College 9

Note Title 7-3-2011

Geheeltallige optimalisering
(Integer Linear Programming)

ILP (of vaak gewoon IP)

(IP) $z_{IP} = \min c^T x$
odv $\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$
$x \in \mathbb{Z}^n$

Relaxatie

Def. probleem (P_R):

$$z_{P_R} = \min c(x) \quad \text{odv} \quad x \in T \subseteq \mathbb{R}^n$$

is een relaxatie van (IP):

$$z_{IP} = \min c(x) \quad \text{odv} \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \quad (X = P \cap \mathbb{Z}^n)$$

als $X \subseteq T$.

NB! Het probleem

$$z_{LP} = \min c^T x \quad \text{odv} \quad x \in P$$ } De LP-relaxatie

is een relaxatie van (IP).

We kunnen het MST-probleem (college 8) formuleren als IP-probleem:

Beslissingsvariabelen:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{als } e \in MST \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Lengte van $e \in E$

$$(MST): \quad \min \sum_{e \in E} d_e x_e$$

$$\text{odv} \quad \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1 \qquad (1)$$

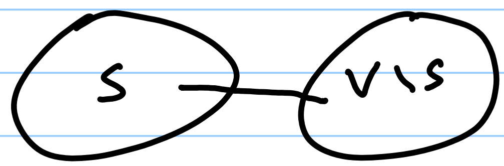
$$\sum_{\{[i,j] \in E \mid i \in S, j \notin S\}} x_e \geq 1, \quad \forall S \subseteq V : \begin{matrix} S \neq \emptyset \\ S \neq V \end{matrix} \qquad (2)$$

$$x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E \qquad (3)$$

(1): We moeten precies $|V|-1$ kanten hebben in een MST.

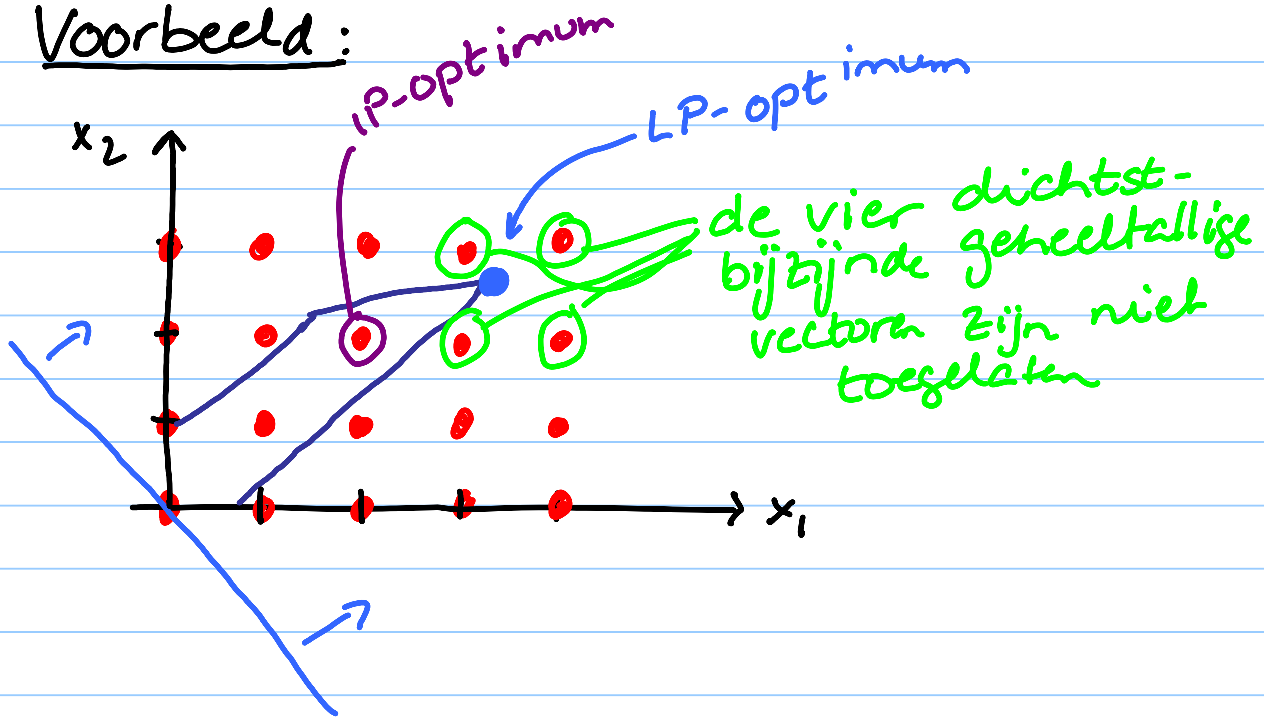
(2) De boom moet samenhangend zijn:

Neem een willekeurige niet triviale partitie v/d knopen: $(S, V \setminus S)$
Dan moet er tenminste één MST-kant zijn tussen S en $V \setminus S$.



Hoe zouden we IP aan kunnen pakken?
Afronden?
Nee, want dat geeft iha niet eens een toegelaten oplossing!

Voorbeeld:



Afronden kan ook betekenisloos zijn in combinatorische modellen. Volgende keer meer over oplosmethoden. Eerst een aantal modellen.

Het handelsreizigersprobleem (TSP)

Gegeven "steden" $0, 1, \ldots, n$, en een afstandenmatrix, bepaal een cycle (kring) met minimale lengte die elke "stad" precies een keer bezoekt.

(a) Symmetrische versie ($d_{[i,j]} = d_{[j,i]}$)
in $G = (V, E)$ (lijkt erg op MST!)

Laat $\delta(v) = \{e \in E \mid v$ is een eindpunt van $e\}$.

Beslissingsvariabelen:

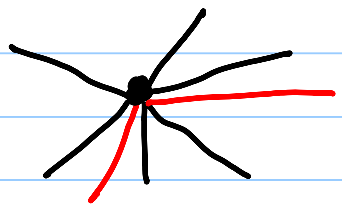
$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{als } e \in \text{TSP-cycle} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

(TSP): $\min \sum_{e \in E} d_e x_e$

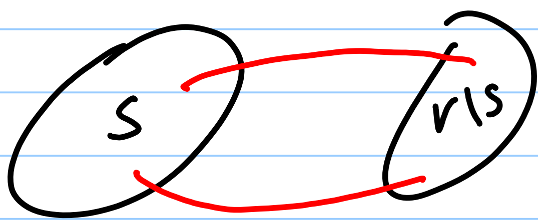
odv $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2, \quad \forall v \in V \quad (4)$

$\sum_{\{[i,j] \in E \mid i \in S, j \notin S\}} x_e \geq 2, \quad \forall S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V \quad (5)$

$x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E \quad (6)$

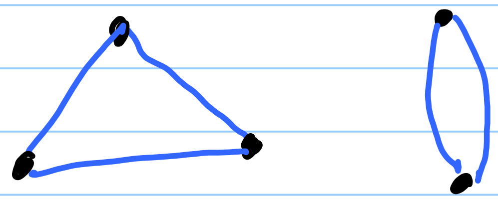
(4): 

Precies 2 TSP-kanten grenzend aan elke $v \in V$

(5): 

Geen onzamenhangende componenten

Zonder constraints (5) staan we dit soort oplossingen toe:



Deze niet-volledige kringen noemen we "subtours".

(b) Algemene (assymetrische) versie (in $G = (V, A)$)

Variabeldefinitie

Laat $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als pijl } (i,j) \text{ in de TSP-tour zit} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

een gerichte kring

$$\min \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

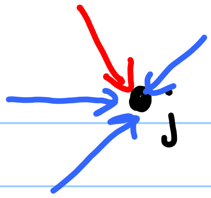
odv

$$\sum_{i=0,\, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 0, \dots, n \qquad (7)$$

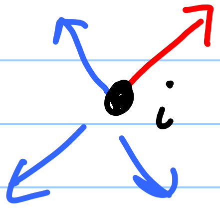
$$\sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \qquad (8)$$

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in V \setminus S}} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall\, S \subset V : \begin{array}{l} S \neq V \\ S \neq \emptyset \end{array} \qquad (9)$$

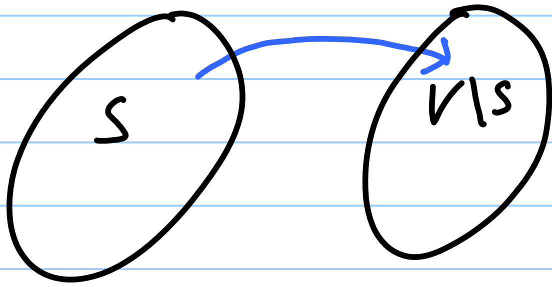
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,j : (i,j) \in A \qquad (10)$$

(7): 

Er moet precies een pijl in "stad" j komen, $j=0,\dots,n$.

(8): 

Precies een pijl gaat "stad" i verlaten, $i=1,\dots,n$.

(9): 

Moet tenminste een pijl van S naar het complement.

Potentieel probleem met voorwaarden van type (2), (5), (9)?

Er zijn er exponentieel veel!

Geen probleem in de praktijk, want we voegen iteratief alleen de geschonden ongelijkheden van deze types aan onze formulering toe. Deze geschonden ongelijkheden kunnen we in polyn. tijd vinden.

De resulterende formulering geeft een "sterke" LP-relaxatie, dwz

$$\frac{z_{IP}-z_{LP}}{z_{IP}} \text{ is klein}$$

goed voor alg. "Branch-and-Bound", zie college 10

Alternatieve (polyn.) formulering van voorw. (9):

Laat $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad 1 \leq i \neq j \leq n \qquad (9')$$

Laat zien dat deze ongelijkheden alle subtours uitsluiten, en dat geen enkele TSP-tour wordt uitgesloten.

(i) <u>(9') sluiten subtours uit.</u>

Als we subtours hebben is er tenminste een die niet stad 0 bevat.
Neem deze tour en laat E' de verz. edges zijn van die tour
Tel (9') op voor E':

$$n \sum_{(i,j) \in E'} x_{ij} \leq |E'|(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{(i,j) \in E'} x_{ij} \leq |E'|\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$$

Maar, in subtour: $\quad \sum_{(i,j) \in E'} x_{ij} = |E'| > |E'|\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ (9') sluiten alle tours uit die niet 0 bevatten.

(ii) Geen TSP-tour wordt uitgesloten door (9')

We laten zien dat er een geldige waardetoewijzing is aan de u-variabelen.

Laat $u_i = k$, $k = 1, \ldots, n$, waarbij k de positie is van stad i in de tour.

Geval 1: $x_{ij} = 0$.

Ongelijkheid (9') wordt dan:

$$u_i - u_j \leq n-1$$

en dat klopt, want in het ergste geval is $u_i = n$ en $u_j = 1$

Geval 2: $x_{ij} = 1$.

Dit betekent dat $u_i = k$ en $u_j = k+1$ voor een getal $k \in \mathbb{N}$.

$$(9'): \underbrace{k-(k+1)+n = n-1}_{\text{Linkerzijde}} \leq \underbrace{n-1}_{\text{rechterzijde}}$$

$\blacksquare$

Formulering (9') wordt niet gebruikt in de praktijk omdat de resulterende LP-relaxatie "zwak" is, dwz

$$\frac{z_{IP} - z_{LP}}{z_{IP}} \text{ is relatief groot.}$$

Andere modelleeraspecten:

(i) Stel, we hebben kosten (doelfunctie)

$$c(x) = \begin{cases} ax+b & \text{als } x>0 \\ 0 & \text{als } x=0 \end{cases}$$

Voer een nieuwe variabele y in:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{als } x>0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

In doelfunctie:

$$\cdots + ax + by + \cdots$$

Voorwaarde:

$$x \le Uy \quad \leftarrow \text{bovengrens op } x$$

$$x \geq 0, \quad y \in \{0,1\}$$

(ii) Dichotomieën

$$x \geq a \quad \text{óf} \quad y \geq b$$

Voer een nieuwe var. z in

$$z = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq a \\ 0 & \text{als } y \geq b \end{cases}$$

Modelleer als:

$$x \geq a \cdot z$$
$$y \geq b\,(1-z)$$

(iii) Discrete variabelen

Bv: $x \in \{5, 8, 13, 22\}$

Voer een nieuwe variabele y_i in voor elke mogelijke waarde van x:

$$x = 5y_1 + 8y_2 + 13y_3 + 22y_4$$
$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 1$$
$$y_i = \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 4$$

(iv) Modelleer een IP mbv binaire variabelen

$$x_j \in \mathbb{Z}_+$$

Welke waarde van ℓ hebben we nodig?

$$x_j = \sum_{i=0}^{\ell} 2^i y_{ij} \quad , \quad y_{ij} \in \{0,1\}$$

(zie p. 323)

Unimodulariteit

Definitie:
Een vierkante geheeltallige matrix B is unimodulair (UM) als $\det(B) = \pm 1$

Definitie:
Een geheeltallige matrix A is totaal unimodulair (TUM) als elke vierkante niet-singulaire deelmatrix van A UM is.

Gevolg: $a_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$!

Relatie TUM $\Leftrightarrow$ polyeder

Standaard vorm:

Laat $R_1(A) := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

Stelling 13.1 A TUM $\Rightarrow$ Alle hoekpunten van $R_1(A)$ geheeltallig voor iedere geheeltallige vector b.

$\Leftarrow$ niet waar! zie werkcollege

Kanonieke vorm:

Laat $R_2(A) := \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Stelling 13.2 A TUM $\Rightarrow$ Alle hoekpunten van $R_2(A)$ geheeltallig voor iedere geheeltallige vector b.

$\Leftarrow$ wel waar!

<u>Bewijs:</u> Laat zien dat $(A \ I)$ TUM is als A TUM is

toevoegen van slackvar.

Zie boek, p. 317.

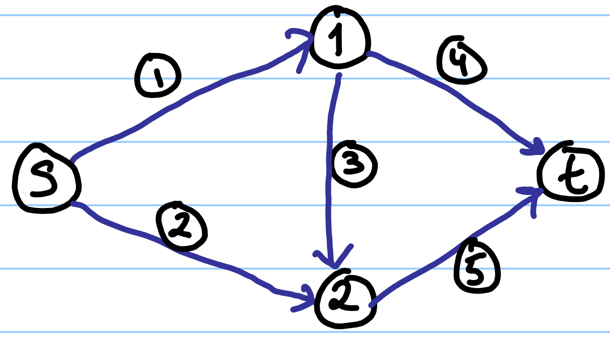
Mooie verklaring waarom kortste pad en max-flow problemen altijd geheeltallige oplossingen hebben zonder dat wij dat expliciet eisen:

Stelling 13.3 Een geheeltallige matrix A met $a_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$ is TUM als elke kolom maximaal 2 niet-nul elementen bevat en als de rijen van A kunnen worden gepartitioneerd in 2 verzamelingen I_1 & I_2 zdd:

1. Als een kolom 2 elementen van hetzelfde teken heeft, dan behoren de desbetreffende rijen tot verschillende verzamelingen.

2. Als een kolom 2 elementen van verschillende tekens heeft, dan behoren de desbetreffende rijen tot dezelfde verzameling.

Voor kortste pad en max flow gebruiken we A: node-arc incidence matrix.



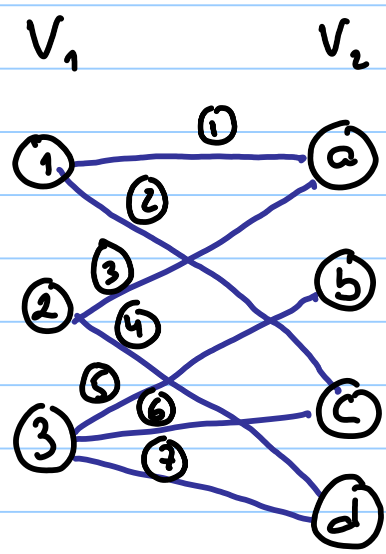
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2 niet-nul elementen in elke kolom.

Voldoet aan stelling; $I_2 = \emptyset$

Neem ongerichte bipartite graaf $G = ((V_1, V_2), E)$

A: node-edge incidence matrix



$$
A = \begin{array}{c}
\\ \\ I_1 \\ \\ \\ I_2 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ a \\ b \\ c \\ d
\end{array}
$$

Voldoet aan stelling; $I_1 = V_1$, $I_2 = V_2$

Zie ook Corollary, p. 318.