Note Title 2-10-2012

Optimalisering / BK1, College 5

Complementary slackness

De "complementary slacknessvoorwaarden" zijn noodzakelijke en voldoende voorw. voor optimaliteit!

In deze presentatie gaan we van het volgende primaal-duaal paar problemen uit:

$$(P)\quad \min\ z = c^T x \quad \text{odv} \quad Ax \geq b,\quad x \geq 0 \qquad\qquad (D)\quad \max\ w = b^T \pi \quad \text{odv} \quad \pi^T A \leq c^T,\quad \pi \geq 0$$

Hoe kunnen we deze voorwaarden gebruiken?
Als we een optimale oplossing van (P) (of (D)) kennen, kunnen we de oplossing van (D) (of (P)) bepalen

dus niet alleen de waarde v/d doelfunctie, maar de oplossingsvector zelf

Stelling 3.4: (De Complementary slackness stelling) Een primaal-duaal paar (x, π) is optimaal d.e.s.d.a

$$\pi_i (a_i x - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \quad (1)$$

$$x_j (c_j - \pi^T A_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad (2)$$

<u>Bewijs</u>: Eerst, merk op dat

$a_i x - b_i \geq 0$, is de surplus in de primale voorwaarde i,

$c_j - \pi^T A_j \geq 0$ is de slack in de duale voorwaarde j.

Schrijf:

$$u_i := \overbrace{\pi_i}^{\geq 0} \overbrace{(a_i x - b_i)}^{\geq 0} = \pi_i (a_i x) - \pi_i b_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$v_j := \overbrace{x_j}^{\geq 0} \overbrace{(c_j - \pi^T A_j)}^{\geq 0} = x_j c_j - x_j (\pi^T A_j) \geq 0 \quad \forall j$$

$$u := \sum_{i=1}^{m} u_i \geq 0, \qquad v := \sum_{j=1}^{n} v_j \geq 0$$

Omdat $u_i \geq 0 \ \forall i$ en $v_j \geq 0 \ \forall j$ geldt $u = 0 \ (v = 0) \iff u_i = 0 \ \forall i \ (v_j = 0 \ \forall j)$

Beschouw

$$u + v = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left[\pi_i (a_i x) - \pi_i b_i \right]}_{u_i} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[x_j c_j - x_j (\pi^T A_j) \right]}_{v_j} =$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \pi_i b_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \pi_i (a_i x)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j (\pi^T A_j)} + \sum_{j=1}^{n} x_j c_j$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{z(x)} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i}_{w(\pi)}$$

$\Rightarrow$ (1) en (2) gelden $\forall i$ en $\forall j$ d.e.s.d.a

$u + v = 0$ oftewel $z(x) = w(\pi)$

noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor (x, π) optimaal (sterke dualiteitsstelling)

$\blacksquare$

Voorbeeld:

(P):

max $z = 2x_1 + x_2$

odv
$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -3x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(D)

min $w = 6\pi_1 + 7\pi_2 + 10\pi_3$

odv
$$\begin{aligned} 12\pi_1 - 3\pi_2 &\geq 2 \\ 3\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w^* = 2$$

Bepaal nu de optimale primale oplossing mbv complementary slacknessvoorwaarden:

$$\underset{>0}{\pi_1}\left(6-12x_1-3x_2\right)=0 \Rightarrow 6-12x_1-3x_2=0$$

oftewel: $12x_1+3x_2=6$ (*)
(primale voorw. voldoet met gelijkheid

Vul duale opl. in de duale voorwaarden:

$$12\cdot\frac{1}{3}-3\cdot 0=4>2$$ ← surplus in deze voorw.

$$3\cdot\frac{1}{3}-1\cdot 0+1\cdot 0=1$$

$$x_1\underbrace{\left(12\pi_1-3\pi_2-2\right)}_{>0}=0 \Rightarrow x_1=0$$

Gebruik $x_1=0$ in (*): $12x+3x_2=6$

$$\Rightarrow x_2=2$$

$$\Rightarrow x^*=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \quad z^*=2$$

Een andere toepassing van dualiteit:

Karakteriseren van toelaatbaarheid. Dit is beschreven in:

Farkas' Lemma: (Eén van vele varianten)

Precies één van de volgende gevallen geldt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0,\ \pi^T b < 0\} \neq \emptyset.$$

Bewijs: Gebruik dualiteit

vector met nullen

$$\text{(P)} \quad z^* = \max\ z = 0^T x \quad \text{odv} \quad Ax = b,\ x \geq 0$$

$$\text{(D)} \quad w^* = \min\ \pi^T b \quad \text{odv} \quad \pi^T A \geq 0,\ \pi \gtrless 0$$

$\pi = 0$ is toegel. in (D)

Twee mogelijkheden:

(i) w^* begrensd

$\Rightarrow$ (P) begrensd, toegelaten

$z = 0$ voor alle toegel. x $\Rightarrow$ $z^* = 0$

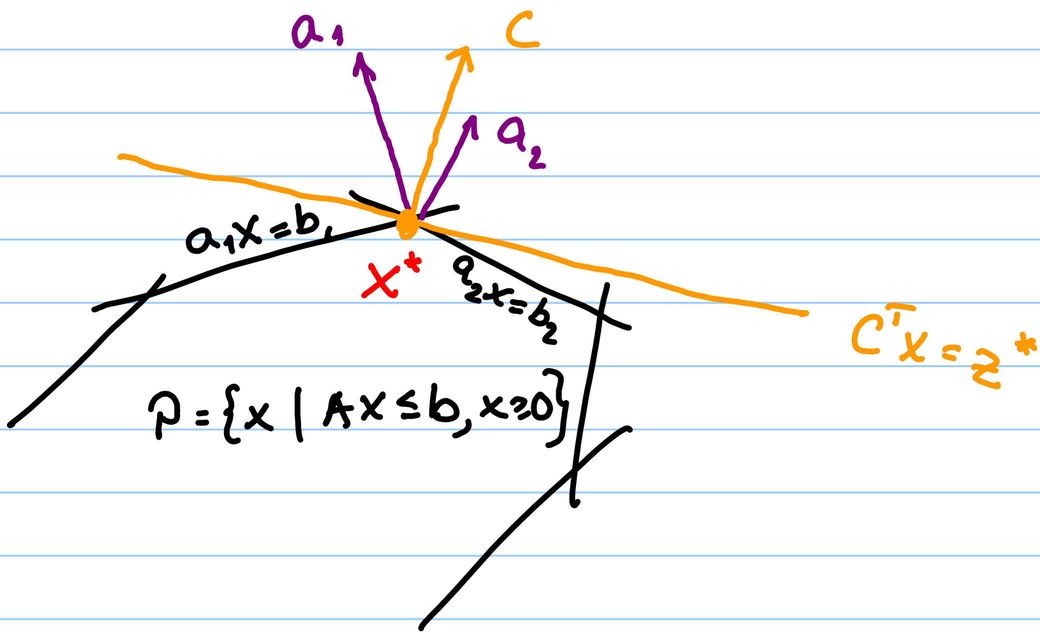
$\Rightarrow$ $w^* = 0$ vanwege sterke dualiteit

Dit kan alleen als $\pi^T b \geq 0$ $\forall$ π die voldoen aan $\pi^T A \geq 0$

(ii) $w^* = -\infty$ $\Rightarrow$ (P) niet toegelaten $\blacksquare$

Voor de meetkundige denker:

(P): $\max\ z = c^T x$ odv $Ax \leq b$ (D) $\min\ w = \pi^T b$ odv $\pi^T A = c^T$, $\pi \geq 0$



$c^T x = z^*$ is een niet-negatieve lineaire combinatie van $a_1 x = b_1$, $a_2 x = b_2$,

Iha: $c^T x = z^*$ is een niet-negatieve lineaire combinatie van $a_i x = b_i$ $i = 1, \dots, m$

$$c = \bar{\pi}_1 a_1 + \dots + \bar{\pi}_m a_m \qquad \bar{\pi}_i \geq 0 \ \forall i$$

$$z^* = \bar{\pi}_1 b_1 + \dots + \bar{\pi}_m b_m$$

$$\Rightarrow \max\ c^T x = z^* = \sum_{i=1}^{m} \bar{\pi}_i b_i \geq \min\ \pi^T b$$

odv $Ax \leq b$ odv $\pi^T A = c^T$, $\pi \geq 0$

Verder geldt :

$c^T x = \pi^T A x \leq \pi^T b$

duale voorw. · x

$\Rightarrow$ In optimum geldt $z^* = c^T x = \pi^T b$

Geometrische interpretatie van complementary slackness:

Als $a_i x^* < b_i$ voor een constraint, dan moet de bijbehorende $\pi_i^* = 0$, want de minimale waarde is nul.

Het kortste pad probleem en dualiteit

Probleem: Gegeven een gerichte graaf $G = (V, A)$ en de lengte c_j van pijlen $j \in A$, bepaal het kortste pad van punt $s \in V$ naar punt $t \in V$.

Formuleer als LP samen met duale

Van werkcollege 1 :

Voorwaardematrix A ("node-arc incidence matrix") $[A_{ij}]$ een rij voor elk punt, een kolom voor elke pijl

$$A_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{als pijl } j \text{ punt } i \text{ verlaat} \\ -1 & \text{'' '' } j \text{ '' } i \text{ aankomt} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Beslissingsvariabelen:

f_j = "flow" op pijl j

LP: (primale)

$$\min \sum_{j \in A} c_j f_j$$

$$\text{odv} \qquad Af = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{als } i = s \\ \text{als } i \neq s,\ i \neq t \\ \\ \\ \text{als } i = t \end{array}$$

$$f \geq 0$$

Observatie 1: De optimale oplossingen van dit LP-probleem zijn geheeltallig.

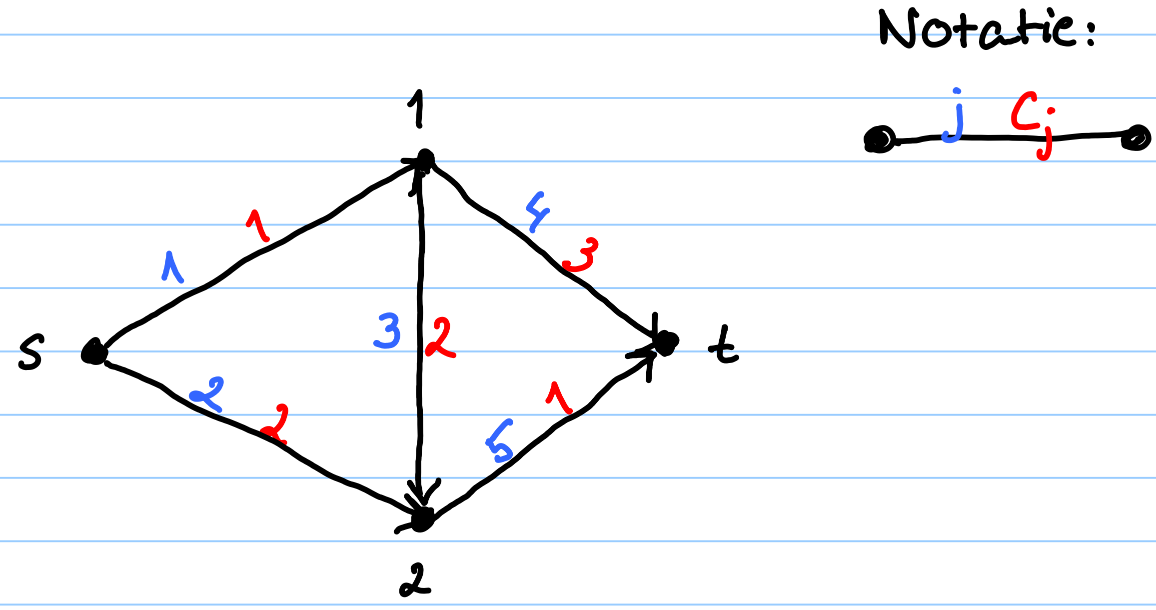
Observatie 2: Eén van de gelijkheidsvoorw. is redundant (de gelijkheidsvoorw. zijn lineair afhankelijk). "Schrap" een willekeurig gekozen voorwaarde, bv de voorw. voor punt t.
($\Rightarrow$ we kunnen waarde v/d bijbehorende duale variabele kiezen)

Duale:

$$\max \quad \pi_s - \pi_t$$
$$\text{Odv} \quad \pi^T A \leq c \qquad [\pi_k - \pi_l \leq c_{(k,l)} \quad (k,l) \in A]$$
$$\pi \gtrless 0$$

Voorbeeld

Notatie:



$$\min z = 1f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 1f_5$$

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Odv} & f_1 & + f_2 & & & & = 1 & (s) \quad \pi_s \\
& -f_1 & & + f_3 & + f_4 & & = 0 & (1) \quad \pi_1 \\
& & -f_2 & - f_3 & & + f_5 & = 0 & (2) \quad \pi_2 \\
{[} & & & & -f_4 & - f_5 & = -1 & (t)] \quad \pi_t := 0
\end{array}$$

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \geq 0$$

Duale:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & w = \pi_s & & - \pi_t & & \\
\text{odv} & \pi_s - \pi_1 & & & \leq 1 & \\
& \pi_s & - \pi_2 & & \leq 2 & f_2 \\
& \pi_1 & - \pi_2 & & \leq 2 & \\
& \pi_1 & & - \pi_t & \leq 3 & \\
& & \pi_2 & - \pi_t & \leq 1 & f_5 \\
& \pi_j \gtrless 0 & j = 1, \ldots, 5 & & &
\end{array}
$$

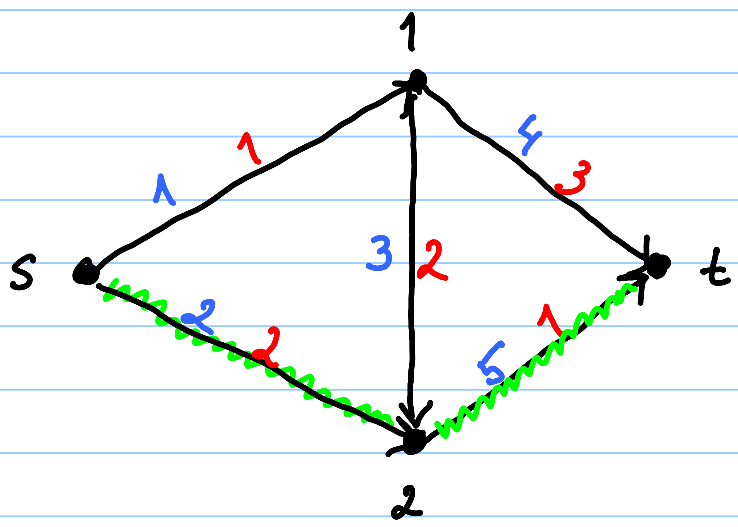
Complementary slackness:

$$f_{(k,l)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_k - \pi_l = c_{(k,l)}$$

$$\pi_k - \pi_l < c_{(k,l)} \quad \Rightarrow \quad f_{(k,l)} = 0$$

Hier: Kortste pad: $p = (\underbrace{(s,2)}_{\text{pijl } 2}, \underbrace{(2,t)}_{\text{pijl } 5})$

$$\Rightarrow f^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{lengte } z^* = 3$$



$f_2 = f_{(s,2)} > 0$

$\Rightarrow \pi_s - \pi_2 = 2$

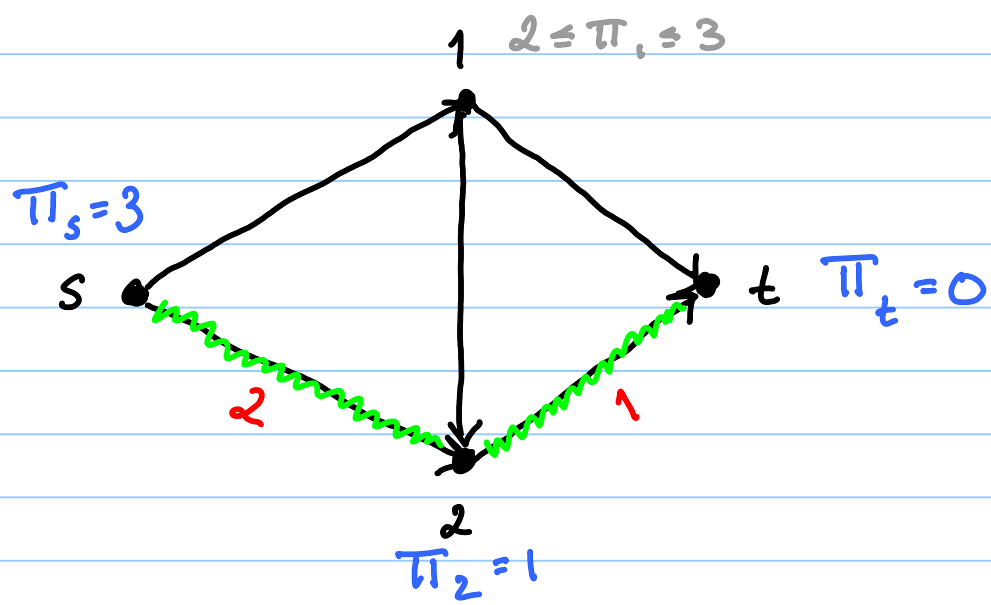
$f_5 = f_{(2,t)} > 0$

$\Rightarrow \pi_2 - \pi_t = 1$

De waarde van π_t mag vrij gekozen worden, kies bv $\pi_t = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_s - \pi_2 = 2 \\ \pi_2 - \underbrace{\pi_t}_{=0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \pi_2^* = 1, \quad \pi_s^* = 3$$

$$w^* = 3$$



Duale simplex algoritme

Het primaal-duale paar weer:

(P) min $z = c^T x$
odv $Ax \geq b$
$x \geq 0$

(D) max $w = b^T \pi$
odv $\pi^T A \leq c^T$
$\pi \geq 0$

De uitdrukking voor de relatieve kosten $\bar{c}_j$:

$$\bar{c}_j := c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

In optimum (voor (P)) geldt : $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$

$$\Rightarrow \quad c_j \geq \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\pi^T} A_j$$

$$\Rightarrow \quad \pi^T A_j \leq c_j$$ duale voorw. !

"Primale" simplex :

Ga van een bfs naar een volgende (niet slechter) bfs. Stop wanneer $\underbrace{\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j}$

"duaal toegelaten"

"Duale" simplex :

Ga van een duale bfs naar een volgende (niet slechter) bfs. Stop wanneer $\underbrace{\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i}$

"primaal toegelaten"

Duale simplexalgoritme

Initialiseren: basisopl., niet-noodzakelijk primaal toegel. met $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ (min probl.)
$\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$ (max probl.)

1. Kies uittredende var. $x_{B(i')}$ zdd

$$\bar{b}_{i'} = \min_i \{ \bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0 \}$$

Als $\bar{b}_i \geq 0 \ \forall i$, stop, huidige basis-opl. is toegel. en optimaal

2. Kies intredende var. $x_{j'}$ zdd

$$\frac{\bar{c}_{j'}}{\bar{a}_{i'j'}} = \min_j \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{i'j}} \right| \;\middle|\; \bar{a}_{i'j} < 0 \right\}$$

Als $\bar{a}_{i'j} \geq 0 \ \forall j$, dan heeft het probleem geen toegelaten oplossing, stop. Anders, voer pivot uit en ga naar 1.