# Optimalisering / BK1, College 3

Note Title 18-9-2012

We gaan volgende vragen beantwoorden:

1. Gegeven een bfs, hoe maken we een transitie naar een volgende bfs?
   Een "pivot"
2. Hoe kiezen we een goede "zoek-richting"?
   "pivot kolom"
3. Hoe bepalen we een start-bfs?

---

1. $$P = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{rcll} 4x_1 - 3x_2 & \leq & 6 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 12 & (2) \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array} \}$$

In standaard vorm:

$$F = \{ (x_1, x_2, s_1, s_2) \mid \begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + s_1 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 12 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \}$$

$s_1, s_2$ basisvariabelen

Voor de hand liggende startbasis. Waarom?

Iha: $A = [B \ N] \Rightarrow Bx_B + \cancel{Nx_N} = b$ (with $x_N = 0$)

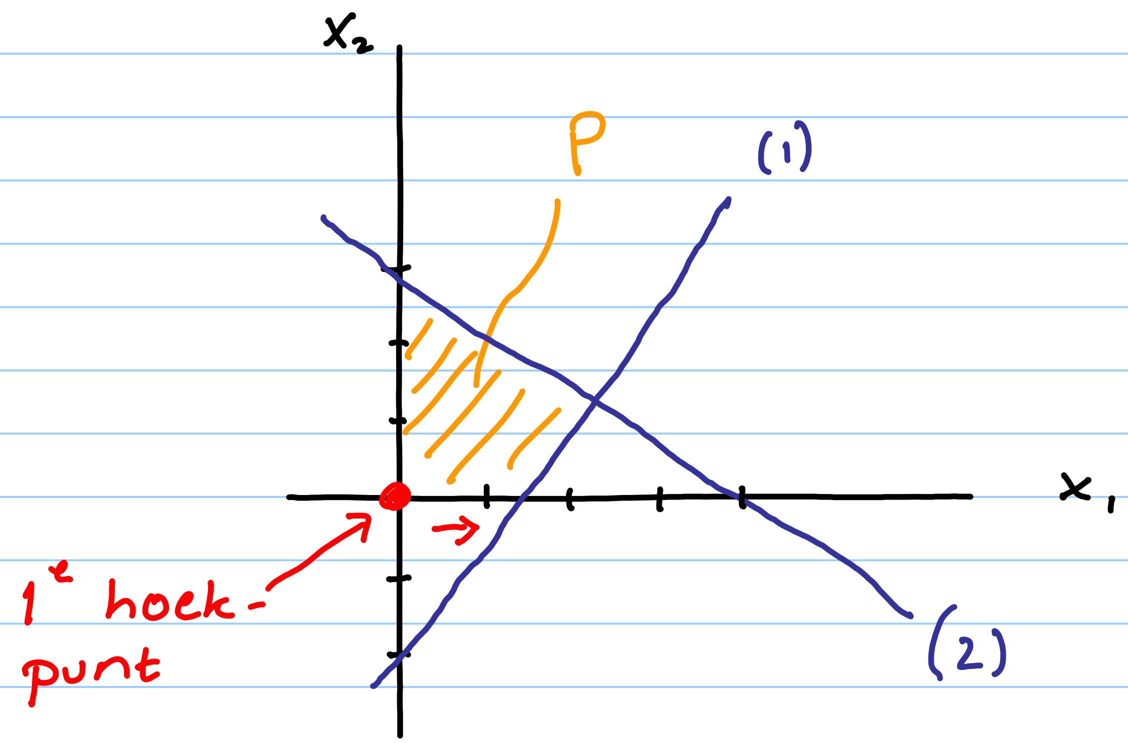
$Bx_B = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b$

Als $B = I$ is het triviaal om $B^{-1}$ te bepalen!
$\Rightarrow$ We beginnen altijd met $B = I$ en $b \geq 0$.

$\Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b = b \geq 0 \Rightarrow x_B$ is een bfs

1e bfs: $x_1 = x_2 = 0 \qquad x_N^T = (x_1, x_2)$
$s_1 = 6$
$s_2 = 12 \qquad x_B^T = (s_1, s_2)$

Bijbehorende hoekpunt:



Stel nu dat we in de richting van toenemende waarden van $x_1$ gaan:

↖ pivotkolom

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + S_1 = 6 \\ 3x_1 \underbrace{+ 4x_2}_{=0} + S_2 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

↑
kolom $A_1$

$$S_1 = 6 - 4x_1 \geq 0$$
$$S_2 = 12 - 3x_1 \geq 0$$

Hoeveel mag $x_1$ toenemen?

$$6 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{6}{4}$$
$$12 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{12}{3}$$

$\bar{b}_1$, $\bar{a}_{11}$, $\bar{b}_2$, $\bar{a}_{21}$

De streep op b & a symboliseren "huidige" b en a.

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \;\middle|\; \bar{a}_{i1} > 0 \right\}}$$

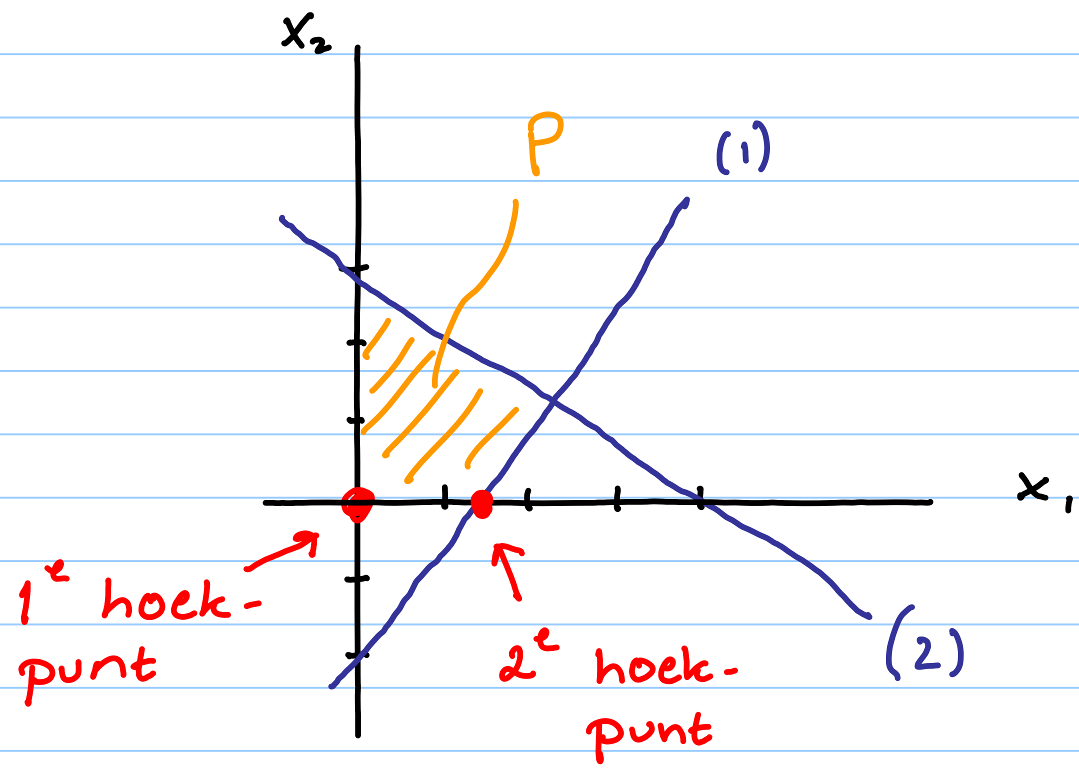
Hier: $x_1 = \min\left\{\frac{6}{4}, \frac{12}{3}\right\} = \frac{6}{4}$

$$S_1 = 6 - 4\cdot\frac{6}{4} = 0$$
$$S_2 = 12 - 3\cdot\underbrace{\frac{6}{4}}_{x_1} = \frac{15}{2}$$

← $S_1$ verlaat basis (uittredende basisvar.)

$\Rightarrow$ nieuwe bfs : $x_2 = s_1 = 0$

$x_1 = \frac{6}{4}$ $s_2 = \frac{15}{2}$




Iha: Stel kolom $j'$ is de pivotkolom:

$$x_{B(1)} \qquad + \bar{a}_{1j'} x_{j'} + \cdots\cdots = \bar{b}_1$$

$$\ddots$$

pivotelement

$$x_{B(l)} \qquad + \boxed{\bar{a}_{lj'}} x_{j'} + \cdots = \bar{b}_l \leftarrow$$

pivotrij

$$\ddots$$

$$x_{B(m)} + \bar{a}_{mj'} x_{j'} + \cdots = \bar{b}_m$$

↑ pivotkolom

Pivotrij $\ell$ word bepaald als:

$$\frac{\bar{b}_\ell}{\bar{a}_{\ell j'}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij'}} \;\middle|\; \bar{a}_{ij'} > 0 \right\}$$

Dit noemen we de "min-ratio test"

Het pivotelement bepaalt de rijoperaties.

Na pivot:

$$\text{rij } \ell := \text{rij } \ell \,/\, \bar{a}_{\ell j'}$$

$$\text{rij } i := \text{rij } i - \frac{\bar{a}_{ij'}}{\bar{a}_{\ell j'}} \cdot \text{rij } i, \quad \forall i \neq \ell$$

Voorbeeld weer:

$$x_1 - 3/4\, x_2 + \tfrac{1}{4} s_1 = 6/4$$
$$25/4\, x_2 - \tfrac{3}{4} s_1 + s_2 = 15/2$$

2. De doelfunctie bepaalt de keuze van pivotkolom $j'$

min probleem: kies $j'$ als

$$\bar{c}_{j'} = \min_j \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j \underset{(<)}{\leq} 0 \}$$

(elke variabele $x_j$ met $\bar{c}_j \underset{(<)}{\leq} 0$ is een toegelaten keuze!)

max probleem: kies $j'$ als

$$\bar{c}_{j'} = \max_j \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j \underset{(>)}{\geq} 0 \}$$

(elke variabele $x_j$ met $\bar{c}_j \geq 0$ is een toegelaten keuze!)

Wederom, $\bar{c}_j$ betekent "huidige" doelfunctiecoëfficient (in het boek: "relative cost")

Stelling 2.8 Stel we hebben een min-probleem. Zij $x^0$ een bfs. Als $\bar{c}_j \geq 0$ voor iedere j, dan is $x^0$ optimaal

Bewijs: Laat $x_B^0$ : basisvar. in $x^0$
$x_N^0$ : niet-basisvar. in $x^0$

Eerst, bepaal uitdrukking voor $\bar{c}^T$:

Beginsysteem:

$$
\begin{aligned}
-z + c_B^T x_B^0 + c_N^T x_N^0 &= 0 \qquad (0)\\
B x_B^0 + N x_N^0 &= b \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Vermenigvuldig vergelijkingen (1) met $B^{-1}$:

$$x_B^0 + B^{-1} N x_N^0 = \underbrace{B^{-1} b}_{\bar{b}}$$

$$\Rightarrow \quad x_B^0 = B^{-1} b$$

Druk doelfunctie (0) uit in niet basisvar. (neem $(0) - c_B^T B^{-1} \cdot (1)$):

$$-z + \underbrace{(c_B^T - c_B^T B^{-1} B)}_{0} x_B^0 + \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{\bar{c}_N^T} x_N^0 = -c_B^T B^{-1} b$$

Relatieve kosten $\bar{c}$ na deze "pivot":

Voor $x_B$: $\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T \underbrace{B^{-1} B}_{I} = 0$

Voor $x_N$: $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

Iha: $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$

Volgens aanname stelling geldt

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0$$

Oftewel:

$$\boxed{c^T \geq c_B^T B^{-1} A}$$

Neem nu een willekeurige toegelaten oplossing $y$:

$$Ay = b, \quad y \geq 0$$

$$c^T y \geq c_B^T B^{-1} \underbrace{A y}_{= b}$$

$$c^T y \geq c_B^T \underbrace{B^{-1} b}_{x_B^0}$$

$\Rightarrow \quad c^T y \geq c_B^T x_B^0 \quad \Rightarrow$ Elke toegelaten oplossing $y$ heeft een grotere doelfunctie-waarde dan $x^0$ $\Rightarrow$ $x^0$ is optimaal ■

Observatie: Zij $x^0$ een bfs. Schrijf

$$N_A(x^0) = \{ y \mid y \text{ een bfs die je in één pivot kan bereiken} \}$$

Stelling 2.8 impliceert dat $N_A(x^0)$ is een exacte neighborhood.

$|N_A(x^0)| = n - m$ (# niet-basisvar.)

## Samenvatting Simplexalgoritme

Initialiseren: Start-bfs

1. Kies intredende variabele $j'$ zdd

max: $\bar{c}_{j'} = \min\limits_{j} \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j \geq 0 \}$

min: $\bar{c}_{j'} = \max\limits_{j} \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j \leq 0 \}$

Als $\bar{c}_{j'} \geq 0$ (min) of $\bar{c}_j \leq 0$ (max) voor alle $j$, dan is huidige bfs optimaal. STOP. Anders, ga naar 2.

2. Kies uittredende basisvar. $B(i')$ zdd

$$\frac{\bar{b}_{i'}}{\bar{a}_{i'j'}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij'}} \;\middle|\; \bar{a}_{ij'} > 0 \right\}$$

(min-ratioregel)

Als $\bar{a}_{ij'} \leq 0 \;\; \forall\, i$, dan is $z^* = -\infty$

(probleem onbegrensd), STOP

Anders, ga naar 1.

3. Hoe bepalen we een start-bfs?

We willen:

$$\begin{array}{llcl} z = & & \bar{c}_N^T x_N & \\ \text{odv} & I x_B + & \bar{A}_N x_N & = b \;\; (\geq 0) \\ & x_B, & x_N & \geq 0 \end{array}$$

a) Als oorspronkelijke probleeminstantie is:

$$\begin{array}{lll} z = & c^T x & \\ \text{odv} & Ax & \leq b \;\; (\geq 0) \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Makkelijk! Want standaard vorm dan OK!

$$z = c^T x$$
$$\text{odv} \quad Ax + Is = b$$
$$x,\ s \geq 0$$

Start bfs: $x = 0$ (niet-basisvar.)

$s = b$

Met waarde $z = 0$

b) Als de oorsprong $(x=0)$ niet is toegelaten:

(i) voor voorwaarden

$$a_i x \geq b_i \qquad (b_i \geq 0)$$

Eerst, trek surplusvar. v/d linkerkant af:

$$a_i x - s_i = b_i$$
$$s_i \geq 0$$

Maar $s_i = -b_i$ niet toegel.

⇒ Voeg "artificiële var. aan linkerkant toe:

$$a_i x - s_i + x_i^a = b_i$$
$$s_i, x_i^a \geq 0$$

⇒ startbasisvar. voor voorwaarde $i$:

$$x_i^a = b_i$$

(ii) voor voorwaarden

$$a_i x = b_i \qquad (b_i \geq 0)$$

Voeg "artificiële" var. aan linkerkant toe:

$$a_i x + x_i^a = b_i$$
$$x_i^a \geq 0$$

Als we artificiële var. hebben in de formulering, los eerst het volgende "hulp"-probleem op:

$$w^* = \min \sum_i x_i^a$$

odv $(x, s, x^a)$ voldoen aan de voorwaarden

(dit noemen we "Simplex fase I")

3 mogelijkheden:

1) $w^* = 0$, geen v/d $x^a$-variabelen in de basis.
De optimale oplossing uit Simplex fase I is een bfs voor het "echte" probleem.
Schrap alle $x^a$-variabelen, druk doelfunctie $z = c^T x$ uit in niet-basisvar.
Ga door met optimaliseren van $z$

2) $w^* = 0$, tenminste een $x^a$-variabele is in de basis met waarde 0.

Stel dat $x_i^a = 0$ in de basis.
"Pivot" op een willekeurig niet-nul element in de rij waar $x_i^a$ is basis-var. en in een kolom $j'$ waar $\bar{a}_{ij'} \neq 0$.
Herhaal tot dat geen $x^a$-var. in de basis meer zit. We zijn nu in geval 1)

3) $w^* > 0$. Stop, het oorspronkelijke probleem heeft geen toegelaten oplossing.