 1]$ willekeurig. Voor elke $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ kies een $n_k \in \mathbb{N}$ met telkens $n_k > n_{k-1}$ en zodanig dat

$$|x - q_k| < \frac{1}{k}.$$

Dan is $(q_{n_k})_{k\geqslant 0}$ een deelrij van $(q_n)_{n\geqslant 0}$ met

$$\lim_{n\to\infty} q_{n_k} = x.$$

Paragraaf IV.5.

1. Er geldt

$$\exp(x)\cdot\exp(-x) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^n.$$

Als $n > |x|$ dan is $\delta = -x^2/n^2 > -1$ en we kunnen de Ongelijkheid van Bernoulli (zie Opgave III.2.6) toepassen; we krijgen:

$$1 \geqslant \Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^n \geqslant 1 + n\cdot\Big(\frac{-x^2}{n^2}\Big) = 1 - \frac{x^2}{n}.$$

De Insluitstelling geef nu, omdat $\lim_{n\to\infty}(1-x^2/n^2) = 1$, het gewenste resultaat.

2. *Aanwijzing:* Bewijs eerst dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $|x_n| < 1$ voor elke $n > N$. Pas nu de ongelijkheid van Bernoulli toe (zie Opgave III.2.6).

3. (b) Laat x en y vaste reële getallen zijn. We moeten aantonen

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x+y}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\cdot\Big(1+\frac{y}{n}\Big)^n.$$

We delen $(1+x/n)(1+y/n)$ door $(1+(x+y)/n)$:

$$\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}} = \frac{(n+x)(n+y)}{n(n+x+y)} = 1 + \frac{xy}{n(n+x+y)}.$$

Uit deze twee identiteiten en Opgave IV.5.2 volgt nu dat

$$\frac{e^x\cdot e^y}{e^{x+y}} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{xy}{n(n+x+y)}\Big)^n = 1.$$

Paragraaf V.1.

1. (c) We bewijzen dat f continu is in elke $c > 0$; als $c < 0$ is het bewijs analoog en het geval $c = 0$ wordt in onderdeel (a) aangetoond.
Zij $\varepsilon > 0$, we zoeken een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x-c| < \delta$ geldt $|x^2 - c^2| < \varepsilon$. Merk eerst op: als $0 < x < 2c$ dan

$$|x^2-c^2| = |x+c|\cdot|x-c| = (x+c)\cdot|x-c| < 3c\cdot|x-c|,$$

en

$$3c\cdot|x-c| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-c| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Kies $\delta = \min\{c, \varepsilon/3c\}$, we moeten nu laten zien dat de zo gekozen δ werkt.
Zij $x \in \mathbb{R}$ met $|x-c| < \delta$. Omdat $\delta \leqslant c$ geldt er $0 < x < 2c$, en dus

$$|x^2-c^2| < 3c\cdot|x-c| < 3c\cdot\delta \leqslant 3c\cdot\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

3. ja

5. (a) waar
(b) niet waar

7. We bewijzen deel Stelling V.1.6 (iii). De andere gevallen kun je zelf proberen. Neem aan dat $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$ continu in het punt c zijn. We tonen aan dat de product functie $h : D \to \mathbb{R}$ gegeven door $h(x) = f(x)g(x)$, continu in het punt c is. Hiervoor gebruiken we stelling V.1.4. Kies een willekeurige rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in D met de eigenschap dat $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Wegens Stelling V.1.4 is het voldoende om aan te tonen dat $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(c)$. Merk op dat uit Stelling V.1.4 toegepast op f en g volgt dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ en $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c)$. Uit Stelling IV.2.7 volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)g(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(c)g(c) = h(c).$$

Dit bewijst het gevraagde.

8. Zij $c \in [a,b]$ willekeurig; we bewijzen dat f continu in c is. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon/(K+1)$; omdat $K \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ is $K+1 > 0$ en dus $\delta > 0$. Zij $x \in [a,b]$ willekeurig. Als $|x-c| < \delta$ dan geldt

$$\big|f(x)-f(c)\big| \leqslant K|x-c| < K\delta = K\frac{\varepsilon}{K+1} < \varepsilon.$$

Paragraaf V.2.

4. (a) We bewijzen dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. We moeten eerst aantonen dat 0 een verdichtingspunt van $(-1,1)$ is. Zij $\delta > 0$ willekeurig. Als $\delta > 1$ dan is $x = 1/2 \in (-1,1) \setminus \{0\}$ en $|x - 0| = 1/2 < \delta$. Als $0 < \delta \leqslant 1$ dan is $x = \delta/2 \in (-1,1) \setminus \{0\}$ en $|x - 0| = \delta/2 < \delta$. We bewijzen nu dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = 2007$. Dan is $\delta > 0$ en voor alle $x \in (-1,1)$ met $x \neq 0$ met $|x - 0| = |x| < \delta$ geldt

$$\big|f(x) - 0\big| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon;$$

merk op dat $f(x) = 0$ omdat $x \neq 0$.
(b) Als f continu in 0 is dan moet volgens Stelling V.1.5 voor elke rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(-1,1)$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gelden dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 1$. Neem $x_n = 1/(n+1)$. De rij $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ is in $(-1,1)$ en $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$ maar

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \neq 1 = f(0).$$

Conclusie: f is niet continu in 0.

5. Merk eerst op dat 0 een verdichtingspunt van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beschouw de rij $(1/(n+1))_{n\geq 0}$. De rij is in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en convergeert naar 0 maar

$$(f\left(\frac{1}{n+1}\right))_{n\geq 0} = (n+1)_{n\geq 0}$$

is niet convergent. Conclusie de limiet bestaat niet.

11. "$\Leftarrow$": Neem aan dat $\lim_{x\uparrow c} f(x) = \lim_{x\downarrow c} f(x) = L$. We tonen aan dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig.
Uit de definitie van $\lim_{x\uparrow c} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta_1 > 0$ kunnen we vinden zó dat voor alle $x \in (a,b)$ met $c - \delta_1 < x < c$: $|f(x) - L| < \varepsilon$. $(\star)$
Uit de definitie van $\lim_{x\downarrow c} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta_2 > 0$ kunnen we vinden zó dat voor alle $x \in (a,b)$ met $c < x < c + \delta_2$: $|f(x) - L| < \varepsilon$. $(\star\star)$ Definieer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Kies $x \in (a,b)$ zó dat $0 < |x - c| < \delta$ willekeurig. We tonen aan dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. Er zijn 2 mogelijkheden: (i) $x < c$, (ii) $x > c$. (i) $x < c$. Uit dit en $0 < |x - c| < \delta$ volgt $c - \delta < x < c$. Dus ook $c - \delta_1 < x < c$. Met $(\star)$ volgt $|f(x) - L| < \varepsilon$. (ii) $x > c$. Uit dit en $0 < |x - c| < \delta$ volgt $c < x < c + \delta$. Dus ook $c < x < c + \delta_2$. Met $(\star\star)$ volgt $|f(x) - L| < \varepsilon$.
In beide gevallen zien we dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dit bewijst het gevraagde. "$\Rightarrow$": Neem aan dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$. We bewijzen dat $\lim_{x\downarrow c} f(x) = L$. Zij $\varepsilon > 0$ willkeurig. Uit de definitie van $\lim_{x\to c} f(x) = L$ volgt dat we een $\delta > 0$ kunnen vinden zó dat voor alle $x \in (a,b)$ met $0 < |x - c| < \delta$ geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$. Kies $x \in (a,b)$ met $c < x < c + \delta$ willekeurig. In het bijzonder geldt dat $0 < |x - c| < \delta$. Dus ook $|f(x) - L| < \varepsilon$. Het bewijs dat $\lim_{x\uparrow c} f(x) = L$ gaat net zo.

15. Gebruik Gevolg V.2.16.

Paragraaf V.3.

2. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta = \varepsilon/5$. Dan is $\delta > 0$ en voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ geldt: als $|x - y| < \delta$ dan

$$\big|f(x) - f(y)\big| = |5x - 5y| = 5|x - y| < 5\delta = 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

3. Voor iedere $\delta > 0$ bestaan twee elementen $x, x' \in (0,\infty)$ zodanig dat $|x - x'| < \delta$ en $|1/x - 1/x'| \geqslant 1$. Inderdaad, gegeven $\delta > 0$ kiezen we $N \geqslant 1$ zo groot dat $1/N < \delta$ en nemen we $x = 1/(N+1)$ en $x' = 1/(N+2)$. Hieruit volgt dat de functie $1/x$ niet uniform continu is op $(0,\infty)$.

5. Aangezien f en g begrensd zijn kunnen we $M_1, M_2 > 0$ vinden zó dat voor alle $x \in A$ geldt dat $|f(x)| \leq M_1$ en $|g(x)| \leq M_2$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien f uniform continu is kunnen we een $\delta_1 > 0$ vinden zó dat voor alle $x, y \in A$ met $|x-y| < \delta_1$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$. Wegens de uniforme continuïteit van g vinden we een $\delta_2 > 0$ zó dat voor alle $x, y \in A$ met $|x-y| < \delta_2$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$. Definieer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Kies $x, y \in A$ met $|x-y| < \delta$. Uit de driehoeksongelijkheid en bovenstaande volgt dat

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| \\ &< M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

6. Aanwijzing: Neem een rij $(x_n)_{n\geq 1}$ in $(0,1]$ met $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Toon aan dat $(f(x_n))_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is. Met de volledigheid stelling geeft dit een kandidaat voor een limiet

Paragraaf V.4.

1. Het domein van f is geen interval.

5. Beschouw de functie $f : [-2,-1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^3 + 3x + 5$. Uit de rekenregels voor de continuïteit volgt dat f continu is. Omdat $f(-2) = -9 < 0$ en $f(-1) = 1 > 0$ volgt uit de Nulpuntstelling dat er ten minste één $x \in [-2,-1]$ is met $f(x) = 0$. Om aan te tonen dat geen ander nulpunt van f bestaat is het voldoende om te laten zien dat f een strikt stijgende functie is. Laat $x, y \in [-2,-1]$ zijn met $x < y$. Dan geldt $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) < 0$ omdat $x - y < 0$ en $x^2 + xy + y^2 > 0$, en dus $x^3 - y^3 < 0$. Hieruit volgt dat $x^3 + 3x + 5 < y^3 + 3y + 5$ en de functie f is strikt stijgend.

6. (a) 1, $-31/64$, -1

8. (a) waar
(b) niet waar

9. Hint: Gebruik de Tussenwaardestelling voor de functie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = f(x) - x$.

11. Gebruik Gevolg V.2.16.

13. (a) De functie d is gegeven door $d(t) = \sqrt{(x-t)^2 + \big(y - f(t)\big)^2}$. De continuïteit volgt onmiddellijk uit de rekenregels voor de continuïteit en het feit dat de wortel-functie continu is.
(b)

$$\begin{array}{rcl} d(t) & = & \sqrt{(x-t)^2 + \big(y - f(t)\big)^2} \\ & > & \sqrt{\big(y - f(x)\big)^2 + \big(y - f(t)\big)^2} \\ & \geqslant & \sqrt{\big(y - f(x)\big)^2} \\ & = & d(x). \end{array}$$

(c) Een continue functie op een gesloten interval neemt een minimum en een maximum aan op dit interval.
(d) Zij $d(t_0)$ het minimum op $I = \big[x - |y - f(x)|, x + |y - f(x)|\big]$. Als $t \notin I$ dan $|x - t| > \big|y - f(x)\big|$, dus volgens (b) $d(t) > d(x)$. Maar $d(t_0) \leqslant d(x)$ want $x \in I$ en $d(t_0)$ is de minimale waarde van d op I, dus er geldt ook $d(t) > d(t_0)$.

Paragraaf V.5.

3. Herinner uit het bewijs van Stelling V.5.1 dat $e^y \geq= 1 + y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Met $y = \ln x$ volgt dat $x = e^{\ln x} \geq 1 + \ln x$. Hieruit volgt $\ln x \leq x - 1$. Indien we nemen $y = \ln(1/x) = -\ln x$ volgt dat $1/x = e^{-\ln x} \geq= 1 - \ln x$. Hieruit volgt $\ln x \leq 1 - \frac{1}{x}$.

4. (a) Gebruik

$$\ln 2 = \ln\Big(\frac{2n}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{n+1}{n}\,\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{2n}{2n-1}\Big)$$

en de rekenregels van de logaritme.

5. (a) Hint: Gebruik $\ln x = 2\ln(\sqrt{x})$ en Opgave V.5.3.

Paragraaf VI.1.

1. (a) 13/4.
(b) 9/28.
(c) 5.

2. (a) $\frac{1}{3}$
(b) $\frac{3}{4}$

Paragraaf VI.2.

2. (a) We gebruiken het Limietkenmerk met de convergente reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3}$ (zie Voorbeeld VI.2.6). Merk op dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1/(j^3+1)}{1/j^3} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{1+1/j^3} = 1.$$

Het Limietkenmerk geeft dus dat $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^3+1}$ ook convergent is.

3. (c) We gebruiken het Quotientenkenmerk. Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^8 + 3(n+1))\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{(n^8+3n)\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^8 + 3(n+1)}{n^8+3n}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Uit het Quotientenkenmerk volgt dus dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(n^8+3n)\frac{3^n}{4^{n+1}}$ convergent is.

10. Hint: Gebruik het Quotientenkenmerk.

12. (a) Neem aan dat $L < 1$. Kies $r \in \mathbb{R}$ zó dat $L < r < 1$. Omdat $\lim\limits_{j\to\infty} \sqrt[j]{a_j} = L$ bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sqrt[j]{a_j} < r$ voor alle $j \geq N$. Ofwel $a_j < r^j$ voor alle $j \geq N$. Aangezien $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ convergent is, volgt uit het Majorantenkenmerk dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is.

15. Gebruik Stelling VI.2.5.

Paragraaf VI.3.

2. (a) convergent maar niet absoluut convergent
(b) convergent maar niet absoluut convergent
(c) absoluut convergent, dus ook convergent
(d) niet convergent, dus ook niet absoluut convergent

7. (a) Gebruik voledige inductie.
(b) Gebruik onderdeel (a) en Opgave V.5.4.

8. Zij $s = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zo groot dat

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon/2.$$

Laat $I_N = \{0, 1, \ldots, N\}$. Kies M zo groot dat $I_N \subseteq \sigma(I_M)$. Zij $n \geq M$. Wegens $\sigma(I_n) = I_N \cup (\sigma(I_n) \setminus I_N)$ volgt

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=0}^{n} a_{\sigma(j)} - s\Big| &= \Big|\sum_{j\in I_N} a_j + \sum_{j\in\sigma(I_n)\setminus I_N} a_j - s\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j\Big| + \Big|\sum_{j\in\sigma(I_n)\setminus I_N} a_j\Big| \\
&\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| + \sum_{j\in\sigma(I_n)\setminus I_N} |a_j| \\
&\overset{(i)}{\leq} 2\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

waar we $\sigma(I_n) \setminus I_N \subseteq \mathbb{N}_{\geq N+1}$ gebruikten in (i).

Paragraaf VII.1.

2. Voor $n = 1$ is de bewering waar: Als $f(x) = x$ en $x \in \mathbb{R}$ willekeurig dan geldt

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{t - x}{t - x} = 1 \qquad \text{en} \qquad 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

(I.V.) Neem aan dat voor een zekere $n \geqslant 1$ geldt dat $f(x) = x^n$ differentieerbaar is op $\mathbb{R}$, met afgeleide $f'(x) = nx^{n-1}$. Laat $f(x) = x^{n+1}$. Merk op dat $f(x) = x^n \cdot x$. De functie $f_1(x) = x^n$ is volgens de (I.V.) differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleide $f_1'(x) = nx^{n-1}$, en we hebben al bewezen dat $f_2(x) = x$ ook differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ met afgeleide $f_2'(x) = 1$. Volgens de rekenregels voor de afgeleide (productregel) is dan $f = f_1 \cdot f_2$ ook differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleide

$$f'(x) = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

3. (a) niet differentieerbaar
(b) differentieerbaar

4. (a) $1/2\sqrt{1+x}$
(b) $1/4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\sqrt{1+x}$
(c) $1/8\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\sqrt{1+x}$

5. (a) Beschouw de rijen $(1/n)_{n>0}$ en $(-1/n)_{n>0}$. Beide rijen convergeren naar 0, maar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1/n| - |0|}{1/n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(-1/n) - f(0)}{-1/n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-1/n| - |0|}{-1/n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{-1/n} = -1.$$

Hieruit volgt dat $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ niet bestaat. De functie $f(x) = |x|$ is dus niet differentieerbaar in 0.
(b) We berekenen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot |x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot |x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

De functie $f(x) = x \cdot |x|$ is dus differentieerbaar in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

9. (i) en (ii): Deze eigenschappen volgen uit de rekenregels voor limieten. (iii) Er geldt,

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)}{h}, \end{aligned}$$

zodat, met behulp van de rekenregels voor limieten,

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x\to c} \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)}{h} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

(iv) Er geldt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1/g(x_0+h) - 1/g(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \right) \\ &= -g'(x_0) \cdot \frac{1}{(g(x_0))^2}. \end{aligned}$$

11. (c) *Aanwijzing:* Vind eerst de rationale oplossingen van $f(x) = -39/32$.

14. (a) Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $f'(0) > 0$. Omdat f' continu is, is er een $d > 0$ zó dat $f'(x) > 0$ voor elke $x \in (-d, d)$. De functie f is dus

strikt stijgend op $(-d, d)$ en we kunnen Stelling VII.1.8 toepassen.
(b) Volgens de rekenregels voor de afgeleide is f differentieerbaar in elke $x \neq 0$ met $f'(x) = 1 - 2\cos(1/x) + 4x\sin(1/x)$. Als $x = 0$ gebruiken we de definitie van de afgeleide:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0}(1 + 2x\sin(1/x)) = 1.$$

Omdat $\lim_{x \to 0} f'(x)$ niet bestaat, is f' niet continu in 0 en dus is f niet continu differentieerbaar.

We laten nu zien dat f op geen open interval rond 0 inverteerbaar is. Zij $(-d, d)$ willekeurig. Vind $k \in \mathbb{N}$ zó dat $1/(2k\pi) < d$. De punten $x = 1/(2k\pi)$ en $y = 1/\big(2(k+1)\pi\big)$ liggen in het open interval $(-d, d)$ en $f'(x) = -1$ en $f'(y) = 3$. Omdat f' continu is op (y, x) volgt er dat f niet injectief is op $(-d, d)$ (f is stijgend rond y en dalend rond x) en dus ook niet inverteerbaar.

Paragraaf VII.2.

3. *Aanwijzing:* Toon eerst aan dat er een nulpunt is met behulp van Stelling V.4.3. Leid uit Stelling VII.2.5 af dat de functie $x \mapsto x^7 + x^5 + x^3 + 1$ van strikt stijgend is en concludeer hieruit dat er precies één nulpunt is.

4. Laat $t_1 < \cdots < t_N$ de nulpunten van f zijn. Omdat f differentieerbaar is op $[a, b]$, en dus op ieder van de $N - 1$ intervallen $[t_j, t_{j+1}]$, geeft de stelling van Rolle punten $s_j \in (t_j, t_{j+1})$ waarvoor $f'(s_j) = 0$ ($j = 1, \ldots, N-1$). Aangezien de intervallen (t_j, t_{j+1}) nergens overlappen, zijn alle s_j verschillend.

6. Aanwijzing: gebruik de middelwaardestelling.

7. (i) Kies x_0 en x_1 in $[a, b]$ met $x_0 \leqslant x_1$ willekeurig; we moeten aantonen dat $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Als $x_0 = x_1$ dan is dit duidelijk, dus mogen we aannemen dat $x_0 < x_1$. Volgens de Middelwaardestelling is er een punt $\xi \in (x_0, x_1)$ met de eigenschap dat

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

en omdat volgens aanname $f'(\xi) \geqslant 0$ is, volgt hieruit dat

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0.$$

Wegens $x_1 > x_0$ impliceert dit $f(x_1) - f(x_0) \geqslant 0$.
(ii) Wegens (i) is f stijgend. Stel dat f niet strikt stijgend is. Dat betekent dat er punten x_0 en x_1 in $[a, b]$ bestaan met $x_0 \neq x_1$ en $f(x_0) = f(x_1)$. Maar omdat f stijgend is volgt hieruit dat f constant is op het interval $[x_0, x_1]$. Dus is $f'(\xi) = 0$ voor alle $\xi \in (x_0, x_1)$, hetgeen in tegenspraak is met de aanname dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a, b)$.
(iii) Pas (i) toe op de functies f en $-f$.

Paragraaf VII.3.

1. Hint: Herinner eerst de definitie van x^α uit Paragraaf V.5.

Paragraaf VIII.1.

4. (a) Zij $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ een willekeurige partitie van $[a, b]$. Omdat f een constante functie is geldt voor elke $i = 1, \ldots, n$ dat

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_1\} = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_1\} = M_i = M.$$

Hieruit volgt dat $L(f, P) = U(f, P) = M(b - a)$.
(b) Dit volgt onmiddellijk uit het bovenste onderdeel.

5. *Aanwijzing:* Bedenk dat $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

9. Hint: Gebruik de partitie $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ met $x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}$ voor $k = 0, 1, \ldots, n$ en gebruik Opgave VII.3.6.

11. Neem aan dat een $c \in [a, b]$ bestaat met $f(c) > 0$; we laten zien dat $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Zij $\varepsilon = f(c)/2 > 0$. Omdat f continu is, bestaat voor deze ε een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x \in [a, b]$ met $|x - c| < \delta$ geldt $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Kies $s, t \in (a, b)$ zó dat $c \in (s, t)$ en $(s, t) \subseteq (c - \delta, c + \delta)$. Dan geldt voor elke $x \in (s, t)$ dat $f(x) > f(c) - \varepsilon = f(c)/2 > 0$. Hieruit volgt dat voor de partitie $P = \{a, s, t, b\}$ van $[a, b]$ geldt $L(P, f) \geqslant (t - s)f(c)/2 > 0$. Omdat f integreerbaar op $[a, b]$ is volgt $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. We kregen een tegenspraak, dus $f(x) = 0$ voor elke $x \in [a, b]$.

12. 1

Paragraaf VIII.2.

2. Hint: Gebruik $U(P, \lambda f) = \lambda U(P, f)$ en $L(P, \lambda f) = \lambda L(P, f)$.

5. Gebruik Stelling VIII.1.11.

7. (a) Gebruik Stelling VIII.1.11.

Paragraaf VIII.3.

Paragraaf IX.1.

4. Laat $f : D \to \mathbb{R}$ en $f_n : D \to \mathbb{R}$ met $n \geq 1$ functies zijn. Neem aan dat $f_n \xrightarrow{u} f$. We bewijzen dat $f_n \xrightarrow{p} f$. Kies $c \in D$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien $f_n \xrightarrow{u} f$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ en voor alle $x \in D$ geldt dat

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

In het bijzonder zien we dat voor alle $n \geq N$ geldt $|f(c) - f_n(c)| < \varepsilon$. Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt dat $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c)$. Aangezien $c \in A$ willekeurig was, volgt dat $f_n \xrightarrow{p} f$.

5. (a) niet waar
(b) niet waar

6. Zij $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Kies $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Kies $n = N$. Dan geldt $|f_n(1/n) - 0| = \frac{1}{8} \geq \varepsilon$. Dus $f_n \overset{u}{\not\to} 0$.

7. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Kies $x \in [-1, 1]$ en $n \geq N$ willekeurig. Dan volgt:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Dus $f_n \xrightarrow{u} 0$

8. (a) waar; f is de constante functie $f(x) = 1$ voor elke $x \in \mathbb{R}$
(b) niet waar

9. (a) waar; f is de nulfunctie
(b) *Aanwijzing:* Om te bewijzen dat de rij naar de nulfunctie uniform convergeert, bepaal eerst extremen van elke f_n.

10. Gebruik Stelling IX.1.10.

11. Neem bijvoorbeeld $f_n(x) = \frac{1}{n|x|+1}$.

13. *Aanwijzing:*
(d) Neem $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd als volgt: $f_n(x) = x$ en $g_n(x) = 1/n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $x \in \mathbb{R}$.

Paragraaf IX.2.

3. Zij $x \in D$. Aangezien voor elke $j \geq 0$, $|g_j(x)| \leq M_j$ volgt uit het majorantenkenmerk dat de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$ (absoluut) convergent is en voor elke $k \geq 0$ geldt dat $\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} g_j(x)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} M_j$. Definieer $f : D \to \mathbb{R}$ als $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$. We beweren dat $\left(\sum_{j=0}^{n} g_j\right)_{n\geq 0}$ uniform naar f convergeert. Kies $\varepsilon > 0$ wilekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{j=N+1}^{\infty} M_j < \varepsilon$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ en $x \in D$ geldt dat

$$\Big|\sum_{j=0}^{n} g_j(x) - f(x)\Big| = \Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} g_j(x)\Big| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \varepsilon.$$

Index