Optimalisering / BK1, College 4

Note Title 25-9-2012

Dualiteit:

Bij elk LP-probleem hoort een zogenaamd duaal probleem ← ook een LP!

Oorspronkelijk (of "primaal") probleem:	Duaal probleem:
n variabelen	n voorwaarden
m voorwaarden	m variabelen

Dualiteit wordt gebruikt om optimum te verifiëren en om boven- (bij maxprobl.) en onder- (bij minprobl.) grenzen op de optimale doelfunctiewaarde te berekenen.

Het formuleren van een duaal probleem:

We starten met een LP in algemene vorm:

$$
\begin{array}{lllll}
\min & c^T x & & & \\
\text{odv} & a_i x & = & b_i & i \in M \\
 & a_i x & \geq & b_i & i \in \bar{M} \\
 & x_j & \geq & 0 & j \in N \\
 & x_j & \gtrless & 0 & j \in \bar{N}
\end{array}
$$

Schrijf nu het probleem in gelijkheidsvorm met niet-negatieve variabelen:

Voor voorwaarden $i \in \bar{M}$: $a_i x - s_i = b_i$

Voor variabelen $j \in \bar{N}$: $x_j = x_j^+ - x_j^-$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \min & \hat{c}^T \hat{x} \\ \text{odv} & \hat{A}\hat{x} = b \\ & \hat{x} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

waarbij

$$\hat{A} = \left[A_j,\ j \in N \;\middle|\; A_j, -A_j,\ j \in \bar{N} \;\middle|\; \begin{array}{cc} 0 & i \in M \\ \hline -I & i \in \bar{M} \end{array} \right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_j & j \in N \\ \begin{pmatrix} x_j^+ \\ x_j^- \end{pmatrix} & j \in \bar{N} \\ s_i & i \in \bar{M} \end{bmatrix} \qquad \hat{c} = \begin{bmatrix} c_j & j \in N \\ \begin{pmatrix} c_j \\ -c_j \end{pmatrix} & j \in \bar{N} \\ 0 & i \in \bar{M} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld:

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 - 7x_2 \\ \text{odv} & 2x_1 + 9x_2 = 13 \\ & 5x_1 - 3x_2 \geq -20 \\ & x_1 \lessgtr 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & 5x_1^+ - 5x_1^- - 7x_2 \\ \text{odv} & 2x_1^+ - 2x_1^- + 9x_2 = 13 \\ & 5x_1^+ - 5x_1^- - 3x_2 - s_2 = -20 \\ & x_1^+, x_1^- \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -5 & -3 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} i \in M \\ i \in \bar{M} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{j \in \bar{N}} & \underbrace{\quad}_{j \in N} \end{array} & \end{array}$$

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Herinner: Als x^* een begrensde optimale oplossing is, geldt (min probl.):

$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j.$ ← stelling vorige week

Uitdrukking voor $\bar{c}$ (de relatieve kosten)

$$\boxed{\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A}$$

(doel-functierij in optimum)

Hier:

Als (*) een begrensd optimum heeft, $\hat{x}^*$, dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ van kolommen van $\hat{A}$ $(\hat{A} = [\hat{B}\ \hat{N}])$ zdd

$$\bar{\hat{c}}^T := \hat{c}^T - \hat{c}_B^T \hat{B}^{-1} \hat{A} \geq 0$$

Herschrijf: $\hat{c}_B^T \hat{B}^{-1} \hat{A} \leq \hat{c}^T$ (**)

Laat $\pi \in \mathbb{R}^m$ de duale variabelen zijn

De keuze: $\pi^T = \hat{c}_B^T \hat{B}^{-1}$ (***)
is toegelaten in de lineaire voorwaarden

$$\boxed{\pi^T \hat{A} \leq \hat{c}^T}$$

Deze voorwarden noemen we de "duale" voorwaarden, en ze bestaan uit 3 delen:

voor $j \in N$: $\pi^T A_j \leq c_j$

" $j \in \bar{N}$: $\left.\begin{array}{l} \pi^T A_j \leq c_j \\ -\pi^T A_j \leq -c_j \end{array}\right\} \Rightarrow \pi^T A_j = c_j$

" $i \in \bar{M}$ $-\pi_i \leq 0$ (of $\pi_i \geq 0$)

Ons voorbeeldje:

$$\left.\begin{array}{r} 2\pi_1 + 5\pi_2 \leq 5 \\ -2\pi_1 - 5\pi_2 \leq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi_1 + 5\pi_2 = 5$$

$$9\pi_1 - 3\pi_2 \leq -7$$

$$\pi_2 \geq 0$$

Definitie: Gegeven is een LP in algemene vorm, het "primale" probleem P. Het probleem D is het bijbehorende duale probleem:

(P) $\min c^T x$
odv $a_i x = b_i \quad i \in M$
$a_i x \geq b_i \quad i \in \bar{M}$
$x_j \geq 0 \quad j \in N$
$x_j \gtrless 0 \quad j \in \bar{N}$

(D) $\max b^T \pi$
odv $\pi_i \gtrless 0 \quad i \in M$
$\pi_i \geq 0 \quad i \in \bar{M}$
$\pi^T A_j \leq c_j \quad j \in N$
$\pi^T A_j = c_j \quad j \in \bar{N}$

Stelling 3.2 Het duale van het duale probleem is weer het primale probleem.

Bewijs: Via definities (zie boek)

Stelling 3.1 a: (De "zwakke dualiteits-stelling"). Gegeven is een primaal-duaal paar:

(P) $\min z(x) = c^T x$
odv $Ax \geq b$
$x \geq 0$

(D) $\max w(\pi) = b^T \pi$
odv $\pi^T A \leq c^T$
$\pi \geq 0$

Als $\hat{x}$ toegelaten is in (P) en $\hat{\pi}$ toegel. is in (D) geldt:

$$z(\hat{x}) \geq w(\hat{\pi}).$$

Bewijs:

$$z(\hat{x}) = c^T \hat{x} \geq \hat{\pi}^T A \hat{x} \geq \hat{\pi}^T b = w(\hat{\pi})$$

$\hat{x} \geq 0$ en duale voorw. $\qquad$ $\hat{\pi} \geq 0$ en primale voorw. $\blacksquare$

Stelling 3.1 b: (De "sterke dualiteitsstelling")
Stel dat (P) & (D) toegelaten zijn.
Als (P) een begrensd optimum x^* heeft, dan heeft (D) ook een begrensd optimum π^*, en

$$z(x^*) = w(\pi^*).$$

Bewijs: Neem $\hat{x}, \hat{\pi}$ toegelaten opl.
Vanwege zwakke dualiteit geldt:

$$w(\hat{\pi}) \leq z(\hat{x})$$

$z(\hat{x}) < +\infty$, want $\hat{x}$ toegel. $\Rightarrow w(\pi)$ begr
($w(\hat{\pi}) > -\infty$, " (D) toegel.)

Los (D) optimaal op $\Rightarrow \pi^*$ met waarde

$$w(\pi^*) = (\pi^*)^T b = \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{=\pi^*} \underbrace{B^{-1} b}_{= x_B^*} = c_B^T x_B^* = z(x^*)$$

zie bovenaan p. 4 (***)

zie "Appendix"

Omdat $w(\hat{\pi}) \leq z(\hat{x})$ voor iedere toegelaten primaal-duaal paar $\hat{x}, \hat{y}$ moet x^*, π^* een optimaal primaal-duaal paar.

$\blacksquare$

Mogelijke primaal-duale kombinaties

Primaal \ Duaal	Begrensd optimum	Onbegr.	Niet-toegel.
Begrensd optimum	1	—	—
Onbegr.	—	—	2
Niet-toegel.	—	2	3

1 Stelling 3.1 b

2 Als (P) onbegrensd $\Rightarrow z^* = -\infty$

zwakke dualiteit :

$$w(\hat{\pi}) \leq z^* = -\infty \quad \forall \text{ toegel } \hat{\pi}$$

(D) max-probleem $\Rightarrow$

(D) niet toegel.

Omgekeerd, als (D) onbegrensd
$\Rightarrow$ $w^* = +\infty$
$w^* \leq z(\hat{x})$ $\forall$ toegel. $\hat{x}$
$\Rightarrow$ (P) niet-toegl.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 & \max & \pi_1 + \pi_2 \\ \text{odv} & x_1 + x_2 \geq 1 & \text{odv} & \pi_1 - \pi_2 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 \geq 1 & & \pi_1 - \pi_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

3 Voorbeeld van niet-toegel. primaal-duaal paar!

Verander $x_1, x_2 \geq 0$ in $x_1, x_2 \gtrless 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= 1 \\ \pi_1 - \pi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Appendix: Simplex in "matrix"-vorm

Laat: x_B = basisvar. in optimale opl.
x_N = nietbasisvar. — " —

$\Rightarrow$ bijbehorende partitie van A en c:

$$c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \qquad A = [B \;\; N]$$

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{odlv} & Ax \le \overset{\geq 0}{b} & \\ & x \geq 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{odlv} & Ax + Is = b \\ & x, s \geq 0 \end{array}$$

Starttableau:

basis	$\bar{b}$	x_B	x_N	s	
$-z$	0	c_B^T	c_N^T		$r_0 - c_B^T B^{-1} \cdot$ rij 1
x_s	b	B	N	I	$\cdot B^{-1}$

Optimaal tableau:

basis	$\bar{b}$	x_B	x_N	s
$-z$	$-c_B^T B^{-1} b$	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1}$
x_B	$B^{-1} b$	I	$B^{-1} N$	B^{-1}

Hierruit kunnen we lezen:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^* = c_B^T \underbrace{B^{-1}b}_{x_B}$$

$$\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = 0$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

Merk ook op dat, als we beginnen met een LP in de gegeven vorm, we de optimale waarde van de duale variabelen kunnen vinden in de s-kolom:

$$\pi^* = c_B^T B^{-1}$$