Note Title

Optimalisering / BK1, college #13

12-12-2012

Samenvatting

Probleemformulering

Problemen formuleren als LP/IP problemen
Definieer duidelijk de beslissingsvariabelen
Gebruik "zinvolle" variabelnamen
bv. I_{ij} = hoeveelheid ingredient i in lijn j
ipv $x_1, \ldots, x_{17}$
Beschrijf wat de verschillende constraints betekenen
Vergeet niet ev. ≥ 0 constraints!
Zie college 9 voor een aantal modelleer-technieken.

LP (H2)

Definitie polyeder/polytoop
Standaard vorm:

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad (\geq 0) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

n var. m voorw.

Herformuleren van een willekeurig LP naar standaard vorm

Definitie van een basis

Basisoplossing: Zet $\underbrace{n-m \text{ variabelen}}_{\text{niet-basisvar.}} = 0$
(bs)

Los $Ax = b$ op voor
$\underbrace{\text{overige } m \text{ variabelen}}_{\text{basisvar.}} \neq 0$

$\Rightarrow$ een unieke oplossing

Toegelaten basisopl.: Als voor een basisopl.
(bfs) x geldt dat $x \geq 0$, dan is
x een bfs.

Gedegenereerde bfs: tenminste één basis-variabele heeft waarde 0.

Stelling 2.5: Als meer dan één basis behoort tot dezelfde bfs x, dan is x gedegenereerd.

Relatie tussen hoekpunt v/e polyeder en een bfs (stelling 2.4)

Simplex (H3)

Algoritme: het bepalen v/e pivotelement
- " uitvoeren v/e pivot
optimaliteitscriterium
herkennen van niet-toegelaten probl.
- " " onbegrensde - " -
- " - " niet uniek opt.
het bepalen van een start-bfs

Simplex fase 1 - fase 2 (voor wanneer de oorsprong geen toegel. start-bfs is)

Controlleer:

1. Is er een (gepermuteerde) identiteitsmatrix in het tableau?

2. Is $\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i$?

3. Is $z = c^T x$? ← beweerde optimale opl.

basis	$\bar{b}$	x_B	x_N
$-z$	$-c_B B^{-1} b$	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$
x_B	$\underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\geq 0}$	I	$B^{-1} N$

Dualiteit (H4 - H5)

Formuleren van D gegeven P

"Standaard" primaal-duaal paar:

(P) $\max\ c^T x$
odv $Ax \leq b$
$x \geq 0$

(D) $\min\ b^T \pi$
odv $\pi^T A \geq c$
$\pi \geq 0$

$$\begin{array}{llcl}
\max & c^T x & \rightleftarrows & \min \; b^T \pi \\
\text{odv} & a_i x \le b_i & & \text{odv} \quad \pi_i \ge 0 \\
& a_i x = b_i & & \pi_i \gtrless 0 \\
& a_i x \ge b_i & & \pi_i \le 0 \\
& x_j \gtrless 0 & & \pi^T A_j = c_j \\
& x_j \ge 0 & & \pi^T A_j \ge c_j \\
& x_j \le 0 & & \pi^T A_j \le c_j
\end{array}$$

Zwakke dualiteitsstelling (met bewijs)
Sterke — " —

Mogelijke primaal-duale combinaties:

(P) \ (D)	begrensd opt.	onbegr.	niet-toegel.
begrensd opt.	+	−	−
onbegr.	−	−	+
niet-toeg.	−	+	+

+ : mogelijk

− : niet mogelijk

Complementary slackness: Stel $\hat{x}$ en $\hat{\pi}$ toegel. in (P) & (D) resp. $\hat{x}, \hat{\pi}$ optimaal d.e.s.d.a

$$\hat{x}_j(\hat{\pi}^T A_j - c_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$
$$\hat{\pi}_i(b_i - a_i x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

(met bewijs)

Het gebruiken van compl. slackness om een oplossing van een probleem te bepalen

Duale simplex:

bepalen v/e pivotelement

stop-criteria: primale toelaatbaarheid

of niet-toegel. probleem

Kortste pad probleem (H6)

Probleem formuleren als LP

Dijkstra's algoritme

Max flow / min cut (H6)

Max flow formuleren als LP

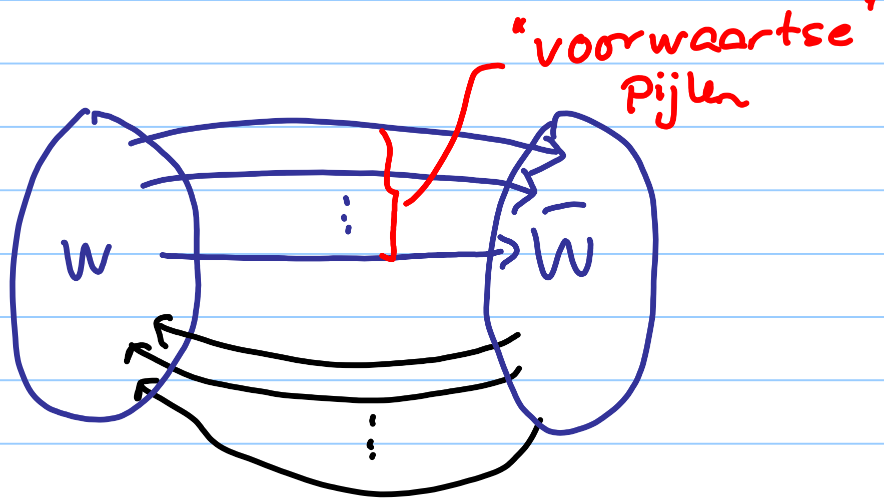
Het bijbehorende duale probleem formuleren

$\Rightarrow$ Min cut probleem

Max flow-min cut stelling: (stelling 6.2)

De waarde van de max flow in $N=(s,t,V,A,b)$ is gelijk aan de minimale capaciteit van een s-t cut in N.

$V = W \cup \bar{W}$



Het Ford-Fulkerson algoritme

Analyse van algoritmen (H7)

Definities

Zij $f(n), g(n)$ functies van $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$

$f(n) = O(g(n))$ als $\exists\, n_0, c > 0$ zdd
$f(n) \leq c \cdot g(n)$ voor $n > n_0$

$f(n) = \Omega(g(n))$ als $\exists\, n_0, c > 0$ zdd
$f(n) \geq c \cdot g(n)$ voor $n > n_0$

$f(n) = \Theta(g(n))$ als $\exists\, n_0, c', c'' > 0$ zdd
$c' \cdot g(n) \leq f(n) \leq c'' \cdot g(n)$ voor $n > n_0$

Handige stelling

Als $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ met $0 < c < \infty$, dan is $f(n) = \Theta(g(n))$

Als $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ dan is $f(n) = O(g(n))$

Als $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ dan is $f(n) = \Omega(g(n))$

Invoergrootte

De lengte van "de rij symbolen" nodig om een probleeminstantie in een computer te representeren

We gebruiken meestal de binaire codering.
('0' en '1')

Lengte v/e getal N: $\log_2 N$

bv. $N = 39$, binair: 100111, lenge = 6

Maar elke talstelsel met basis ≥ 2 is OK!
Waarom? Stel we gebruiken basis 2
en basis 2. Ze zijn als volgt gerelateerd:

$$\log_2 n = \log_2 10 \cdot \log_{10} n$$

Deze coderingen zijn polyn. gerelateerd!

Basis = 1 dan?

$N = 10$: binair: $\log_2 10$
unair: 10

$$10 = 2^{\log_2 10}$$

$\Rightarrow$ unaire codering exponentieel veel langer!

Een algoritme A is:
polynomiaal als $\exists\, c \in \mathbb{N} : f_A(n) = O(n^c)$
exponentieel anders

Minimaal opspannende bomen (MST) (H8):

Definitie van een boom en en opspannende boom
Definitie bos (verz. knoop-disjuncte bomen)
Prim's algoritme $(O(|V|^2))$
Greedy algoritme $(O(|E| \cdot |V|))$

Geheeltallige optimalisering (H9)

Definitie van relaxatie
LP-relaxatie van een IP
Modelleertechnieken voor IPs

Definitie Totaal Unimodulaire matrix
Unimodulaire —"—

Stelling 13.1-2 A TUM $\Rightarrow$ Alle hoekpunten van $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ en $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ geheeltallig voor iedere geheeltallige vector b.

Branch-and-bound (H10):

Algoritme (los een LP-relaxatie op in elk deelprobleem (knoop))
Wanneer mag ik snoeien?

Belangrijk: houd waarde v/d tot nu toe beste toegelaten oplossing globaal bij!

Vergeet niet om de oplossing duidelijk op te schrijven!

Cutting planes (H 10)

Definitie geldige ongelijkheid

Het bepalen van een Gomory snede behorend bij een rij in het simplex-tableau v/d optimale LP-relaxatie:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	$-59/7$			$-4/7$	$-1/7$	
x_1	$20/7$	1		$1/7$	$2/7$	
x_2	3		1	0	1	
s_3	$23/7$			$-2/7$	$10/7$	1

Neem bv. rij 3:

$$-2/7\, s_1 + 10/7\, s_2 + s_3 = 23/7$$

Splits elk coëfficient in geheeltallig en fractioneel deel door de coëff. naar beneden af te ronden!

$$(-1+5/7)s_1 + (1+3/7)s_2 + s_3 = 3 + 2/7$$

$$\underbrace{-s_1+s_2+s_3-3}_{\text{geheelt. in elke toegel. opl.}} = \underbrace{2/7 - 5/7\, s_1 - 3/7\, s_2}_{\text{geheelt.}}$$

$\Rightarrow$

$$2/7 < 1 \Rightarrow 2/7 - 5/7\, s_1 - 3/7\, s_2 \leq 0$$

Gomorysnede: $5/7\, s_1 + 3/7\, s_2 \geq 2/7$

Een Gomorysnede snijdt altijd de huidige LP-opt af, maar nooit een toegel. IP-oplossing!

Complexiteit (H 11)

Definities: P, NP, NP-volledig
$\Pi_1 \propto \Pi_2$ (reductie)

Implicaties van reducties

Hoe bewijs je conceptueel dat een probleem NP-volledig is?

Reducties die we in het college/werkcollege hebben gedaan

Approximatiealgoritmen (H 12)

Definitie van approximatiealgoritme

Analyse van de approximatiealg. die we in het college hebben gezien.