Optimalisering/BK1, College 6

Note Title 10-10-2012

Zie ook file "college6ppt.pdf" voor aansluiting met college 5.

LP-formulering kortste pad probleem:

(P): $\min \sum_{j \in A} c_j f_j$

odv $Af = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \text{als } i = s \\ \text{als } i \neq s,\ i \neq t \\ \\ \text{als } i = t \end{array}$ π_i

node-arc incidence matrix

Duale var.

$f \geq 0$

(D):

$\max \ \pi_s - \pi_t$

odv

$\pi_k - \pi_l \leq c_{(k,l)}, \quad (k,l) \in A$

$\pi_i \gtrless 0, \quad i \in V$

Complementary slackness:

$f_{(k,l)} > 0 \Rightarrow \pi_k - \pi_l = c_{(k,l)}$

$\pi_k - \pi_l < c_{(k,l)} \Rightarrow f_{(k,l)} = 0$

Dijkstra's algoritme

Veronderstel: $c_{(i,j)} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$.
Bepaal, vanaf punt $s \in V$, toegelaten waarden v/d duale var.
Complementary slackness wordt impliciet gebruikt.

Laat:

$W \subseteq V$ een deelverz. v/d punten die een duale variabelwaarde hebben gekregen

$p(x)$ = kortste lengte van een pad van s naar x gebruik makend alleen van punten in W

Algoritme

Input: $G=(V,A)$, $c_{(i,j)} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A$
$s, t \in V$

Output: Een kortste pad van s naar t

Initialisering: $W = \{s\}$, $p(s) = 0$

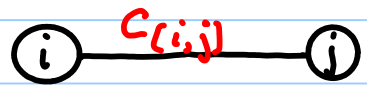
begin
  zet $p(i) := c_{(s,i)} \quad \forall i \in V \setminus \{s\}$
  while $W \neq V$ {
    bepaal $p(x) := \min\{p(i) \mid i \notin W\}$
    zet $W := W \cup \{x\}$
    zet $p(i) := \min\{p(i), p(x) + c_{(x,i)}\} \; \forall j \notin W$
  }
end

"Boekhouding": Geef punten j zogenaamde "labels":

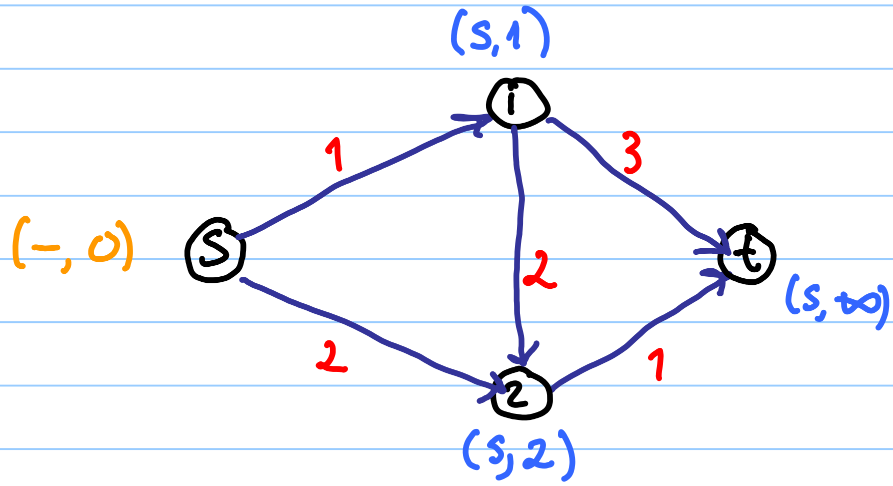
$(i, p(j))$

waar we vandaan komen

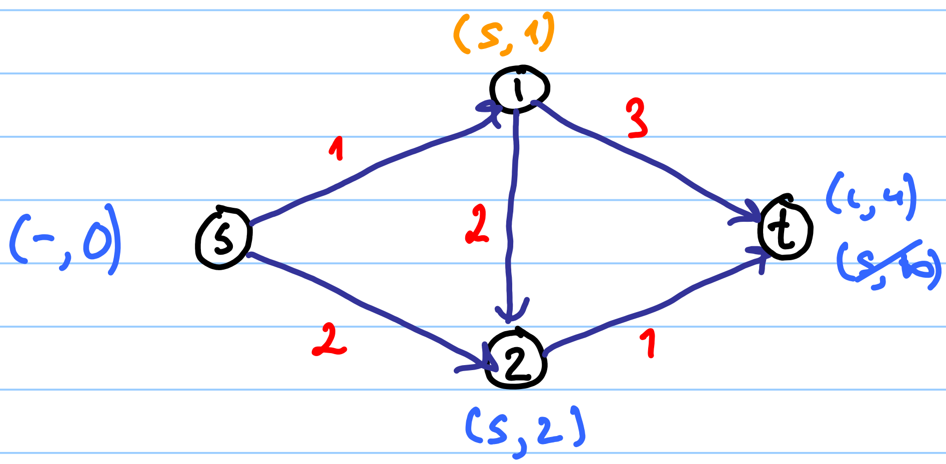
Klein voorbeeldje weer:



W = {s}

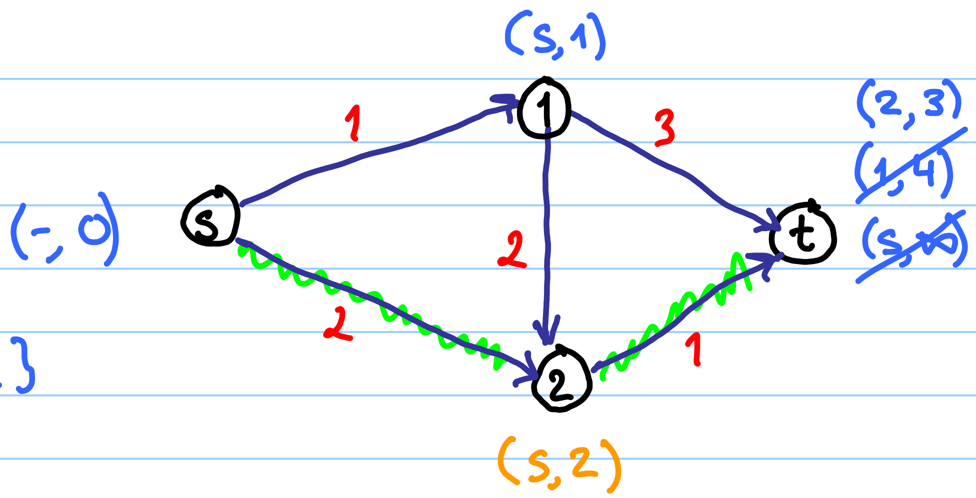


Iter. 1



W = {s, 1}

Iter. 2



$W := \{s,1,2\}$

Iter. 3

$W = V$, stop

Kortste pad: $P = \big((s,2),(2,t)\big)$ lengte $= 3$

We kunnen $p(i)$ $i \in V$ interpreteren als $p(i) = -\pi_i$

Duale voorwaarden: $\pi_k - \pi_l \leq c_{(k,l)}$ $(k,l) \in A$

Als $\pi_k - \pi_l = c_{(k,l)}$, dan mag $f_{(k,l)} > 0$

Hier:

$$\pi = -p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Pijl	Duale voorw.	Slack in duale voorw.
$(0,1)$	$\underbrace{\pi_0 - \pi_1}_{0-(-1)=1} \leq 1$	0
$(0,2)$	$\underbrace{\pi_0 - \pi_2}_{0-(-2)=2} \leq 2$	0

$(1,2)$ $\quad \underbrace{\pi_1 - \pi_2}_{-1-(-2)=1} \leq 2 \qquad 1$

$(1,t)$ $\quad \underbrace{\pi_1 - \pi_t}_{-1-(-3)=2} \leq 3 \qquad 1$

$(2,t)$ $\quad \underbrace{\pi_2 - \pi_t}_{-2-(-3)=1} \leq 1 \qquad 0$

Max flow, min cut

Het max flow probleem:

capaciteit op de pijlen

Gegeven een netwerk $N = (s, t, V, A, b)$, bepaal maximale stroom (flow) van s naar t.

Beslissingsvariabelen:

$f_{(i,j)}$ = stroom (flow) op pijl $(i,j) \in A$
v = totale stroom van s naar t

(P) $\max v$
odv

variabele

$$Af = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot v \qquad \begin{array}{l} \text{als } i = s \\ \text{als } i \neq s, i \neq t \\ \\ \text{als } i = t \end{array}$$

$0 \leq f \leq b, \; v \geq 0$

Herschrijf:

max v

odv

$Af + d \cdot v = 0$ $\quad \pi_i$

$f \leq b$ $\quad \gamma_{(i,j)}$

$f \geq 0$

$v \geq 0$

waarbij:

$$d = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{als } i = s \\ \text{als } i \neq s,\ i \neq t \\ \\ \text{als } i = t \end{array}$$

(D):

$$\min \sum_{(i,j)\in A} b_{(i,j)} \gamma_{(i,j)}$$

odv

$$\pi_i - \pi_j + \gamma_{(i,j)} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \qquad f_{(i,j)}$$

$$-\pi_s + \pi_t \geq 1 \qquad v$$

$$\pi_i \gtrless 0 \quad \forall i \in V$$

$$\gamma_{(i,j)} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

<u>Definitie</u>: Een s-t snede in N is een partitie $(W, V \setminus W)$ v/d punten zdd $s \in W$, en $t \in \underbrace{V \setminus W}_{\bar{W}}$

De capaciteit v/d snede $(W, \bar{W})$ is

$$C(W, \bar{W}) := \sum_{\{(i,j) \mid i \in W,\ j \in \bar{W}\}} b_{(i,j)}$$

capaciteit van de pijlen die voorwaarts over de snede gaan.

Stelling 6.1 Elke s-t snede $(W, \overline{W})$ bepaalt een toegelaten oplossing voor (D) met doelfunctiewaarde $C(W, \overline{W})$.

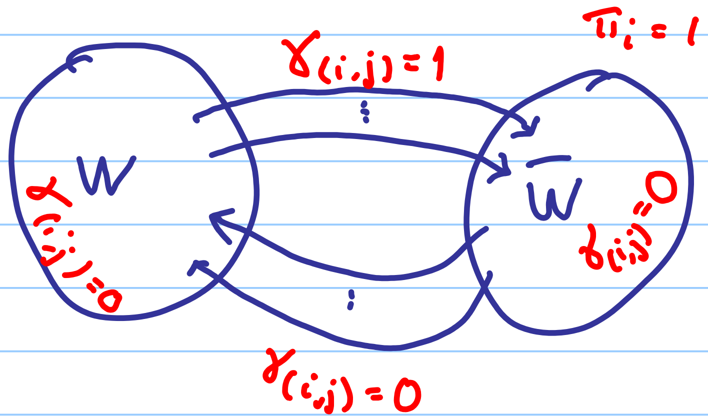
Bewijs: Zet : $\pi_i = 1 \quad \forall\, i \in \overline{W}$

$\pi_i = 0 \quad \forall\, i \in W$

$(\Rightarrow \pi_s = 0,\ \pi_t = 1)$

$$\gamma_{(i,j)} = 1 \quad \forall\, \underbrace{(i,j) \in A \text{ zdd } i \in W,\ j \in \overline{W}}_{\text{de "voorwaartse" pijlen}}$$

$\gamma_{(i,j)} = 0 \quad \forall$ overige $(i,j) \in A$



Deze opl. is duaal toegl. en heeft waarde $C(W, \overline{W})$

$$\underbrace{\pi_i - \pi_j + \gamma_{(i,j)}}_{LK} \geq 0 \quad \forall\, (i,j) \in A \ :$$

(a) $i \in W, j \in W$: $\quad LK = 0 - 0 - 0 = 0$

(b) $i \in \overline{W}, j \in \overline{W}$: $\quad LK = 1 - 1 - 0 = 0$

(c) $i \in \overline{W}, j \in W$ $\quad LK = 1 - 0 - 0 = 1 > 0$!

(d) $i \in W, j \in \overline{W}$ $\quad LK = 0 - 1 + 1 = 0$

$$\underbrace{-\pi_s + \pi_t}_{0 + 1 = 1} \geq 1 :$$

$$\text{Doelfunctiewaarde} = \sum_{\{(i,j) \mid i \in W,\ j \in \bar{W}\}} b_{(i,j)} =: C(W, \bar{W})$$

$\blacksquare$

Stelling 6.2 ("Max flow / min cut" stelling)

(i) De capaciteit $C(W, \bar{W})$ van een willekeurige s-t snede $\geq$ waarde van toegelaten stroom van s naar t

(ii)
$$\max_{v \text{ toegel.}} v = \min_{(W,\bar{W}) \text{ s-t snede}} C(W, \bar{W})$$

(iii) een stroomvector f en een s-t snede $(W, \bar{W})$ zijn optimaal $\Leftrightarrow$

$$f_{(i,j)} = 0 \quad \forall (i,j) \in A : i \in \bar{W},\ j \in W$$
[achterwaartse pijlen]

$$f_{(i,j)} = b_{(i,j)} \quad \forall (i,j) \in A : i \in W,\ j \in \bar{W}$$
[voorwaartse pijlen]

Bewijs:

(i) : Uit Stelling 6.1 + zwakke dualiteit

(ii) : -"- sterke dualiteit

(iii) : Complementar slackness

* Alleen in geval (c) van bewijs Stelling 6.1 is er duale slack $\Rightarrow$

$$f_{(i,j)} = 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} : i \in \overline{W},\ j \in W$$

* $\gamma_{(i,j)} = 1 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} : i \in W,\ j \in \overline{W}$

$$\Rightarrow f_{(i,j)} = b_{(i,j)} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} : i \in W,\ j \in \overline{W}$$

$\blacksquare$

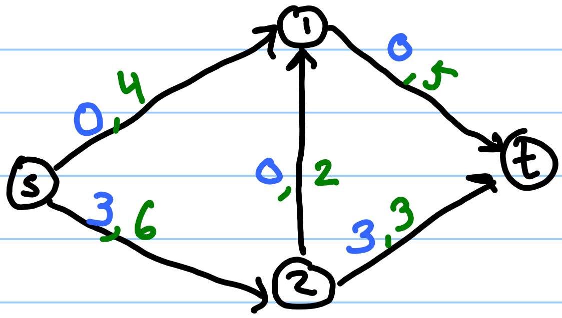
Het Ford-Fulkerson algoritme voor Max Flow

Notatie: $\quad i \xrightarrow{f_{(i,j)},\ b_{(i,j)}} j$

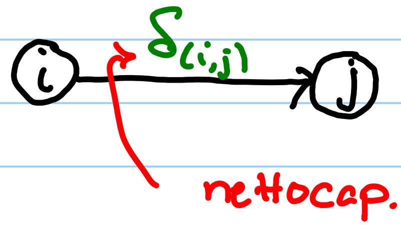
In elke iter. van het FF algoritme werken we in een zogenaamd "residueel-netwerk" waar we nettocapaciteiten op de pijlen gebruiken.

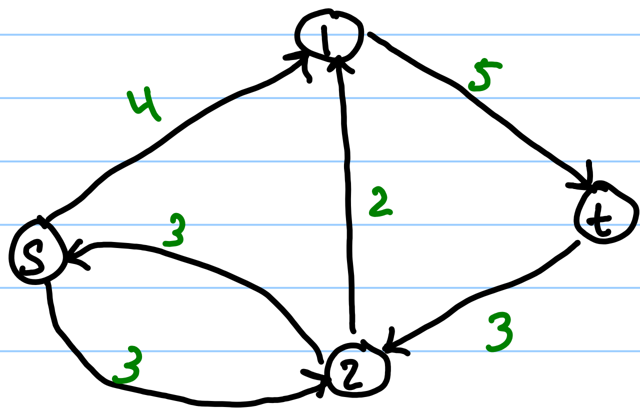
In de eerste iteratie is het residueel netw. gelijk aan het oorspronkelijke netwerk.

Stel, we hebben na één iter. de volgende stroom:



Dan is het bijbehorende residuaalnetwerk als volgt :





$\delta_{(i,j)} := b_{(i,j)} - f_{(i,j)}$ (op voorwaartse pijl)

$\delta_{(j,i)} := f_{(i,j)}$ (op achterwaartse pijl)

=> In het residuaal netwerk wordt elke pijl (i,j) vervangen door 2 pijlen

Pijlen (i,j) met $\delta_{(i,j)} = 0$ tekenen we niet.

"High-level" beschrijving van FF

0) $v := 0$

1) Bepaal in het residuaalnetwerk een pad met positieve capaciteit δ. $v := v + \delta$
Als geen pad gevonden kan worden, stop. (Nu kunnen we wel een s-t snede vinden!) Anders, ga naar 2).

2) Stuur max stroom, volgens de capaciteit, langs het gevonden pad.
Ga naar 1.

In stap 1) werken we weer met "labels" op de punten j (cf. kortste pad)

$$(L_1, L_2) := (i, \underbrace{\text{capaciteit op het pad van s naar j}}_{L_2})$$

waar we vandaan komen

$$L_2 = \min\{L_2(i), \delta_{(i,j)}\}$$

In het begin van elke stap 1) hebben we voor punt s:

$$(-, \infty)$$

Als we in punt $i \in V$ staan en alle punten die bereikbaar zijn vanuit i gaan labellen, dan zeggen we dat wij punt i scannen.
Wij houden een LIJST bij van punten met een label die nog niet gescanned zijn.

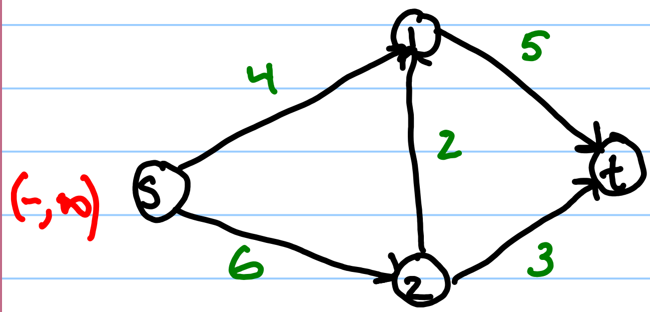
In het begin van elke stap 1):
LIJST := {s}

We stellen alleen een label van punt i bij als $L_2(i)$ dan groter wordt.

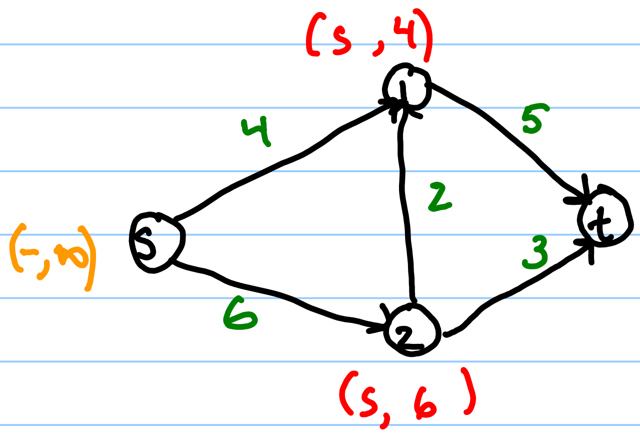
De preciese alg.-beschrijving staat op blz 123. Hier leg ik het uit aan de hand van een voorbeeld.

$V := 0$

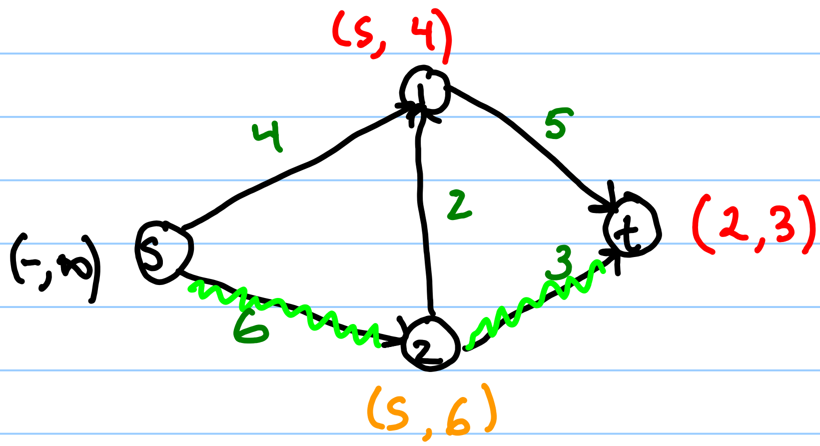
Hoofditeratie 1:



LIJST := {s}
Iter 1:
scan s



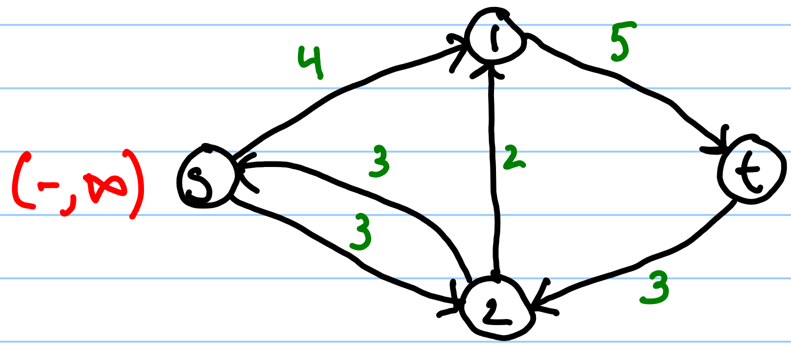
LIJST := {1,2}
Iter 2:
scan 2



LIJST := {1,t}
Stop, t heeft een label

Stuur nu stroom 3 langs pad
$P_1 = ((s,2), (2,t))$ $\delta(P_1) = 3$

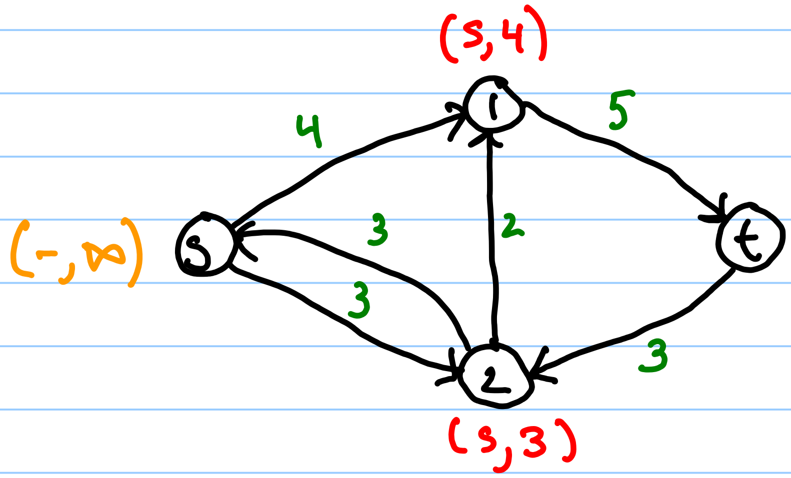
Hoofditeratie 2: $v := 3$



LIJST := {s}

Iter 1:

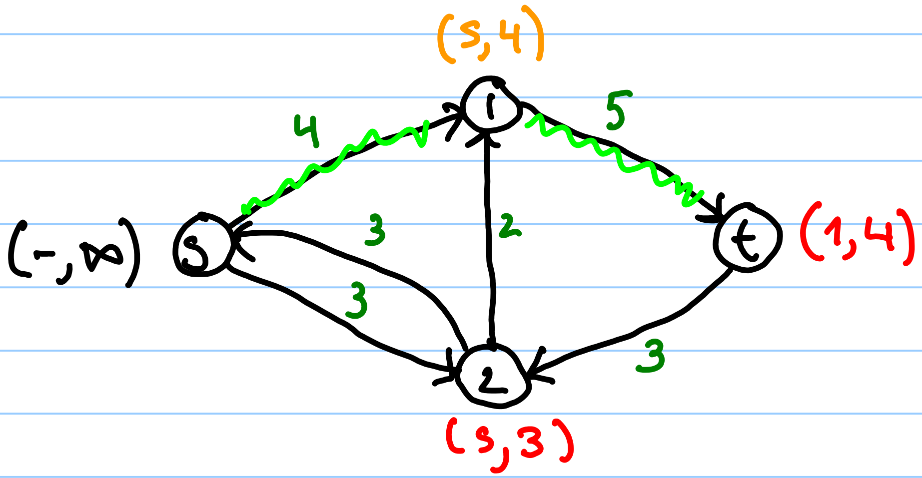
scan s



LIJST := {1, 2}

Iter 2:

scan 1



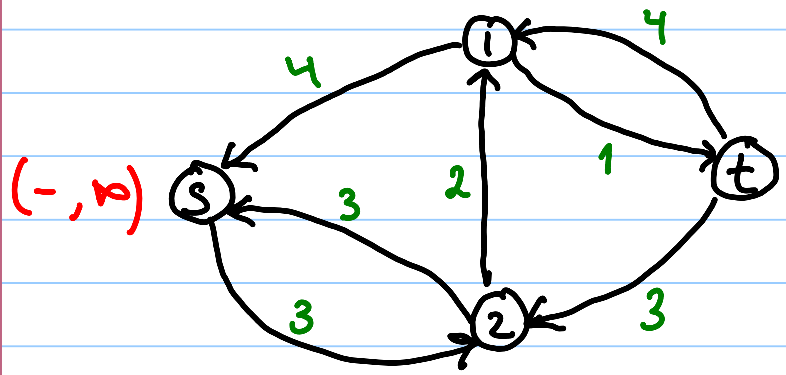
LIJST := {2, t}

Iter 3:

stop, t heeft een label.

Stuur nu stroom 4 langs pad $P_2 = ((s,1), (1,t))$
$\delta(P_2) = 4$

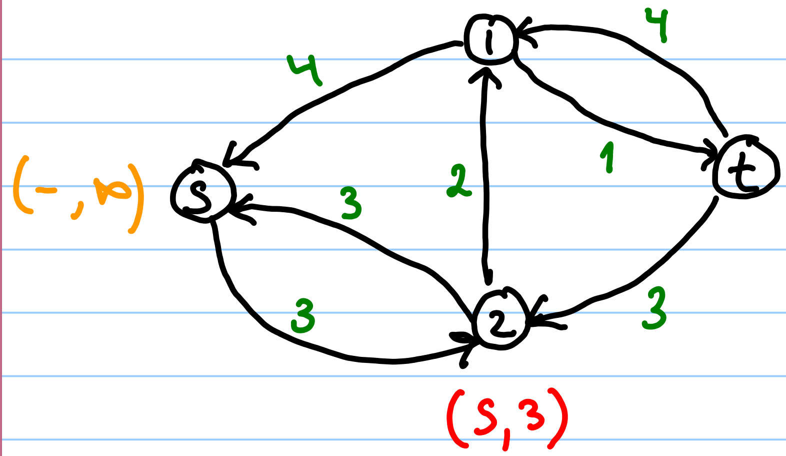
Hoofditeratie 3: $v := 3 + 4 = 7$



LIJST := {s}

Iter. 1:

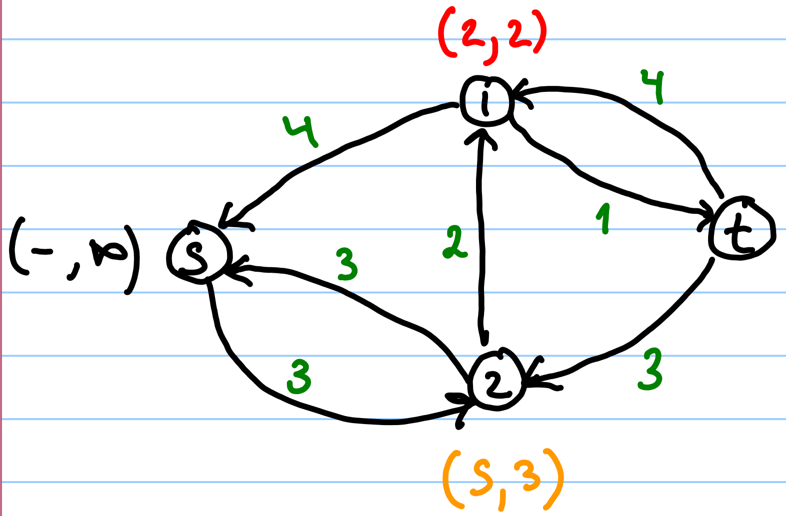
scan s



LIJST := {2}

Iter 2:

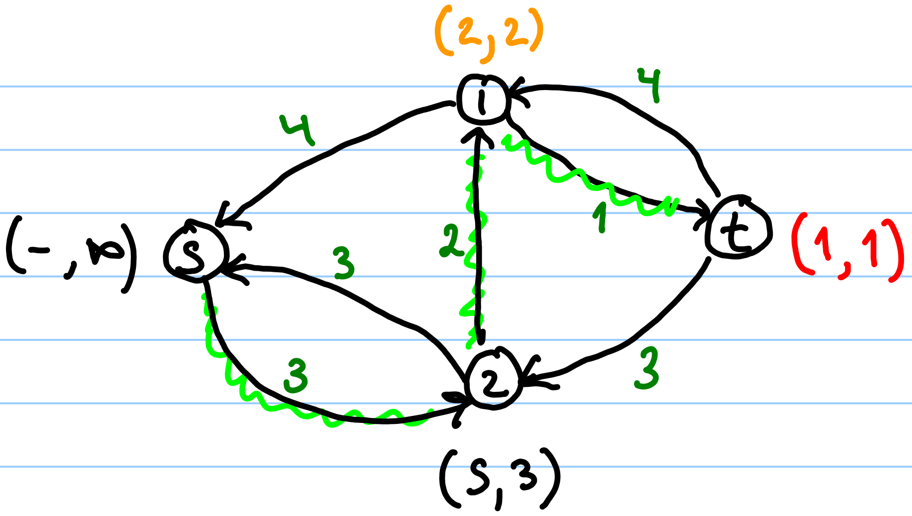
scan 2



LIJST := {1}

Iter 3

scan 1



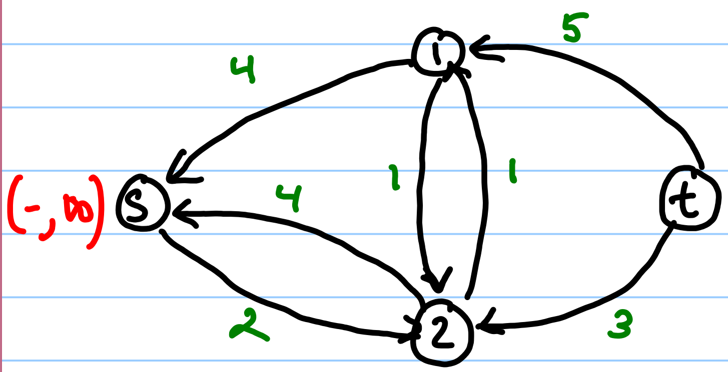
LIJST:={t}

<u>Iter 4:</u>

stop, t heeft een label

Stuur nu stroom 1 langs pad
$P_3 = ((s,2),(2,1),(1,t))$ $\quad \delta(P_3) = 1$

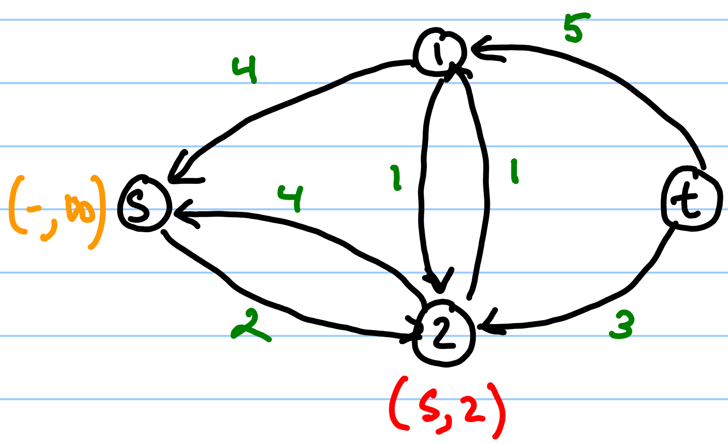
<u>Hoofditeratie 4:</u> $v := 7+1 = 8$



LIJST:= {s}

<u>Iter. 1:</u>

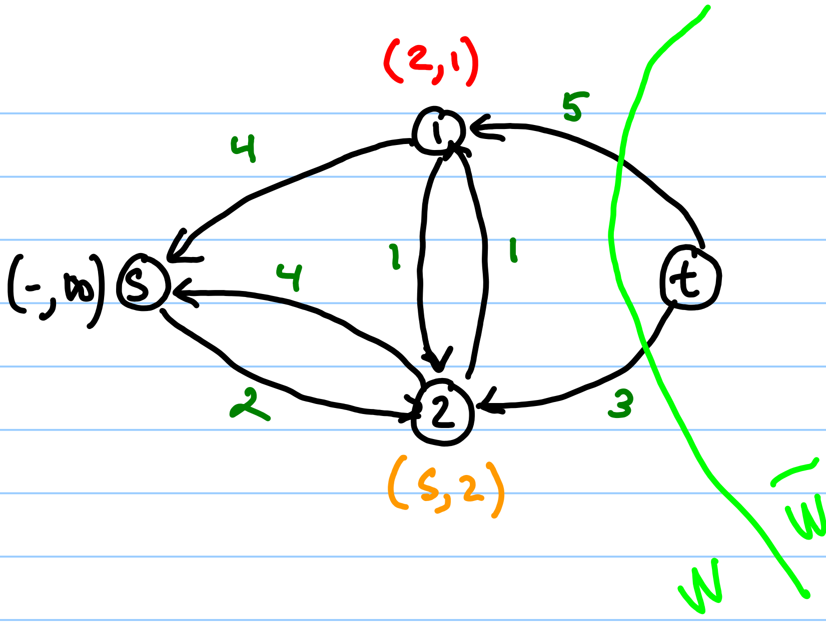
scan s



LIJST:={2}

<u>Iter 2:</u>

scan 2



LIJST := {1}

Iter 3:

scan 1

LIJST := ∅

stop!

We kunnen t niet meer labellen. Dit geeft ons een s-t snede $(W, \bar{W})$

W = verz. gelabelde punten $\{s, 1, 2\}$

$\bar{W} = V \setminus W = \{t\}$.

$$C(W, \bar{W}) = b_{(1,t)} + b_{(2,t)} = 5 + 3 = 8$$

= max flow!

Max flow = 8. Flow langs de volgende paden:

$P_1 = ((s,2), (2,t))$, flow 3

$P_2 = ((s,1), (1,t))$, flow 4

$P_3 = ((s,2), (2,1), (1,t))$ flow 1

8