College 10-11

Note Title 23-11-2011

Branch-and-bound:

Basisidee: Geheeltallige problemen (IP) zijn "moeilijk", LP is "makkelijk". Gebruik deze LP-informatie.

Bij max-problemen:

waarde van LP-relaxatie

$$\underbrace{z_{TOEG}}_{\underline{z}} \leq z_{IP} \leq \underbrace{z_{LP}}_{\bar{z}}$$

waarde van een toeg. oplossing

optimale waarde IP-probleem

Bij min-problemen:

waarde van een toeg. oplossing

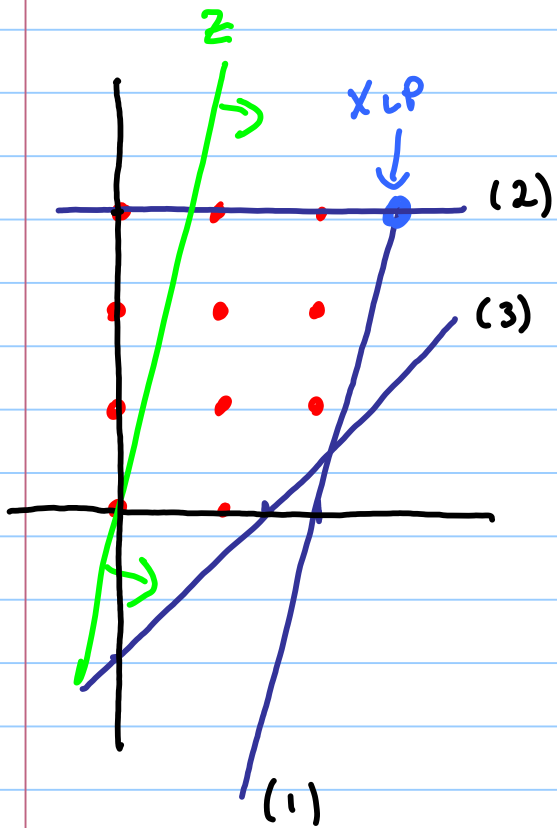
$$\underbrace{z_{LP}}_{\underline{z}} \leq z_{IP} \leq z_{TOEG}$$

waarde van LP relaxatie

"Branch" in B&B: Als deze grenzen op z_{IP} onvoldoende informatie geven moeten we het probleem in kleinere problemen opdelen.

"Bound" in B&B: Als $\bar{z} = \underline{z}$ in een deelprobleem, is dit probleem optimaal opgelost. Als $\underline{z} > \bar{z}$ of LP-relax $\emptyset$ in een deelprobl. $\Rightarrow$ geen hoop na dat deelprobleem.

Beschouw het volgende voorbeeld :



$$z_{IP} = \min \ -4x_1 + x_2$$

$$\text{odv} \quad \begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 \quad (1) \\ x_2 &\leq 3 \quad (2) \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 \quad (3) \end{aligned}$$

Los LP-relaxatie op :

$$x_{LP} = \begin{bmatrix} 20/7 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad z_{LP} = -\frac{59}{7}$$

Hier kunnen we ook gebruiken dat alle doelfunctiecoëff. geheeltallig zijn :

$$z_{IP} \geq \lceil z_{LP} \rceil = \underbrace{-8}_{\underline{z}}$$

In het begin hebben we iha geen toegelaten IP-oplossing $\Rightarrow \bar{z} = +\infty$

$$z_{IP} \leq +\infty$$

Nu hebben we dus : $-8 \leq z_{IP} \leq +\infty$

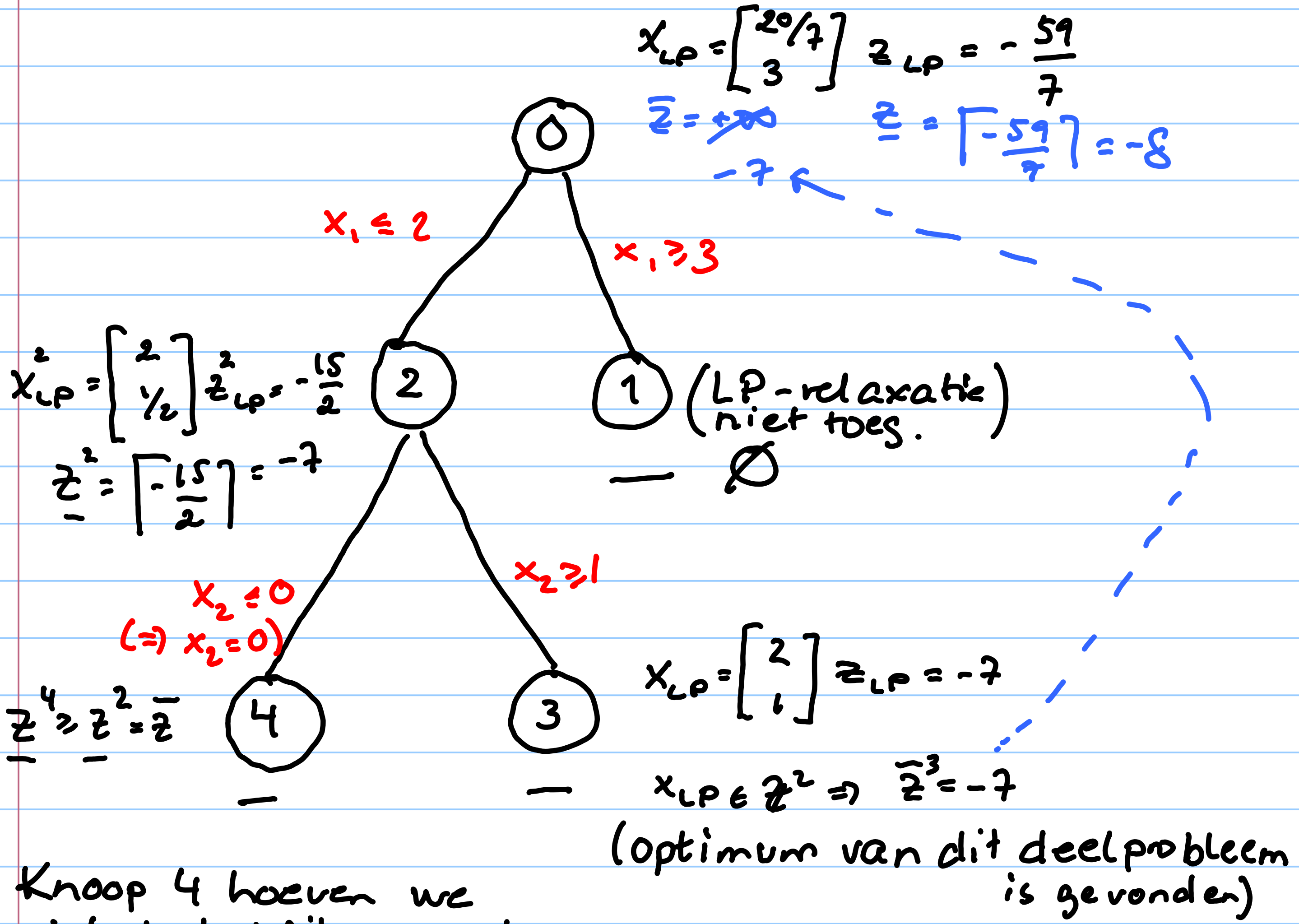
De huidige LP-oplossing is niet geheeltallig. We moeten meer informatie hebben.

In LP-oplossing is $x_1 = \frac{20}{7} \notin \mathbb{Z}$ $(2 < x_1^{LP} < 3)$

In een optimale IP-oplossing geldt:

$x_1 \le 2$ of $x_1 \ge 3$

We zeggen dat "we vertakken over x_1" (branching on x_1). Illustreer in een zoekboom. Na het vertakken krijgen we 2 deelproblemen. Los de LP-relaxatie van deze deelproblemen op.



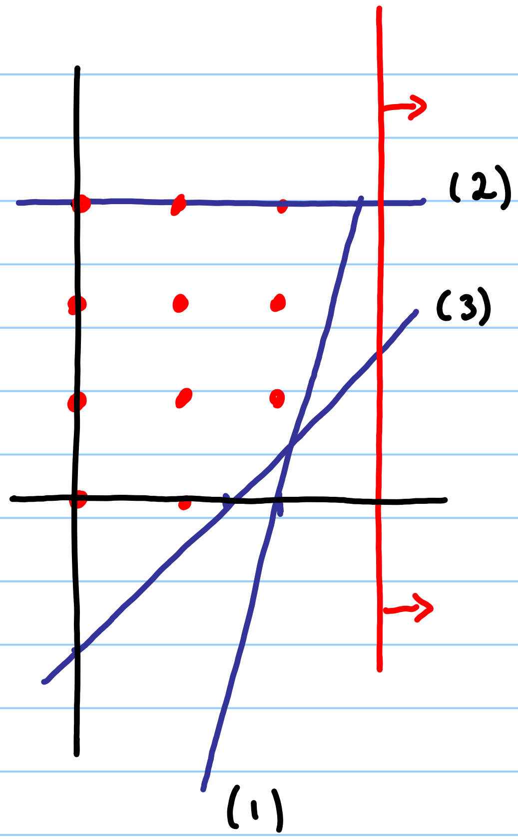
Knoop 4 hoeven we niet te bekijken want $\underline{z}^4 \ge \underline{z}^2$ (meer restricties zijn toegevoegd) en we hebben al een toegel. opl. met waarde -7.

P1

LP-relaxatie van P1:

Leeg gebied

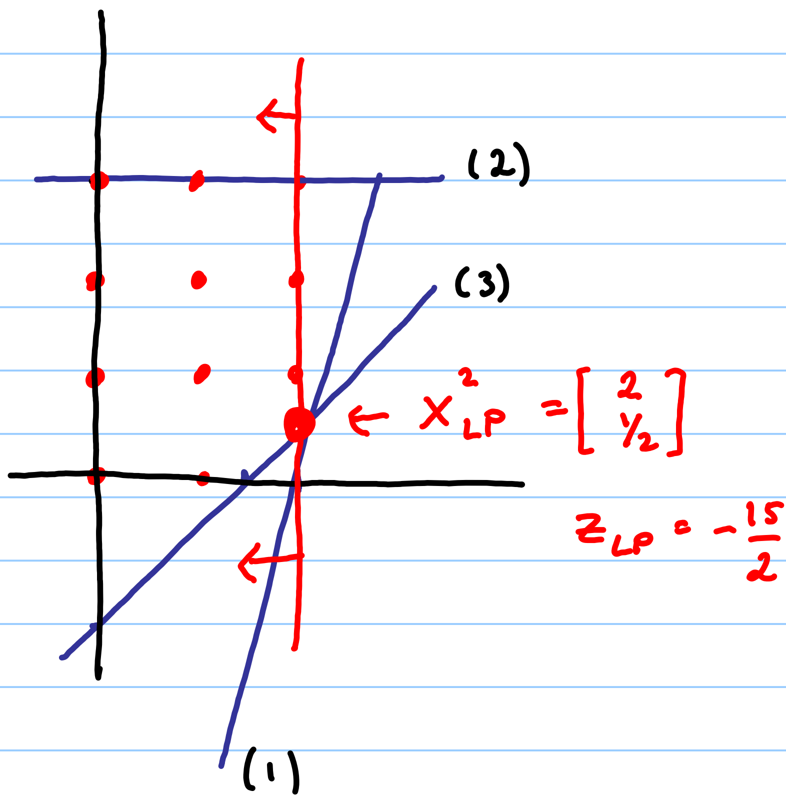
⇒ Hier kunnen we niks meer doen. Uit dit subprobleem kunnen we niet meer informatie krijgen.



P2

LP-relaxatie van P2:

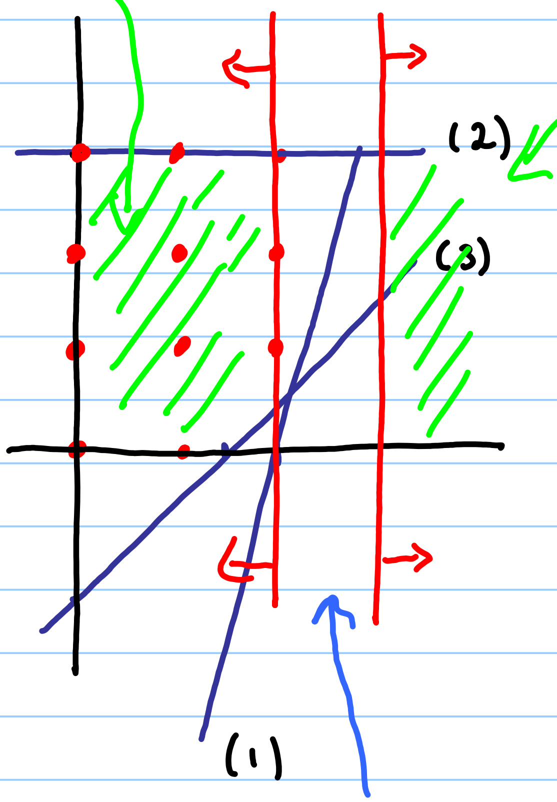
Hier hebben we nog steeds een niet-geheeltallige oplossing met waarde $\leq \bar{z}$. We moeten verder zoeken. Ga vertakken



Wat hebben we bereikt met deze vertakking?

We hebben gezegd dat:

Omdat $x_1 \in \mathbb{Z}$, ligt de optimale oplossing of hier of hier



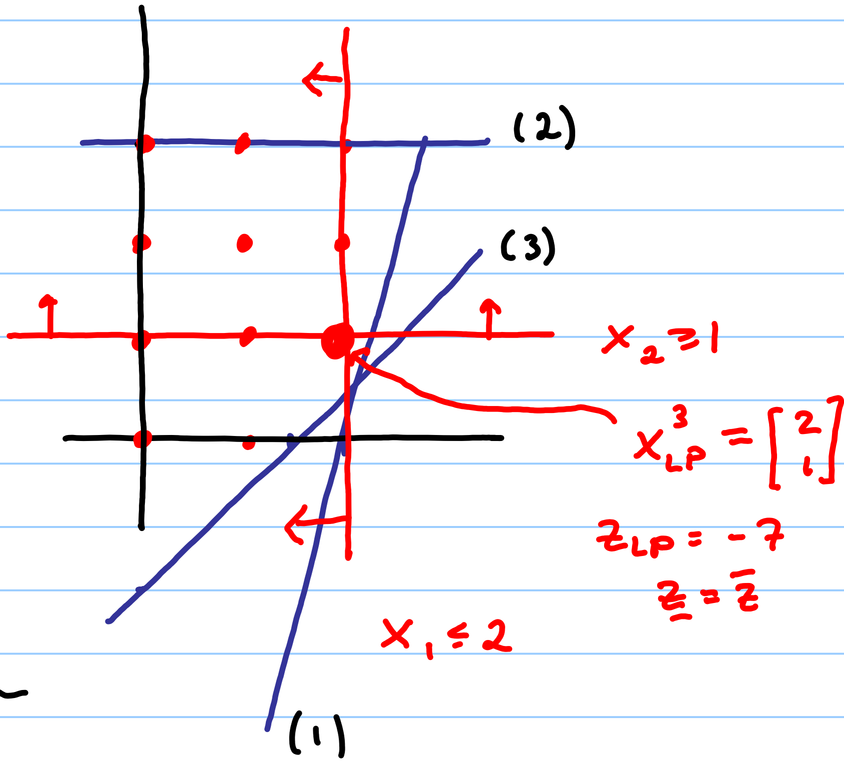
maar het stuk $2 < x_1 < 3$ is niet relevant!

Zoek nu verder onder P2:

$\Rightarrow$ 2 nieuwe deelproblemen: P3 & P4

P3

LP-relaxatie van P3:



Geheeltallige oplossing!
Deelprobleem optimaal opgelost
$\underline{z}^3 = \bar{z}^3$
Stel waarde van $\bar{z}$ bij! Hier hoeven we niet verder te zoeken.

LP-relaxatie van P4 niet nodig, want

$\bar{z}^4 \geq \bar{z}^2 = \underline{z}$

Optimale oplossing: $x_{LP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z_{LP} = -7$

We kunnen de zoekboom "snoeien" ("prune the tree") bij een knoop k als een van de volgende dingen gebeurt:

1) LP-relaxatie in knoop k is leeg
("Prune by infeasibility") (zie knoop 1)

2) LP-relaxatie in knoop k is geheeltallig
("Prune by optimality") (zie knoop 3)
NB! Zodra een geheeltallige oplossing gevonden is met waarde $\bar{z}^k$, stel $\bar{z}$ (de waarde van de tot nu toe beste oplossing) bij als $\bar{z}^k < \bar{z}$.

3) Als $\underline{z}_k \geq \bar{z}$. ("Prune by bound")
(zie knoop 4)

Wij vermijden hier om alle combinaties van toegelaten x_1 en x_2 af te tellen.

Let op, bovengrenzen zijn globaal geldig, maar een ondergrens verkregen in knoop k is alleen geldig in de subboom geworteld in knoop k. (min-probleem

Branch-and-bound "conceptueel idee":

- Los steeds LP relaxatie van subproblemen op.
- Als we een subprobleem niet kunnen snoeien, vertak over een variabele die niet geheeltallig is in de LP-oplossing

Implementatieaspecten

1) Hoe kiezen we branchingvariabele?

Typische regel: kies variabele met fractioneel deel het dichtst bij $\frac{1}{2}$.

Bv. $x_1 = 2\frac{4}{5}$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$, $x_3 = 2$

fractie x_1: $\frac{4}{5}$ fractie x_2: $\frac{1}{3}$, fractie $x_3 = 0$

fractie x_2 is het dichtst bij $\frac{1}{2}$.

2) Hoe kiezen we welke niet-gesnoeide knoop te bestuderen?

(a) Depth-first search; ga zo snel mogelijk naar beneden in de boom in de hoop dat er snel een goede toegelaten opl. wordt gevonden. Heroptimaliseren na toevoegen van een voorwaarde is makkelijk mbv duale simplex.

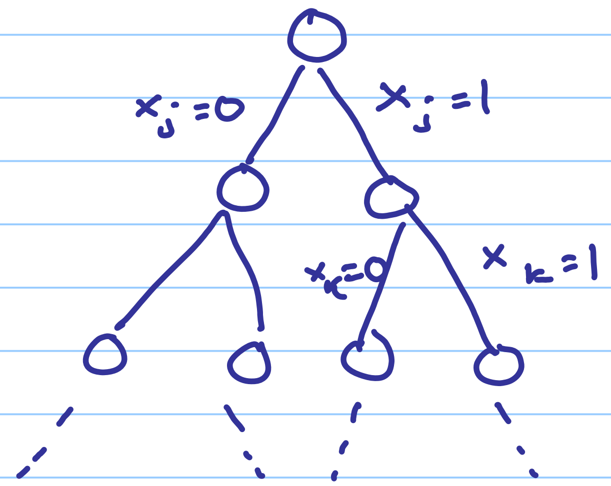
(b) Kies een actieve knoop met beste waarde van de relaxatie (best-node-first)

Vaak wordt er een mengsel van beide strategieën gebruikt: eerst (a), en zodra toegelaten opl. is gevonden (b)

Rekentijd:

Als alle variabelen 0-1 variabelen ($x \in \{0,1\}^n$).

Maximaal 2^n bladeren in de boom.



totaal # knopen is:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

Cutting planes ("geldige ongelijkheden")

Wordt vaak samen met B&B gebruikt om de kwaliteit van de LP-relaxatie van een IP te verbeteren.

IP

$$z^* = \max \; c^T x$$ (hier max als afwisseling)

$$\text{odlu} \quad Ax \leq b$$
$$x \geq 0, \text{ geheeltallig}$$

$\bar{z}$ bovengrens van bv LP-relaxatie

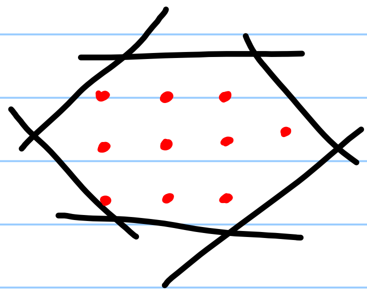
$\downarrow$ probeer een betere LP-relaxatie te krijgen mbv cutting planes

z^*

$\underline{z}$ ondergrens van toegel. oplossing

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid Ax \leq b \} \leftarrow \text{polyeder}$$

P



S = de geheeltallige punten in P (toegelaten opl.)

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n$$

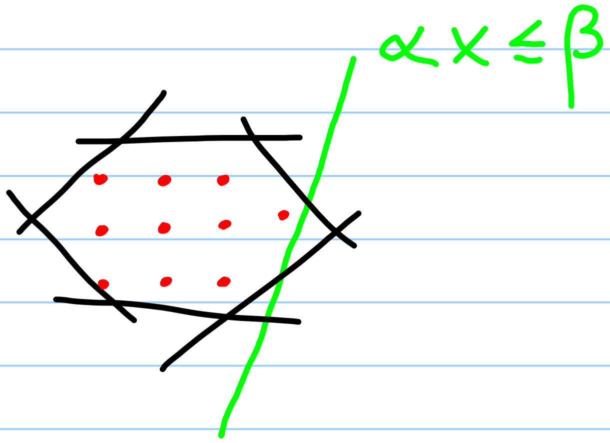
De polyeder P noemen we een **formulering** voor S.

NB: Er bestaan <u>oneindig veel</u> formuleringen voor S.

<u>Definitie:</u> Een ongelijkheid

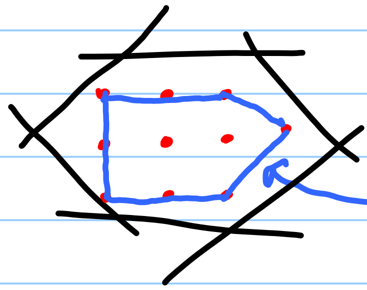
$$\alpha x \leq \beta$$

is <u>geldig</u> voor S als $\alpha x \leq \beta$ voor iedere $x \in S$.



Als we $\alpha x \leq \beta$ toevoegen aan P, dan krijgen we een nieuwe formulering P' die tenminste even "sterk" is als P, dwz $P' \subseteq P$.

Wat is de "sterkst mogelijke" formulering?



Het convexe omhulsel v/d toegelaten oplossingen

conv(S)

conv(S) is de kleinst mogelijke convexe verzameling die alle punten in S bevat.

NB! Als we een expliciete beschrijving van conv(S) zouden hebben, dan zouden we IP kunnen oplossen als een LP, want elk extreem punt van conv(S) is geheeltallig. Maar, bepalen van conv(S) kan in h a niet in polynomiale rekentijd.

In de praktijk streven we naar een goede benadering van conv(S).

Voorbeeld van geldige ongelijkheden die geen bepaalde probleemstructuur veronderstellen

Gomory's cutting planes:

Voorbeeld: (hetzelfde als B&B)

$$z^* = \max \; 4x_1 - x_2$$

$$\text{odv} \quad \begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 \\ x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ geheeltallig} \end{aligned}$$

Optimale basis van LP-relaxatie:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	$-59/7$			$-4/7$	$-1/7$	
x_1	$20/7$	1		$1/7$	$2/7$	
x_2	3		1	0	1	
s_3	$23/7$			$-2/7$	$10/7$	1

Neem rij 1:

$$x_1 + \frac{1}{7}s_1 + \frac{2}{7}s_2 = \frac{20}{7}$$

Neem geheeltallig en fractioneel deel van elke coëfficiënt: Ga daarbij naar beneden afronden! ($\Rightarrow$ $-4.5 = -5 + \frac{1}{2}$)

$$1 x_1 + (0 + 1/7) s_1 + (0 + 2/7) s_2 = 2 + 6/7$$

Herschrijf: (gehele getallen $\rightarrow$ links
fractionele " $\rightarrow$ rechts)

$$\underbrace{x_1 - 2}_{\text{geheelt.}} = \underbrace{6/7 - 1/7\, s_1 - 2/7\, s_2}_{\text{geheelt.}}$$

geheelt. $\Rightarrow$ geheelt.

$\rightarrow$ $6/7 - 1/7\, s_1 - 2/7\, s_2$ geheelt. variabelen en niet-positieve coëfficiënten $\Rightarrow$

$$6/7 - 1/7\, s_1 - 2/7\, s_2 \leq 0 \qquad (*)$$

Dit is een Gomory-snede!
("Gomory cutting plane")

Deze ongelijkheid snijdt de huidige LP-oplossing af! (In huidige LP: $s_1 = s_2 = 0$.)

Voeg de volgende rij toe aan het simplextableau en los op mbv het duale simplexalg. (zie werkcollege)

$$-\tfrac{1}{7}s_1 - \tfrac{2}{7}s_2 + s_4 = -\tfrac{6}{7}$$

Dat geeft nieuw LP-opt:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad z^*_{LP} = 15/2 < 59/7$$

Hoe ziet er deze snede uit in de oorspronkelijke variabelruimte?

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 14 - 7x_1 + 2x_2 \\ s_2 &= 3 - x_2 \end{aligned}\right\} \text{substitueer in } (*)$$

$$6/7 - 1/7\underbrace{(14 - 7x_1 + 2x_2)}_{s_1} - 2/7\underbrace{(3 - x_2)}_{s_2} \leq 0$$

$$6/7 - 2 + x_1 - 2/7\,x_2 - 6/7 + 2/7\,x_2 \leq 0$$

$$\boxed{x_1 \leq 2}$$

$$z^* = \max \ 4x_1 - x_2$$

odv

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 && (1) \\ x_2 &\leq 3 && (2) \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 && (3) \\ x_1 &\leq 2 && \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$, geheel.