Huiswerk # 4, WI2608/Besliskunde 1 2013

Inleveren: Dinsdag 24 december, 2013

1. Gegeven is het onderstaande geheeltallig programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{llrcrcl}
\min z & = & -5x_1 & - & x_2 & & \\
\\
\text{o.d.v.} & & -3x_1 & + & 16x_2 & \geq & 8 \\
& & 5x_1 & + & 16x_2 & \leq & 40 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
& & x_1 & , & x_2 & \multicolumn{2}{l}{\text{geheeltallig}}
\end{array}$$

   a) Laat zien dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ een toegelaten oplossing is, en geef de bijbehorende z-waarde.

   b) Toon door middel van **branch-and-bound** aan dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ de optimale oplossing is. Maak hierbij efficiënt gebruik van het feit dat $(x_1, x_2) = (2, 1)$ een toegelaten oplossing is.
   N.B. De *LP-relaxaties* mogen grafisch, of met behulp van een optimaliseringspakket (bijv. QSopt), opgelost worden.

2. Gegeven is het probleem IP

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\max z_{IP} & = & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\
& & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq & 0, & \text{geheeltallig}
\end{array}$$

   De LP-relaxatie van IP is opgelost met behulp van het simplexalgoritme. Het verkregen tableau ziet er als volgt uit:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$-z$	$-\frac{55}{4}$	$-\frac{35}{4}$	0	0	0	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{4}$
s_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{19}{4}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
x_2	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   a) Genereer een fractie-snede bij de rij van x_2 van het Simplextableau.

   b) Voeg de fractie-snede toe aan het optimale tableau en heroptimaliseer met behulp van Duale Simplex. Wat is de optimale oplossing van de LP-relaxatie na het toevoegen van de snede?

   c) Is de in b) verkregen oplossing optimaal ook voor IP? Motiveer je antwoord.

3. BK1-C9.pdf opgave 7.6.

4. (zie BK1-C10-13.pdf, Hoofdstuk 1) Gegeven zijn problemen P, Q en R die alle tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoren. Verder veronderstellen we dat er een polynomiale-tijd transformatie van P naar Q, en van Q naar R bestaat, d.w.z. $P \preceq Q$ en $Q \preceq R$.

   (a) Beargumenteer dat de relatie $\preceq$ transitief is, d.w.z. dat $P \preceq R$.

   (b) Beantwoord onderstaande vier vragen, en motiveer je antwoord.

      (i) Probleem P is $\mathcal{NP}$-volledig. Wat betekent dit voor probleem Q?

      (ii) Probleem P behoort tot $\mathcal{P}$. Wat betekent dit voor probleem Q?

      (iii) Probleem Q is $\mathcal{NP}$-volledig. Wat betekent dit voor probleem P?

      (iv) Probleem Q behoort tot $\mathcal{P}$. Wat betekent dit voor probleem P?

5. (zie BK1-C10-13.pdf, Hoofdstuk 1).
   Verzamelingdoorsnijdingsprobleem.
   Gegeven een eindige verzameling S, een collectie deelverzamelingen $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ van S en een natuurlijk getal k.
   Probleem: Is er een deelverzameling $S' \subset S$ van k elementen, zodanig dat $S' \cap C_i \neq \emptyset$ voor $i = 1, \ldots, n$?

   Bewijs dat *Knooppuntenbedekkingsprobleem* $\preceq$ *Verzamelingdoorsnijdingsprobleem.* Leid hiermee af dat *Verzamelingdoorsnijdingsprobleem* $\in \mathcal{NPC}$. Je mag hiervoor de resultaten van Opgave 1.4 (uit het dictaat) gebruiken.

NIET VERGETEN: Naam en studentnummer op alle vellen papier. Inleveren óf op papier aan Pieter van den Berg (Delft) of Herman Blok (Leiden) óf electronisch in **pdf-formaat** (één bestand) aan Pieter of Herman.