Optimalisering/BK1, College 2

Note Title 11-9-2012

1e deel v/h vak : Lineaire optimalisering
(LP) "linear programming"

Van vorige keer :

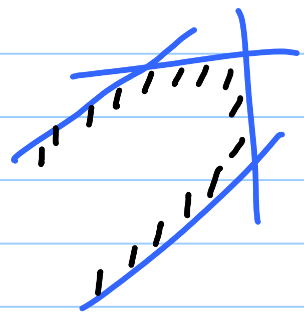
De verzameling toegelaten oplossingen

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{rcl} a_1 x & \gtreqqless & b_1 \\ & \vdots & \\ a_m x & \gtreqqless & b_m \\ x & \geq & 0 \end{array} \}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \gtreqqless b\}$$

Eindig aantal halfruimtes
$(a_i x = b_i \Rightarrow a_i x \leq b_i,\ a_i x \geq b_i)$

F beschrijft een polyeder



Een begrensde polyeder noemen we een polytoop.

Voorbeeld: $\min z(x) = -3x_1 - 4x_2$

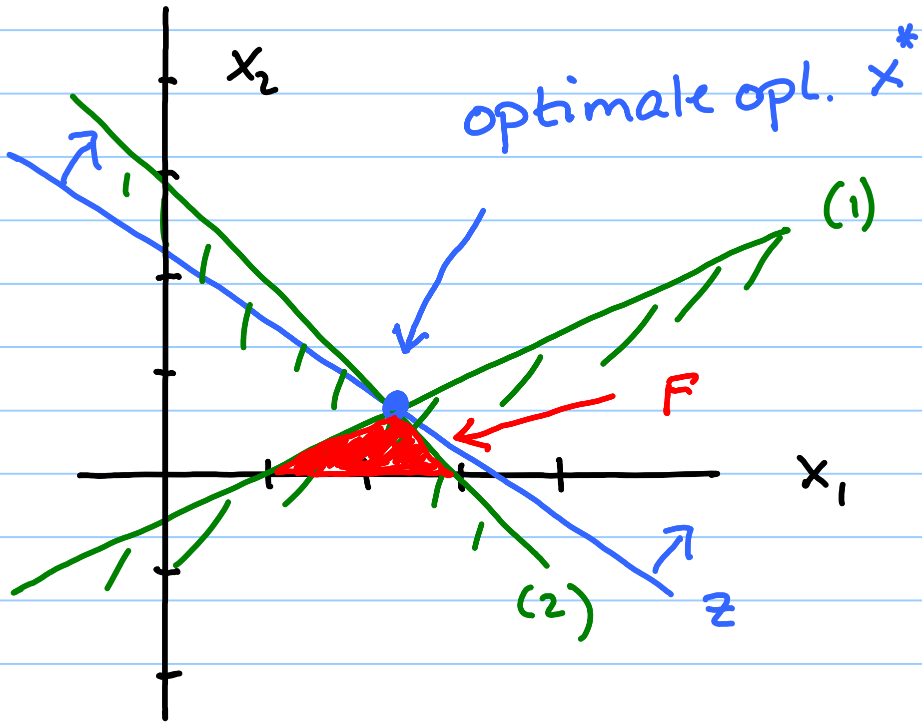
odv $$x \in F := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & \geq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}\}$$

Meestal schrijven we:

$$\min \quad z = -3x_1 - 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{o.d.v} \quad x_1 - 2x_2 &\geq 1 \quad (1) \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \quad (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafisch:



Oplossing: $x^* = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ $\quad z^* = -3 \cdot \frac{7}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{29}{3}$

<u>Stelling</u>: Een optimale LP-oplossing bevindt zich in een extreem punt (hoekpunt) van de polyeder.

$\Rightarrow$ Hoekpunten zijn belangrijk!
(in $\mathbb{R}^n$: doorsnede van n hypervlakken. $\Rightarrow$ schrijf probleem in gelijkheidsvorm)

Gegeven: min $z = c^T x$
odlv $Ax = b$
$x \geq 0$

A: m×n matrix, m<n

Veronderstel: rang(A) = m

Definitie:

Basis $\mathcal{B}$ van A: verzameling lineair onafhankelijke kolommen van A

$$\mathcal{B} = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}\}$$

of, als matrix: $B = [A_{j_i}]$ m×m matrix

$\Rightarrow$ we kunnen A partitioneren in "basis-kolommen" B, en "niet-basiskolommen" N
$A = [B \; N]$ $\left(\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}\right)$

Definitie:
Basisoplossing behorend bij $\mathcal{B}$:

$x \in \mathbb{R}^n$ zdd $x_j = 0$ voor $j: A_j \notin \mathcal{B}$

$x_{j_k} = (B^{-1}b)_k$, $k = 1, \ldots, m$

(of $x_N = 0$, $x_B = B^{-1}b$)

Ons voorbeeldje weer:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq 1 \quad (1) \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \quad (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Schrijf in "standaard vorm":

* alle variabelen ≥ 0
* alle voorwaarden in gelijkheids-vorm
* alle rechterzijdecoëfficienten $b_i > 0$

belangrijk voor algoritme straks

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - s_1 &= 1 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

surplusvar.

slackvar.

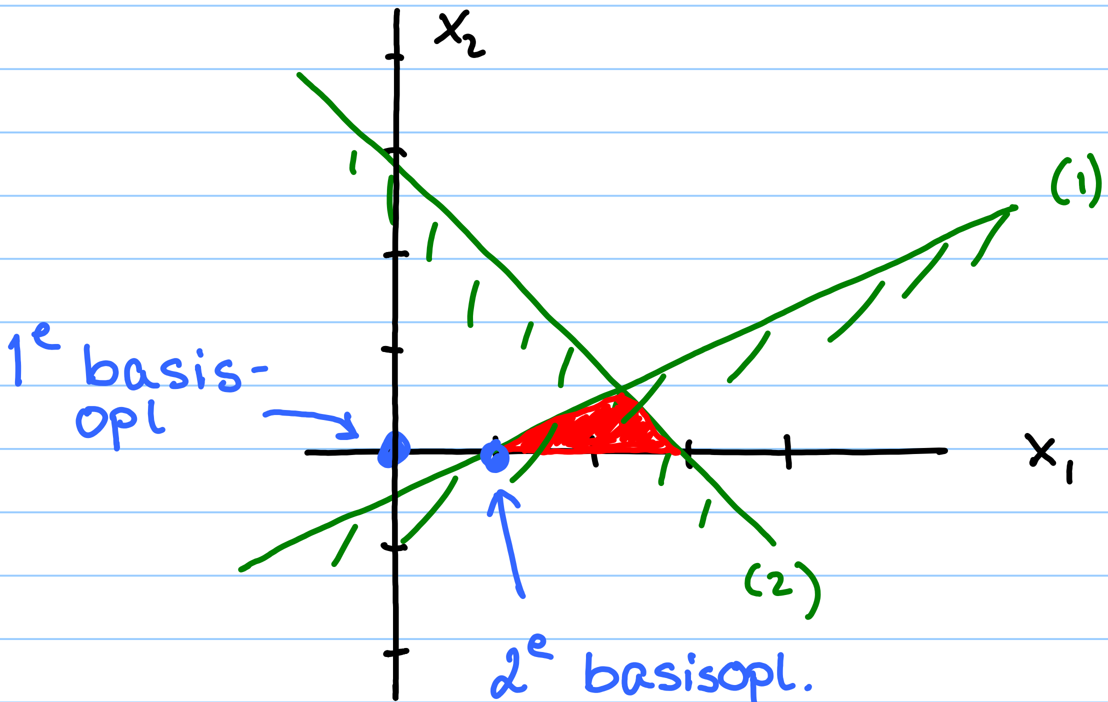
Eén basis (behorend bij s_1, s_2-kolommen):

$$B = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^{-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Een andere basis
(behorend bij x_1, s_2-kolommen):

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = s_1 = 0 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B^{-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

NB: Eerste basisopl. is niet toegelaten
want $s_1 = -1 < 0$
Tweede basisopl. wel toegelaten



Definitie:
Een toegelaten basisoplossing (basic feasible solution (bfs)) is een basis-oplossing waarbij alle variabelwaarden niet-negatief zijn.

Definitie: Een bfs x is gedegenereerd als tenminste een basisvariabele waarde nul heeft. ($\Rightarrow$ meer dan $n-m$ elementen van x zijn gelijk aan nul.)

Voorbeeld:

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \}$$

Standaard vorm:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 \qquad + s_2 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basis 1:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$s_1 = s_2 = 0$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

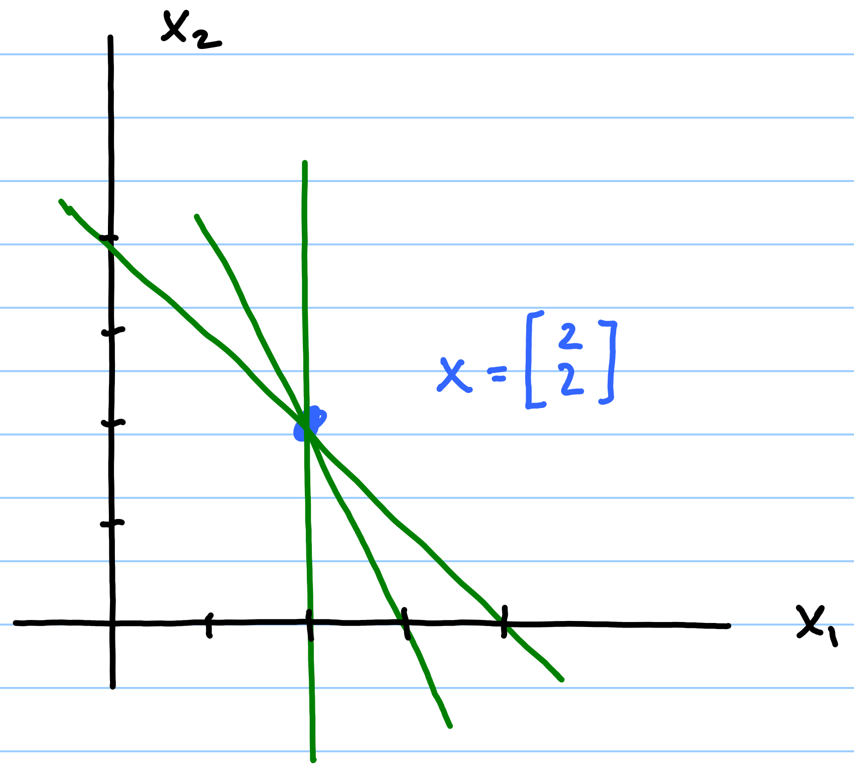
Basis 2:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$s_2 = s_3 = 0$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Grafisch:



Veronderstel:
* rang(A) = m (A1)
* verzameling toegelaten oplossingen $F \neq \emptyset$ (A2)

Stelling 2.1: Onder veronderstellingen (A1) en (A2) bestaat er altijd een bfs.

Simplexalgoritme: Gaat van één bfs naar en volgende bfs zdd de doelfunctiewaarde niet slechter wordt.

<u>Uitgangspunt</u>: LP probleem in "standaard vorm":

* alle variabelen ≥ 0
* alle voorwaarden in gelijkheids-vorm
* alle rechterzijdecoëfficienten $b_i > 0$

<u>Stelling</u>: Elk LP-probleem kan worden geschreven in standaard vorm

<u>Bewijs</u>: Als $b_i < 0$ voor een index i, vermenigvuldig voorwaarde i met -1.

Als nu:

(1) $a_i x \leq b_i$

voeg slackvariabele s_i toe

$\Rightarrow a_i x + s_i = b_i \qquad s_i \geq 0$

(2) $a_i x \geq b_i$

trek surplusvariabele af

$\Rightarrow a_i x - s_i = b_i \qquad s_i \geq 0$

(3) variabele x_j "vrij"

substitueer x_j:

$x_j := x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$

(4) variabele $x_j \leq 0$

substitueer: $x_j' = -x_j$, $x_j' \geq 0$

$\blacksquare$

Relatie tussen lineair stelsel en polyeder:

Begin met lineair stelsel:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{Ax = b,\ x \geq 0}_{(*)}\}$$

A: $m \times n$ matrix, $m < n$, $\text{rang}(A) = m$

$b \geq 0$

Schrijf: $A = [N \ \ B]$

$\searrow$ $m \times m$ basismatrix

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b$$

$$\underbrace{B^{-1}N}_{\bar{A}_N} x_N + \underbrace{B^{-1}B}_{I} x_B = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$$

We mogen dus veronderstellen dat
$Ax=b$ geschreven is als

$$x_{i+(n-m)} = \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n-m} \bar{a}_{ij} x_j \qquad i=1,\dots,m$$

$$(*) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n-m} \bar{a}_{ij} x_j \geq 0 & i=1,\dots,m \\ x_j \geq 0 & j=1,\dots,n-m \end{array}\right\} (**)$$

$(**)$ definieert een verzameling vectoren
$x \in \mathbb{R}^{n-m}$ die beschreven wordt door
n halfruimtes. Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$!

Nu andersom: begin met een polyeder
$P \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ die beschreven wordt door
n halfruimtes. De eerste $n-m$ half-
ruimtes zijn $x_j \geq 0$ $j=1,\dots,n-m$ oftewel
$-x_j \leq 0$ $j=1,\dots,n-m$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -x_1 & & \leq 0 \\ & -x_2 & \leq 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -x_{n-m} \leq 0 \end{array}$$

m half-ruimtes, overige:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{11} x_1 + \cdots + \bar{a}_{1,n-m} x_{n-m} \leq b_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_{m1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{m,n-m} x_{n-m} \leq b_m \end{array} \right.$$

Voeg niet-negatieve slackvar. toe aan de laatste m ongelijkheden $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \bar{a}_{11} x_1 + \cdots + \bar{a}_{1,n-m} x_{n-m} + x_{n-m+1} = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \bar{a}_{m1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{m,n-m} x_{n-m} \qquad + x_n = b_m \end{array}$$

We verkrijgen:
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A = [\bar{A} \;\; I]$

tot hier waren we gekomen tijdens college #2

Observatie: Een vector

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-m}) \in P$$

heeft een bijbehorende vector

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$$

als volgt:

$$x_i = \hat{x}_i \qquad i = 1, \ldots, n-m$$

$$x_{n-m+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n-m} \bar{a}_{ij} \hat{x}_j \qquad i = 1, \ldots, m$$

En, omgekeerd, een vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$ heeft een bijbehorende vector $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-m}) \in P$ als volgt:

$$\hat{x}_i = x_i \qquad i = 1, \ldots, n-m$$

Stelling: $\hat{x}$ is een hoekpunt van P

$$\Longleftrightarrow$$

x is een bfs van F

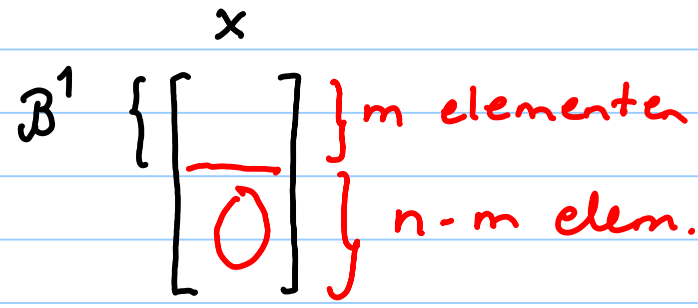
Bewijs: Zie bewijs Stelling 2.4 in boek

Stelling 2.5: Als twee verschillende bases $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$ behoren tot dezelfde bfs x, dan is x gedegenereerd

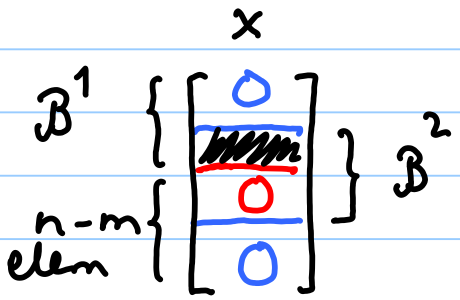
<u>Bewijs</u>: We moeten laten zien dat meer dan $n-m$ elementen van x gelijk aan nul zijn.

We weten: $B^1 \setminus B^2 = \{ j \mid j \in B^1, j \notin B^2 \} \neq \emptyset$

want B^1 en B^2 zijn verschillend.



De $n-m$ elementen van x die niet bij B^1 behoren zijn gelijk aan 0 (niet-basisv.)



Maar x moet ook nullen hebben bij de elementen die niet bij B^2 horen en, omdat $B^1 \setminus B^2 \neq 0$ zijn er meer dan $n-m$ elem. gelijk aan 0