Algoritme van Ford & Fulkerson voor een maximale stroom, en een minimale snede

Allereerst: construeer bij toegelaten stroom (f,v) een residueel of te wel groeinetwerk $N_{(f,v)}$ als volgt

- $G_{(f,v)} = (V, A_{(f,v)})$

  met

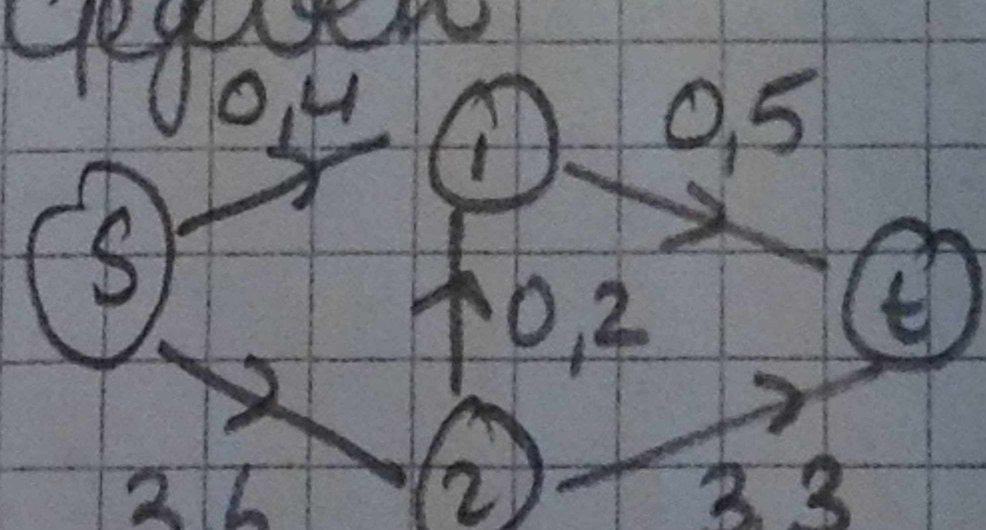
  $(i,j) \in A \Rightarrow$

  $\begin{cases} \cdot\ (i,j) \in A_{(f,v)} \text{ als } \delta(i,j) := b(i,j) - f(i,j) > 0 & \text{(voorwaartse pijl)} \\ \cdot\ (j,i) \in A_{(f,v)} \text{ als } \delta(i,j) := f(i,j) > 0 & \text{(achterwaartse pijl)} \end{cases}$

- $\delta(i,j)$ is capaciteit van $(i,j) \in A_{(f,v)}$

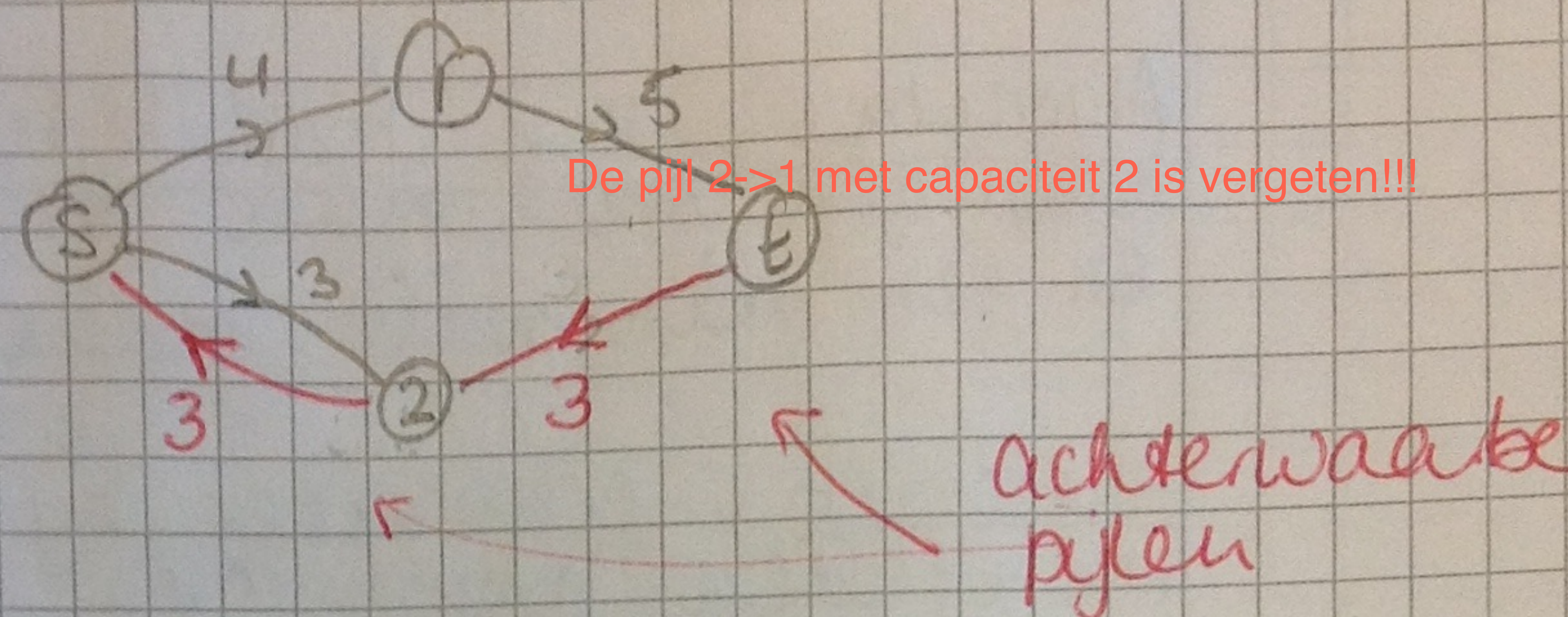
Notatie $\quad (i) \xrightarrow{f(i,j),\, b(i,j)} (j)$

Vb Gegeven



$(v = 3\ !)$

Dan is $G_{f,v}$



Algoritme

0 $v = 0$, $f \equiv 0$, $G_{f,v} = G$, $\delta(i,j) = b(i,j)$ $\forall (i,j) \in A$

1. Bepaal in $G_{f,v}$ een groeipad
   P van $s \to t$
   Als dat er niet is, ga naar 3

2 $\delta := \min\{\delta(i,j) \mid (i,j) \in P\}$

$v := v + \delta$

$$f(i,j) := \begin{cases} f(i,j) + \delta & \text{als } (i,j) \text{ voorwaarts} \\ f(i,j) - \delta & \text{als } (j,i) \text{ achterwaarts} \end{cases}$$

Construeer $G_{f,v}$

3 v = max totale waarde vd stroom
f = bijbehorende vector-stroom $s \to t$
$W = \{ i \in V \mid i$ bereikbaar in $G_{f,v}$ vanuit $s \}$
$(W, \bar{W})$ is (s,t)-snede met minimale capaciteit ✓

· VRAAG - Stopt algoritme?

· max stroom $\leq \sum_{(s,i) \in \mathcal{A}} b(s,i) < \infty$

· per iteratie neemt gevonden totale stroomwaarde met minstens 1 toe (we veronderstellen dat $b(i,j) \in \mathbb{Z}_+$)

$\Rightarrow$ In hoogstens $\sum_{(s,i) \in \mathcal{A}} b(s,i)$ iteraties stopt het algoritme

· VRAAG - is uitkomst optimaal?

Volgens Stelling 6.2 (iii) voldoende om te controleren dat

$$f(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} : i \in \overline{W}, j \in W$$

$$f(i,j) = b(i,j) \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} : i \in W, j \in \overline{W}$$

<u>Verificatie</u>

- In $G_{f,v}$ is er geen pijl (i,j) met $i \in W, j \in \overline{W}$ meer

Stel $(i,j) \in \mathcal{A}$, $i \in \overline{W}$, $j \in W$.

Deze pijl zit alleen niet in $\mathcal{A}_{f,v}$ als $\delta(i,j) = b(i,j) - f(i,j) = 0$,

m.a.w. $f(i,j) = b(i,j)$

• Laat $i \in \bar{W}$, $j \in W$

Stel $f(i,j) > 0$, dan bevat

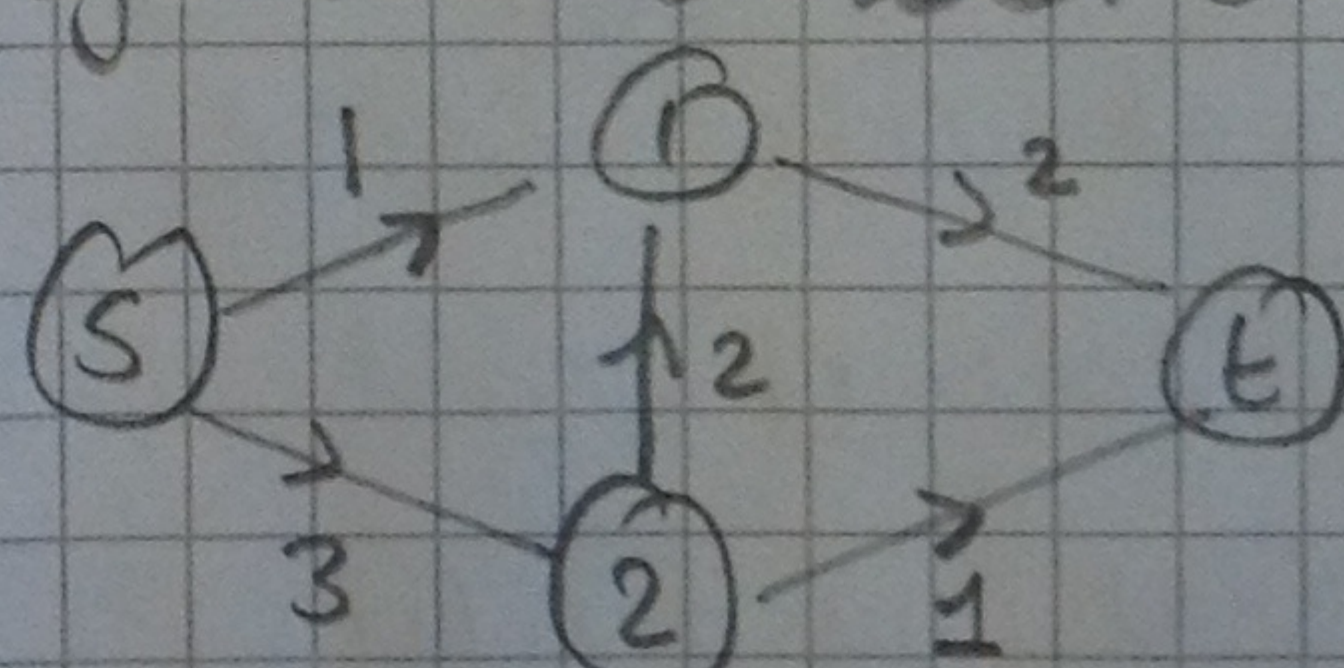
$\gamma_{f,v}$ de achterwaartse pijl (j,i)

Maar dan had W ook i bevat

Tegenspraak

OPGAVE

Bepaal een max. stroom in volgende netwerk



• Pas het algoritme van Ford Fulkerson toe met beginstroom : 2 over $S \to 2 \to 1 \to t$

Ofwel : $f(s,2) = f(2,1) = f(1,t) = 2$