Uitwerkingen Lineaire algbera 1 natuurkunde oefentoets

Opgave 1. Bepaal de hoek tussen de vectoren $(1,5,3,1)$ en $(0,0,1,0)$ in $\mathbb{R}^4$.

Paragraaf 1.1 (8) stelt: de hoek tussen de nonzero vectoren v en w is: $\arccos(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||})$

We hebben hier de nonzero vectoren: $v = (1,5,3,1)$ en $w = (0,0,1,0)$, dus:

We berekenen de norm van beide: $||v|| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{36} = 6.$

$||w|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$

We berekenen ook het inproduct: $v \cdot w = (1,5,3,1)(0,0,1,0) = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3.$

We vullen dit in: $\theta = \arccos(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}) = \arccos(\frac{3}{6 \cdot 1}) = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}.$

Opgave 2. Geef een basis voor de kern, de kolomruimte en de rijruimte van de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

We construeren eerst de reduced row echelon form van de matrix A. Er geldt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \\ R_4 + R_3 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + 5R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} .
\end{aligned}$$

Schrijf

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Doordat A en A' rijequivalent zijn, hebben deze matrices dezelfde kern. We gaan na voor welke $x := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ geldt dat x in de kern zit van A. Dit geldt precies dan als x in de kern van A' zit en dus dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 - 5x_5 \\ x_2 &= -x_3 - 3x_5 \qquad \text{met } x_3,\ x_5 \text{ vrij.} \\ x_4 &= -2x_5 \end{aligned}$$

Door $x_3 = r \in \mathbb{R}$ en $x_5 = s \in \mathbb{R}$ vrij te nemen, vinden we dat de kern van A', en dus de kern van

A, precies uit alle x van de vorm

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestaat. Definieer

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dan volgt er dat de kern van A gelijk is aan $\mathrm{span}(u_1, u_2)$. Doordat u_1, u_2 onafhankelijk zijn (ga dit na met de definitie), volgt dat u_1, u_2 een basis voor de kern van A is. Er zijn meerdere bases mogelijk, dus dit is niet het enige goede antwoord!

Schrijf v_j voor de j-de kolom van A. De spillen van A' staan in kolommen $1, 2, 4$ en dus is v_1, v_2, v_4 een basis voor de kolomruimte van A (zie omlijnde rechthoek op pagina 138). Het is hierbij belangrijk dat we de kolommen van A pakken, want over het algemeen zijn de kolomruimtes van A en A' verschillend! Nog een opmerking: het zou hierbij voldoende zijn geweest als A' in row-echelon form zou hebben gestaan; de reduced-row-echelon form is niet vereist.

Om een basis voor de rijruimte te vinden, gebruiken we dat de rijruimte van A gelijk is aan de rijruimte van A'. De rijruimte van A' heeft als basis alle niet-nul rijen in A', en dit is ook een basis voor A. Dus w_1, w_2, w_3 is een basis voor A waarbij

$$w_1 := (1, 0, 1, 0, 5), \quad w_2 := (0, 1, 1, 0, 3), \quad w_3 := (0, 0, 0, 1, 2).$$

Opgave 3. Voor welke waarde van a heeft het stelsel:
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = a$
$-x_1 - x_2 - x_3 = 2$
oneindig veel oplossingen? Geef voor deze waarde van a alle oplossingen

Zet het stelsel in een aangevulde matrixvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & a \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Veeg deze matrix, tot hij in gereduceerde rij-echelonvorm staat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & a \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} R_1 + R_3 \\ R_2 + 2R_3 \\ -R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4+a \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6-2a \\ 0 & 1 & 2 & 4+a \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\begin{array}{c} R_3 - R_2 \\ R_2 \\ R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -6-a \\ 0 & 1 & 2 & 4+a \\ 0 & 0 & 0 & -6-2a \end{array}\right]$$

Merk op dat voor $-6-2a \neq 0$ het stelsel vergelijkingen inconsistent is en er geen oplossingen zijn.

Voor $-6-2a=0$, dus $a=-3$ hebben we een nulrij en ook maar twee spillen: we hebben een kolom zonder spil en dus een vrije variabele, en dus oneindig veel oplossingen.

Voor $a=-3$ krijgen we de uitgebreide gereduceerde matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Oplossingen zijn van de vorm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+x_3 \\ 1-2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Voor $x_3 \in \mathbb{R}$ vrij

De oplossingsruimte wordt gegeven door: $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} r$

voor $r \in \mathbb{R}$ vrij.

Opgave 4. Geef de inverse van de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We zetten dit stelsel in de aangevulde matrixvorm en reduceren hierin A tot de eenheidsmatrix. Er geldt namelijk,

$$
\begin{aligned}
(A \mid I) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_1 \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_2 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_4 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_3 \\ R_4 - 2R_2 \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & -4 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_3 \\ -(R_4 - 4R_3) \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -21 & 12 & 10 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & -4 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 + R_4 \\ R_2 - 3R_4 \\ R_3 + R_4 \\ R_4 \end{matrix} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -4 & -4 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_2 + 2R_3 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} .
\end{aligned}
$$

Dus er geldt dat de inverse A^{-1} van A bestaat (want A is rijequivalent aan de eenheidsmatrix) en gelijk is aan

$$
\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & -5 & -4 & -13 \\ 7 & -4 & -4 & -10 \end{pmatrix}.
$$