Optimalisering/Besliskunde 1

College 6

11 oktober, 2012

Van vorige keer: Het korste pad probleem en dualiteit

Probleem: Gegeven een gerichte graaf $G = (V, \mathcal{A})$ en de lengte c_j van pijlen $j \in \mathcal{A}$, bepaal het kortste pad van punt $s \in V$ naar punt $t \in V$.

(P): min $\sum_{j \in \mathcal{A}} c_j f_j$

odv $Af = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ als $i = s$; als $i \neq s, i \neq t$; als $i = t$ $\quad \pi_i$

node-arc incidence matrix

$f \geq 0$

(D):

max $\pi_s - \pi_t$

odv $\pi^T A \leq c$

$\pi \gtrless 0$

Een duale voorw:

$\pi_k - \pi_l \leq c_{(k,l)} \quad (k,l) \in \mathcal{A}$

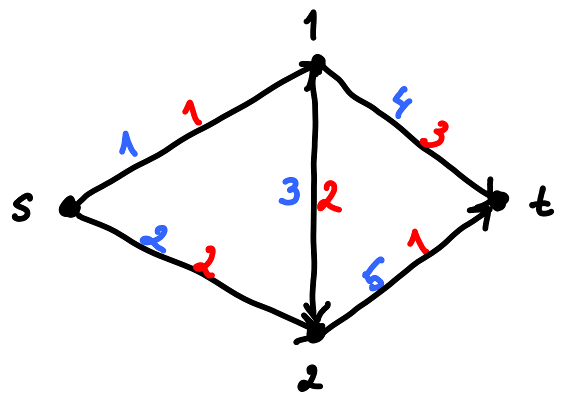
$\max \quad \pi_s - \pi_t$

$\text{Odlv} \quad \pi_k - \pi_l \leq c_{(k,l)} \quad (k,l) \in A$

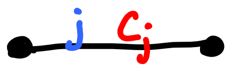
$\pi \gtrless 0$

Het gaat om het verschil tussen π_s en π_t . NB! We kunnen de waarde van een duale variabele *vrij kiezen* vanwege de lineaire afhankelijkheid van de primale voorwaarden!

Voorbeeld:



Notatie:



$$
\begin{array}{llr}
\min & z = 1f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 1f_5 & \\
\text{odv} & f_1 + f_2 = 1 & (s) \\
& -f_1 + f_3 + f_4 = 0 & (1) \\
& -f_2 - f_3 + f_5 = 0 & (2) \\
& -f_4 - f_5 = -1 & (t) \\
& f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & w = \pi_s - \pi_t \\
\text{odv} & \pi_s - \pi_1 \leq 1 \\
& \boxed{\pi_s - \pi_2 \leq 2} \\
& \pi_1 - \pi_2 \leq 2 \\
& \pi_1 - \pi_t \leq 3 \\
& \boxed{\pi_2 - \pi_t \leq 1} \\
& \pi_j \gtrless 0 \quad j = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

$$
f^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{lengte } z^* = 3
$$

Complementary slackness:

$$\pi_s - \pi_2 = 2$$

$$\pi_2 - \pi_t = 1$$

Complementary slackness:

$$\max \; w = \pi_s - \pi_t$$
odv
$$\begin{array}{rcl} \pi_s - \pi_1 & \leq & 1 \\ \boxed{\pi_s - \pi_2} & \leq & 2 \\ \pi_1 - \pi_2 & \leq & 2 \\ \pi_1 - \pi_t & \leq & 3 \\ \boxed{\pi_2 - \pi_t} & \leq & 1 \\ \pi_j \gtrless 0 & & j = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

$$\pi_s - \pi_2 = 2$$
$$\pi_2 - \pi_t = 1$$

Vorige keer kozen we: $\pi_t = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_s - \pi_2 = 2 \\ \pi_2 - \underbrace{\pi_t}_{=0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\pi_s^* = 3$$
$$\pi_2^* = 1$$
$$\pi_t^* = 0$$
$$w^* = \pi_s - \pi_t = 3$$

Maar, we hadden ook kunnen kiezen: $\pi_s = 0$!

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\pi_s}^{=0} - \pi_2 = 2 \\ \pi_2 - \pi_t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\pi_s^* = 0$$
$$\pi_2 = -2$$
$$\pi_t = -3$$

$$w^* = \pi_s - \pi_t = 3$$