Het transportprobleem

Note Title 27-11-2013

Lineair geheeltallig optimaliseringsprobleem.

Gegeven: m "bronnen" en n "bestemmingen"

Elke bron i heeft een aanbod aan goederen a_i.
" bestemming j heeft een vraag naar goederen d_j.
De kosten voor transport van één eenheid v/d goederen van i naar j is c_{ij}.

Vraag: Bepaal hoeveelheid goederen dat getransporteerd wordt tussen bron i en bestemming j zdd de som van de transportkosten geminimaliseerd wordt.

Model:

Input:
a_i, $i = 1,\dots,m$
d_j, $j = 1,\dots,n$
c_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$

Beslissingsvariabelen: x_{ij} = hoeveelheid goederen van i naar j
$i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

odv

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{(geheeltallig)} \quad \begin{array}{l} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{array}$$

Waarom {geheeltallig} ?

Omdat de voorwaardematrix TUM is !!!
Als $a_i \in \mathbb{Z}$ en $b_j \in \mathbb{Z}$ $\forall\ i,j$ zijn alle extreme punten van de LP-relaxatie geheeltallig!

Stel, we willen het probleem oplossen mbv Simplex. We moeten dan voor elke voorwaarde een artificiële variabele invoeren!
$\Rightarrow$ Veel iteraties in Fase I

Ipv Simplex gebruiken we een algoritme dat gebruik maakt van

a) het is erg makkelijk om een toegelaten oplossing te construeren

b) het duale probleem

Het bijbehorende duale probleem:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$\text{odv} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

$$u_i, v_j \ \text{vrij} \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Het transportprobleem heeft een toegelaten oplossing $\Leftrightarrow$ $\sum_i a_i = \sum_j d_j$

Als $\sum_i a_i > \sum_j d_j \Rightarrow$ voer een nieuwe "dummybestemming" $n+1$ in met $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$

$\sum a_i < \sum_j d_j \Rightarrow$ voer een nieuwe "dummybron $m+1$ in met $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j$

Voorbeeld :

c_{ij} :

i \ j	1	2	3	a_i
1	2	3	6	5
2	1	5	4	11
d_j	2	6	8	16 $= \sum_i a_i = \sum_j d_j$

$$
\begin{array}{llr}
\min & 2x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} & \\
\text{odv} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5 & (1) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 11 & (2) \\
& x_{11} + x_{21} = 2 & (3) \\
& x_{12} + x_{22} = 6 & (4) \\
& x_{13} + x_{23} = 8 & (5)
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \,,\; j = 1,2,3$$

Let op! De voorwaarden zijn lineair afhankelijk!
bv $(1)+(2)-(3)-(4) = (5) \Rightarrow$ één v/d voorwaarden is redundant $\rightarrow$ elke basisoplossing bestaat uit $m+n-1$ variabelen.

Gevolgen voor het duale probleem:
de waarde van één duale variabele kan vrij worden gekozen!

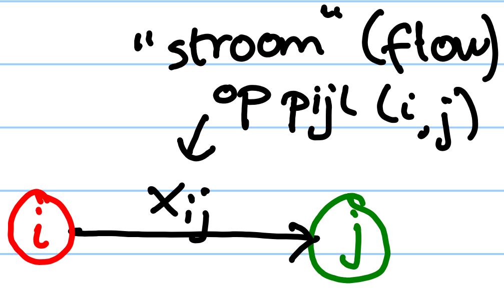
We kunnen de basisopl. weergeven in een soort "tableau" en in een netwerk.

Tableau:

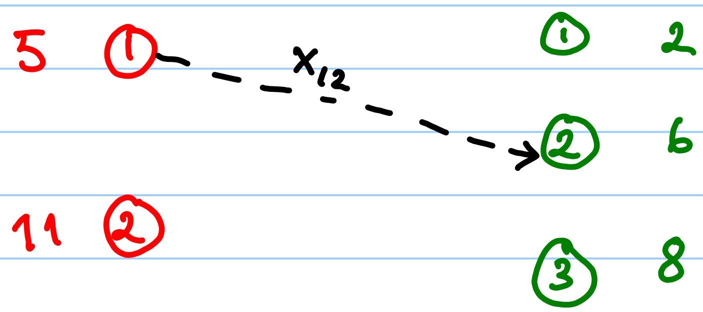
$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	2	3	6	5
2	1	5	4	11
d_j	2	6	8	

Dit noemen we een "cel" in het tableau

cel(i,j): $\boxed{c_{ij} \quad x_{ij}}$



Netwerk:



Bepalen van een startoplossing:

Hier beschrijf ik de "min-cost" regel.

$k := 0$

1. Vul max mogelijke stroom in de goedkoopste nog niet doorgestreepte cel (i,j)

2. a) als $x_{ij} = a_i$ streep rij i door
en zet $d_j := d_j - x_{ij}$
$a_i := 0$, $k := k+1$

b) als $x_{ij} = d_j$, streep kolom j door
en zet $a_i := a_i - x_{ij}$
$d_j := 0$, $k := k+1$

Als $x_{ij} = a_i = d_j$ en $k < n+m-1$, en rij i (kolom j) is doorgestreept bij 2 a) (2 b)), zet een nul ergens in kolom j (rij i) neer en streep ook deze kolom (rij) door, $k := k+1$

3. Als $k = m+n-1$, stop, anders ga naar stap 1.

Voorbeeld weer:

$k = 1$:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	(2)	(3)	(6)	5
2	(1) 2	(5)	(4)	~~11~~ 9
d_j	~~2~~ 0	6	8	

$k = 2$

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	(2)	(3) 5	(6)	~~5~~ 0
2	(1) 2	(5)	(4)	~~11~~ 9
d_j	~~2~~ 0	~~6~~ 1	8	

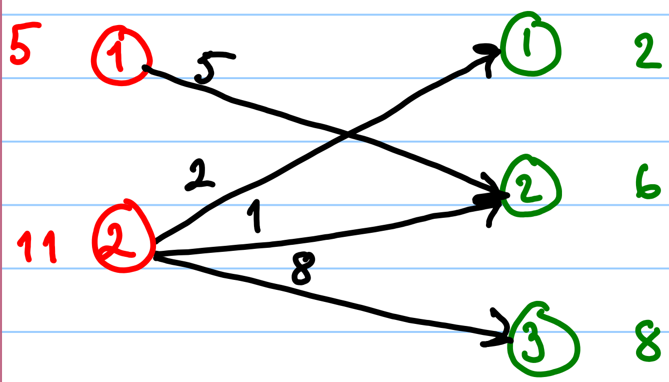
$k = 3$

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	^{2}	^{3} 5	^{6}	$\cancel{5}$ 0
2	^{1} 2	^{5}	^{4} 8	$\cancel{11}$ $\cancel{9}$ 1
d_j	$\cancel{2}$ 0	$\cancel{6}$ 1	$\cancel{8}$ 0	

$k = 4$:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	^{2}	^{3} 5	^{6}	$\cancel{5}$ 0
2	^{1} 2	^{5} 1	^{4} 8	$\cancel{11}$ $\cancel{9}$ $\cancel{1}$ 0
d_j	$\cancel{2}$ 0	$\cancel{6}$ $\cancel{1}$ 0	$\cancel{8}$ 0	

Oplossing in netwerk:



Als we alle pijlen ongericht maken is een basisoplossing in dit netwerk een opspannende boom!

Vraag: Is de huidige oplossing optimaal?
Equivalente vraag: Is $\bar{c}_{ij} \geq 0 \;\; \forall\, i,j$

c_{ij}

$\bar{c}_{ij}$ = slack in duale voorwaarde $u_i + v_j \leq c_{ij}$

$\Rightarrow \quad u_i + v_j + \bar{c}_{ij} = c_{ij}$

oftewel : $\boxed{\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j}$ $\quad \forall\, i,j$

NB: $\bar{c}_{ij} = 0$ voor alle basisvariabelen (door complementary slackness)

Gebruik dit om toegelaten duale oplossing te bepalen. Herinner dat je de waarde van een duale var. vrij mag kiezen! Kies bv $u_1 = 0$.

i \ j	1	2	3	a_i	u_i
1	(2)	(3) 5	(6)	5	0
2	(1) 2	(5) 1	(4) 8	11	2
d_j	2	6	8		
v_j	-1	3	2		

$\bar{c}_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 3 - 0 - v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 3$

$\bar{c}_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 5 - u_2 - 3 = 0 \Rightarrow u_2 = 2$

$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 1 - 2 - v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -1$

$\bar{c}_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 4 - 2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 2$

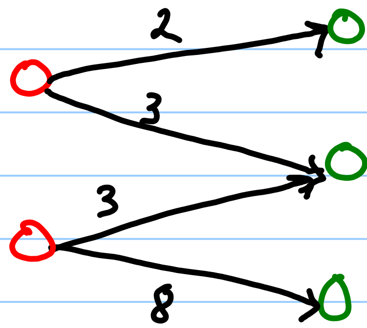
Nu kunnen we $\bar{c}_{ij}$ berekenen voor de niet-basisvar.:

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 2 - 0 - (-1) = 3 > 0$$
$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 2 = 4 > 0$$

$\bar{c}_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j \Rightarrow$ deze oplossing is toevallig ook optimaal !

Stel nu dat we beginnen met de volgende toegelaten oplossing:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	^{2} 2	^{3} 3	^{6}	5
2	^{1}	^{5} 3	^{4} 8	11
d_j	2	6	8	



Bepaal u_i, v_j door te gebruiken dat $u_1 = 0$, $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{12} = \bar{c}_{22} = \bar{c}_{23} = 0$

$\Rightarrow$

$i \backslash j$	1	2	3	a_i	u_i
1	^{2} 2	^{3} 3	^{6}	5	$u_1 = 0$
2	^{1}	^{5} 3	^{4} 8	11	$u_2 = 2$
d_j	2	6	8		
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 2$		

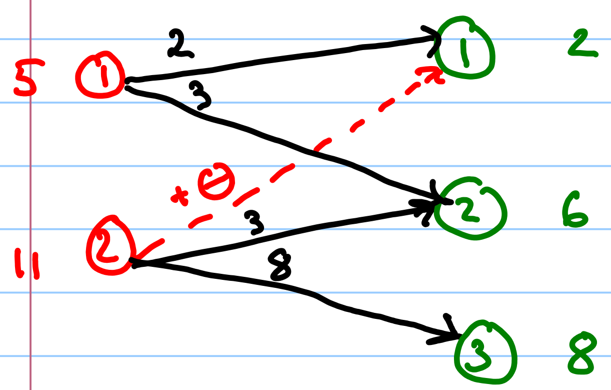
Is dit een optimale oplossing?

Bereken $\bar{c}_{13}$, $\bar{c}_{21}$:

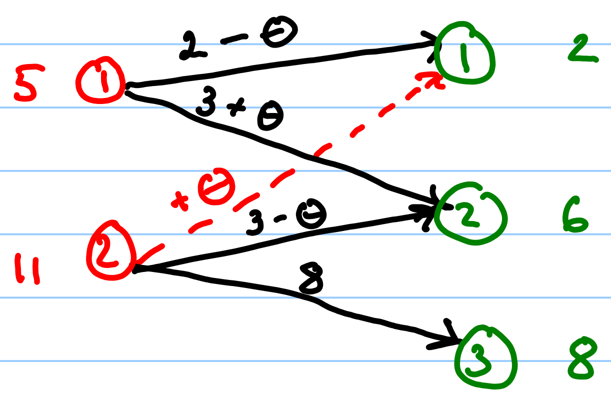
$$\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 2 > 0$$
$$\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 1 - 2 - 2 = -3 < 0$$

$\bar{c}_{21} < 0 \Rightarrow x_{21}$ wordt intredende basisvar.

Welke variabele gaat dan uit de basis?

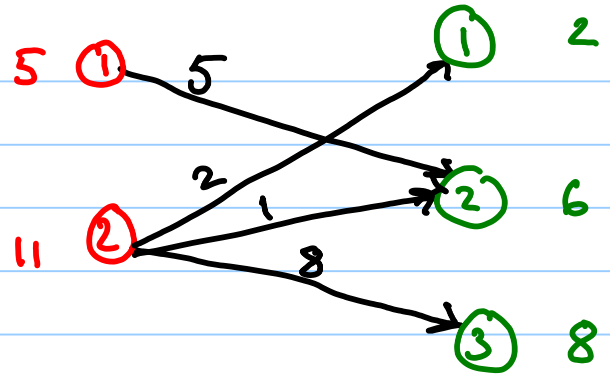


Door het toevoegen van kant (2,1) in het netwerk wordt een unieke kring gecreëerd.
De stroom in deze kring moet in evenwicht.



De uitbedende var. is de var. die eerst waarde 0 krijgt als we de waarde van θ laten toenemen
$\theta = \min\{2, 3\} = 2$
$\Rightarrow x_{11}$ is uitbedende var.

Nieuwe basisopl. na "pivot":



We hebben eerder bepaald dat dit een optimale oplossing is.

Optimale oplossing:

$x^*_{12} = 5$, $x^*_{21} = 2$, $x^*_{22} = 1$, $x^*_{23} = 8$

met kosten $z^* = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 54$