Opgaven BK-B

Hoofdstuk 2

Opgave 0.1 We zeggen dat speler i een dummy is in het spel (N, v) in coalitievorm, als $v(S) \cup \{i\}) = v(S)$, voor alle coalities $S \subseteq N$, $i \in N$. I.h.b. geldt $v(\{i\}) = 0$. Een dummy speler kan aan geen enkele coalitie schade toebrengen. Stel dat speler 1 een dummy speler is, en $x \in K(v)$. Bewijs dat dan geldt: $x_1 = 0$.

Opgave 0.2 *Handschoenspel*
Stel dat N twee soorten spelers bevat: $N = P \cup Q$ met $P \cap Q = \emptyset$. Veronderstel dat de karakteristieke functie gedefinieerd is door:

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, |S \cap Q|\}.$$

Dit spel heeft de volgende interpretatie: elke speler uit P bezit een rechter-handschoen, en elke speler uit Q een linker. Als j spelers uit P een coalitie vormen met k spelers uit Q, dan bezitten ze samen $\min\{j, k\}$ paren.

- Stel dat $|P| = |Q| = 2$. Bepaal de kern.
- Stel $|P| = 2$ en $|Q| = 3$. Laat zien dat de kern uit 1 punt bestaat.
- Generaliseer naar willkeurige P en Q.

Hoofdstuk 3

Opgave 0.3 Stelling 3.22 poneert dat Algoritme 3.7 een minimale opspannende boom genereert. In het dictaat wordt wel bewezen dat het algoritme een boom oplevert, maar niet dat deze minimaal is. Toon aan dat elke tak die in het algoritme wordt toegevoegd, in een minimale opspannende boom zit.

Hoofdstuk 4

Opgave 0.4 Op college hebben we een alternatief bewijs van de matrix-tree stelling gegeven, dat toestaat dat de graaf parallelle takken bevat. Laat $G = (V, E)$ een graaf, en stel T is een deelboom van G, die niet alle knooppunten bevat. Zij $V_T \subsetneqq V$ de verzamelingen knooppunten van T.

1) Stel een formule op waarmee het aantal deelbomen van G dat T bevat, berekend kan worden via een gewogen som van determinanten. Beargumenteer de correctheid van deze formule.

2) Bereken het aantal deelbomen in de graaf K_5 dat de deelboom $T = (V_T, E_T)$ bevat met $V_T = \{1, 2\}$ en $E_T = \{(1, 2)\}$.

3) Beantwoord de vraag in het geval de K_5 parallelle takken bevat met multicipliteit van de takken gegeven door: $m_{12} = 2$, $m_{14} = 3$, $m_{35} = 2$, waarbij de overige multipliciteiten allemaal gelijk aan 1 zijn. Multipliciteit $m_{12} = 2$ betekent dat er twee parallelle takken tussen knooppunten 1 en 2 zijn.

Opgave 0.5 Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn, zonder lussen. Laat m_{ij} de multipliciteit van de tak tussen knooppunten i en j zijn. Aan elke tak (i, j) kennen we een gewicht toe. Als we de parallelle takken tussen knooppunten i en j nummeren, zeg $(i, j)^k$ is de k-de parallelle tak tussen i en j, $1 \leq k \leq m_{ij}$, dan krijgt deze tak gewicht w_{ij}^k. Het gewicht van een opspannende boom is dan het product van de gewichten van de takken in de boom.

Laat nu de $n \times n$, $|V| = n$, matrix $\mathsf{L}(G)$ gedefinieerd zijn door

$$\mathsf{L}(G) = \begin{cases} \sum_j \sum_{k=1}^{m_{ij}} w_{ij}^k, & j = i \\ -\sum_{k=1}^{m_{ij}} w_{ij}^k, & k \neq i. \end{cases}$$

Laat $Q^r(G)$ de matrix zijn die uit $\mathsf{L}(G)$ wordt verkregen door de r-de rij en r-de kolom te verwijderen, $r \in V$.

a) Bewijs de volgende variant van de matrix tree stelling: voor alle $r \in V$ geldt dat de som van de gewichten van alle opspannende bomen gelijk is aan $\mathsf{det}\, Q^r(G)$.

Laat T een deelboom zijn van G die niet alle knooppunten bevat. Zij $V_T \subsetneqq V$ de verzamelingen knooppunten van T, en E_T de takken van T.

b) Geef een formule voor de som van de gewichten van alle opspannende bomen van G die de deelboom T bevatten. Je hoeft deze niet te bewijzen. Hint: maak gebruik van onderdeel (a).

c) Beschouw nu de K_5, met gewichten der takken gegeven door $w_{ij} = |j - i|$, $j \neq i$. Bereken de som van de gewichten van de opspannende bomen die de deelboom $1 - 2 - 3$ bevatten.