Simplex methode

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

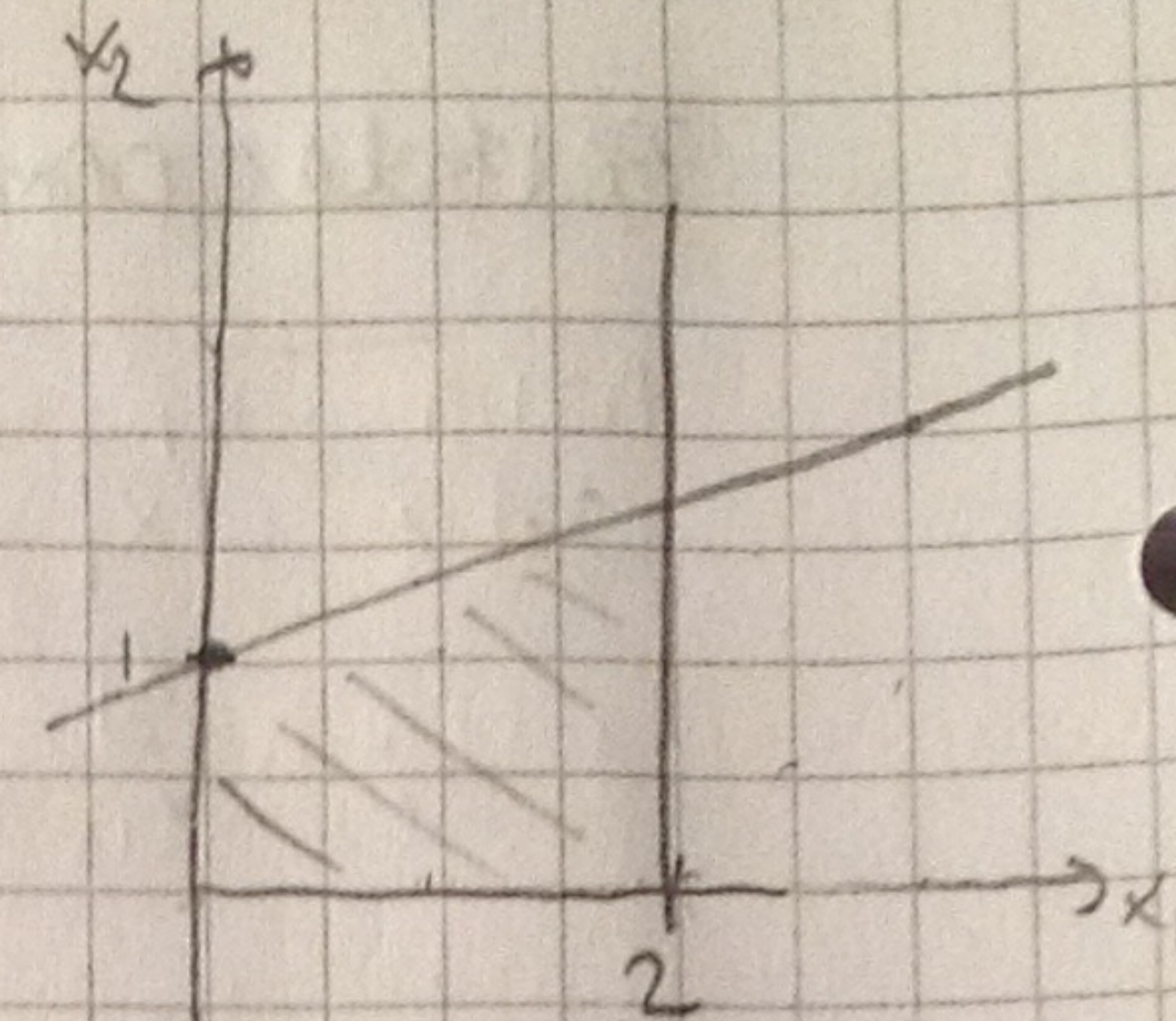
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

min $x_1 - x_2$

odv $-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



Gelijkheden

$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

min $z = x_1 - x_2$

odv $-x_1 + 3x_2 + s_1 = 3$

$x_1 + s_2 = 2$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Simplex tableau

$\hat{x}_N$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	
$-z$	0	1	-1	0	0	$r_0 + r_1/3$
s_1	3	-1	3	1		$r_1/3$
s_2	2	1			1	$r_2 + 0 \cdot r_1$

pivotrij →

$\hat{x}_B$

↑ pivotkolom

Interpretatie

$-z = 0 - x_1 - (-x_2)$

$\hat{x}_B = \bar{b} - \hat{N}\hat{x}_N$ met

$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	
$-z$	1	$2/3$	0	$1/3$	0	$\leftarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$
x_2	1	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$		
s_2	2	1	0		1	

Dus $\boxed{\text{opt opl is } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, z^* = -1}$

$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow$ optimaal

Zelfde probleem met $c = (1, 0)$

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 & & \\ \text{odv} & -x_1 + 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Eerste simplex tableau wordt

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	
		$\underbrace{}_{}$ $\hat{x}_N$				$\bar{c}$
$-z$	0	1	0	0	0	$r_0 + 0 \cdot r_1$
x_B s_1	3	-1	3	1		$r_1 / 3$
s_2	2	1			1	$r_2 + 0 \cdot r_1$

x_2 zit niet in basis
maar • met kosten $\bar{c}_2 = 0$
• kolom $\binom{3}{0} \in \hat{A}$ bevat elt > 0, kan dus pivotkolom zijn

Verder • $\bar{c} \geq 0$ dus opl. is optimaal

$\Rightarrow$ Je kunt pivotstap uitvoeren met in basis tredende var. x_2
uit ——— s_1

Omdat $\bar{b}_{(s_1)} > 0$ geeft dit een <u>ander</u> bfs

nl. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 2 \end{cases}$

Dus opt. opl is niet uniek

Andere keuzen van pivotkolommen zijn er niet, dus we bekijken nieuwe tableau

$\hat{x}_N$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	
$-z$	0	1	0	0	0	$\leftarrow \bar{c}$
x_2	1	$-1/3$	1	$1/3$	0	$\hat{\pi}$
s_2	2	1			1	

$\hat{x}_B$

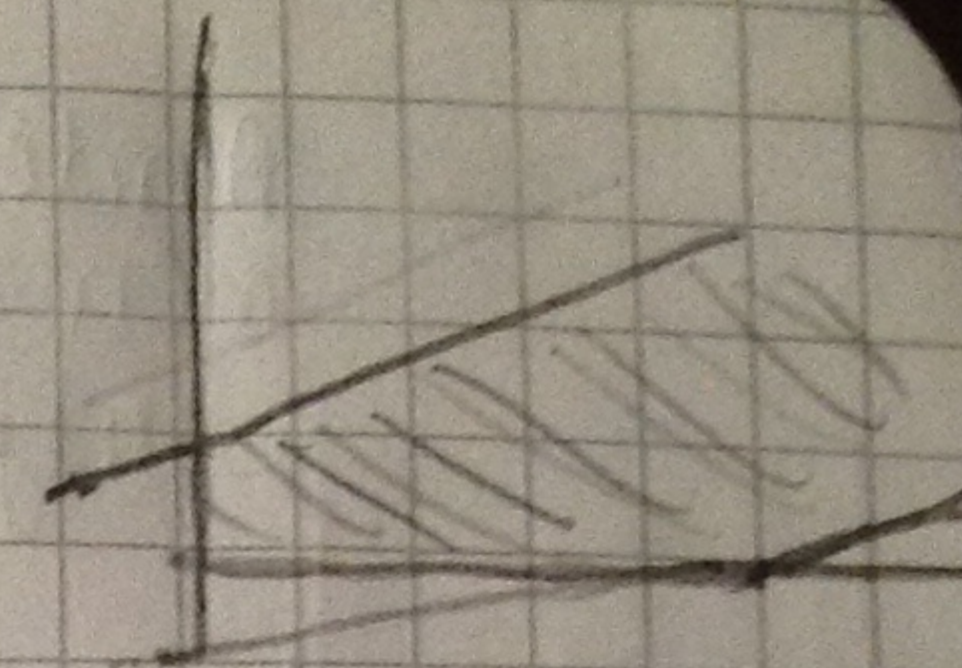
Enige pivotstap is weer "terug"
Nieuwe opt. opl. zijn niet te vinden
Dus alle opt opl zijn van de vorm

- $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$
- waarde $z^* = 0$

<u>NB</u> Stel zelf de duale problemen op!

$$\min \quad z_1 = x_1 - x_2$$

$$\text{o.d.v.} \quad -x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 - 5x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Gelijkheden maken

$$\min \quad z_1 = x_1 - x_2$$
$$\text{odv} \quad -x_1 + 3x_2 + s_1 = 3$$
$$x_1 - 5x_2 - s_2^a = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Pbm $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 3 \\ s_2 = -5 \end{pmatrix}$ is geen bfs !

$\Rightarrow$ extra var. x_2^a

Fase I : $\min \quad w = x_2^a = 5 - x_1 + 5x_2 + s_2$
$$\text{odv} \quad -x_1 + 3x_2 + s_1 = 3$$
$$x_1 - 5x_2 - s_2 + x_2^a = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, x_1^a \geq 0$$

$\hat{x}_N$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	x_2^a	
$-w$	-5	-1	5	0	1	0	$r_0 + r_2$
s_1	3	-1	3	1			$r_1 + r_2$
x_2^a	5	1	-5		-1	1	$r_2/1$
$-z$	0	1	-1				$r_z - r_2$

$\hat{x}_B$ { s_1, x_2^a }

$\uparrow$

pivotkolom voor $-w$

NB - pivot meteen de "echte" doelfunctie mee !

basis	b	x_1	x_2	s_1	s_2	x_2^a
$-w$	0	0	0	0	0	1
s_1	8	0	-2	1	-1	1
x_1	5	1	-5		-1	1
$-z$	-5	0	4	0	0	0

Nu geldt • $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ s_1 = 8 \\ s_2 = 0 \end{pmatrix}$ is bfs

• we kunnen door pivotten met tableau horend bij $(-z)$, zonder de x_2^a-kolom.
Tbv de duale variabelen zal het handig blijken om de x_2^a-kolom mee te transformeren

Maar $\bar{c} = (0\ 4\ 0\ 0) \geq 0$
dus opl. is al optimaal!
en waarde $z^* = 5$

N.B. toegelaten gebied is onbegrensd!

Andere kostenfunctie

min $z = -x_2$

o.d.v.

in tableau 1 : $-z \mid 0 \mid 0 \; -1 \; 0 \; 0 \; 0$

Tableau 2 wordt:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	x_2^a
$-z$	0	0	-1	0	0	0
s_1	8	0	-2	1	-1	1
x_1	5	1	-5		-1	1

enige keuze voor pivotkolom, maar $\hat{A}_{.2} < 0$

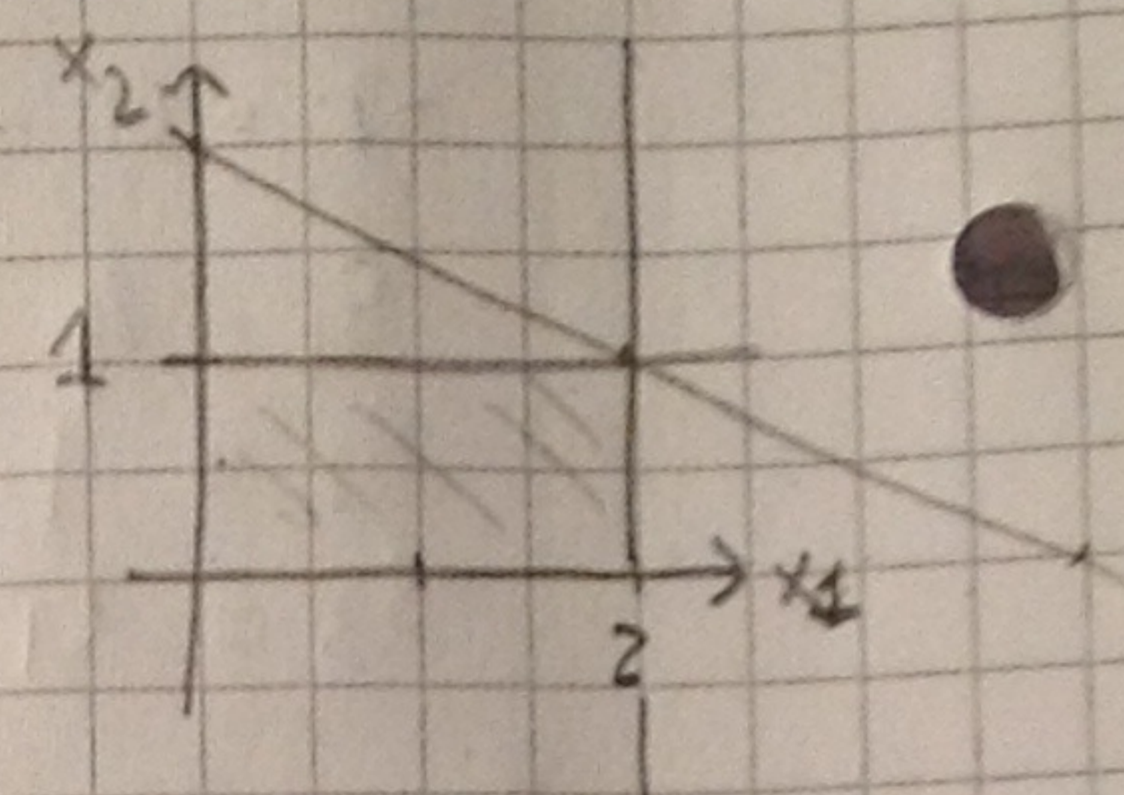
dus geen pivotelt te kiezen

dwz. er is geen basis met betere z-waarde, maar verhogen van x_2 doet wel de z-waarde afnemen

$\Rightarrow$ opl. is **onbegrensd**

Gedegenereerd probleem

min $-x_1 - x_2$
odv $2x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 1$
$x_1 + 2x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$



Gelijkheden maken

min $-x_1 - x_2$

$$2x_1 + s_1 = 4$$
$$x_2 + s_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	0	-1	-1	0	0	0
s_1	4	2		1		
s_2	1		1		1	
s_3	4	1	2			1
		↑				

- 2 keuzen pivotkolom, bijv 1ste
- min ratio regel:
  kies $\operatorname{argmin}\left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} : a_{i1} > 0 \right\}$
  dwz: $\min\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{1}\right) = \frac{4}{2}$
  correspondeert met s_1
  rij van s_1

NB als je rij van s_3 kiest levert pivotstap geen toegelaten opl!

Interpretatie tableau is

$$-z = 0 - (-1)x_1 - (-1)x_2$$
$$s_1 = 4 - 2\cdot x_1$$
$$s_2 = 1 - 1\cdot x_2$$
$$s_3 = 4 - 1\cdot x_1 - 2\cdot x_2$$

} aan rechterkant alleen niet-basis-variabelen

Pivotstap "verwisselt" s_1 en x_1

s_1 – treedt uit basis

x_1 — in —

Bekijk rij van s_1:

$$s_1 = 4 - 2x_1 \iff 2x_1 = 4 - s_1$$
$$\iff x_1 = 2 - \tfrac{1}{2}s_1$$

In nieuwe tableau: deel pivotrij door 2

basis	b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$						
x_1	2	1		$\frac{1}{2}$		
s_2						
s_3						

Andere rijen maken we door x_1 te substitueren:

$$-z = 0 + x_1 + x_2$$
$$= 0 + (2 - \tfrac{1}{2}s_1) + x_2$$
$$= 2 + x_2 - \tfrac{1}{2}s_1$$
$$= 2 - (-1)x_2 - \tfrac{1}{2}s_1$$

rekenregel: rij := rij + $\frac{1}{2}$ pivotrij zodat onder x_1 een 0 komt

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
$-z$	2	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	$r_0 + r_1$
x_1	2	1		$\frac{1}{2}$			r_1
s_2	1		1		1		$r_2/1$
s_3	2		2			1	

pivotkolom

minratio regel: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$ dus beide keuzen van pivotrij zijn toegestaan

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
$-z$	4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\bar{c} \geq 0$ dus optimaal
x_1	2	1		$\frac{1}{2}$			
x_2	1		1		1		
s_3	0		0		-2	1	

NB onder s_1 s_2 s_3 staan duale variabelen π_1, π_2, π_3
$\Rightarrow \pi = (\frac{1}{2}, 1, 0)$

NB $s_3 = 0$ dus gedegenereerd pbm

Dat zie je ook aan plaatje: er is 1 overbodige beperking

NB onder basisvariabelen staat in corresponderende rij een 1