Besliskunde 1/Optimalisering Week 1 Extra opgaven 1

We geven eerst een paar voorbeelden waarin een praktijkprobleem als een LP kan worden geformuleerd.

Voorbeeld 1

Op een machine kunnen 2 producten (A en B geheten) gefabriceerd worden uitgaande van 2 grondstoffen (C en D). Om een eenheid van product A te maken heeft de machine 4 kg van grondstof C, 1 kg van D en een tijdsduur van 2 uur nodig. Een eenheid van product B vereist 2 kg grondstof C, niets van D en de tijdsduur is 3 uur. De winst per geproduceerde eenheid is 21 euro voor product A en 14 euro voor product B. In totaal is 12 kg van grondstof C en 2 kg van grondstof D aanwezig. Bepaal het meest winstgevende productieschema gedurende de 12 uur dat de machine ter beschikking staat. Noemen we de te produceren hoeveelheden van de producten A en B resp. x_1 en x_2, dan is het wiskundig model:

$$max \left\{ 21x_1 + 14x_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

Voorbeeld 2

Een boer wil zijn land (10 ha) bebouwen met haver, aardappelen en/of suikerbieten. Hij wil nagaan hoeveel ha hij met elk van deze producten moet bebouwen om een zo hoog mogelijke jaarlijkse opbrengst te verkrijgen. Per ha is de jaarlijkse opbrengst voor haver 900 euro, voor aardappelen 1200 euro en voor suikerbieten 1700 euro.
Hij moet echter rekening houden met een aantal beperkingen. Voor de zes perioden waarin het jaar is verdeeld, gelden de volgende gegevens:

	arbeidsbehoefte in uren per ha			beschikbare
	haver	aardappelen	suikerbieten	arbeidsuren
periode 1	3	24	160	370
periode 2	-	17	100	310
periode 3	-	5	11	250
periode 4	45	-	-	250
periode 5	-	200	-	370
periode 6	-	-	120	470

Bovendien mag hoogstens een derde deel van de grond gebruikt worden voor het verbouwen van aardappelen, hoogstens een vierde deel voor suikerbieten en hoogstens de helft voor haver.

We stellen nu het model op. Laat jaarlijks x_1 ha met haver bebouwd worden, x_2 ha met aardappelen en x_3 ha voor suikerbieten.

De beperkingen voor de arbeidsuren worden:

$$3x_1 + 24x_2 + 160x_3 \leq 370 \text{ voor periode 1 (voor de andere perioden gaat het analoog).}$$

Voor de beperkingen van de grond geldt:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10;\ x_1 \leq 5;\ x_2 \leq 3\frac{1}{3};\ x_3 \leq 2\frac{1}{2}.$$

De doelfunctie die gemaximaliseerd moet worden is

$$900x_1 + 1200x_2 + 1700x_3.$$

Hiermee wordt het LP-probleem:

$$max \left\{ 900x_1 + 1200x_2 + 1700x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcrl} 3x_1 & + & 24x_2 & + & 160x_3 & \leq & 370; & x_1 \geq 0 \\ & & 17x_2 & + & 100x_3 & \leq & 310; & x_2 \geq 0 \\ & & 5x_2 & + & 11x_3 & \leq & 250; & x_3 \geq 0 \\ 45x_1 & & & & x_3 & \leq & 250 & \\ & & 200x_2 & & x_3 & \leq & 370 & \\ & & & & 120x_3 & \leq & 470 & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & \\ x_1 & & & & & \leq & 5 & \\ & & x_2 & & & \leq & 3\frac{1}{3} & \\ & & & & x_3 & \leq & 2\frac{1}{2} & \end{array} \right\}.$$

Voorbeeld 3 *Maatschappen*

Laten A, B, C en D maatschappen zijn van één grote maatschappij. A kan een bepaalde hoeveelheid, zeg x_1, inkopen. Tien procent daarvan wordt gebruikt om P_1 te maken en negentig procent voor P_2 (10 % gaat verloren). A verkoopt de producten P_1 en P_2 aan B, C en D. D kan ook P_2 van derden kopen, zeg x_9, en deze geheel of gedeeltelijk doorverkopen aan C. De onderlingen relatie en de capaciteiten staan in het schema, dat verderop is getekend. Hierin staat ook de betekenis van de variabelen $x_i,\ 1 \leq i \leq 11$ aangegeven.

De factuurprijzen (interne verrekenprijzen) zijn:

P_1: $A \to B$ en $A \to C$: 8 euro.

P_2: $A \to C$ en $A \to D$: 8 euro; $D \to C$: 10 euro.

De transportkosten (te betalen door de ontvanger) zijn:

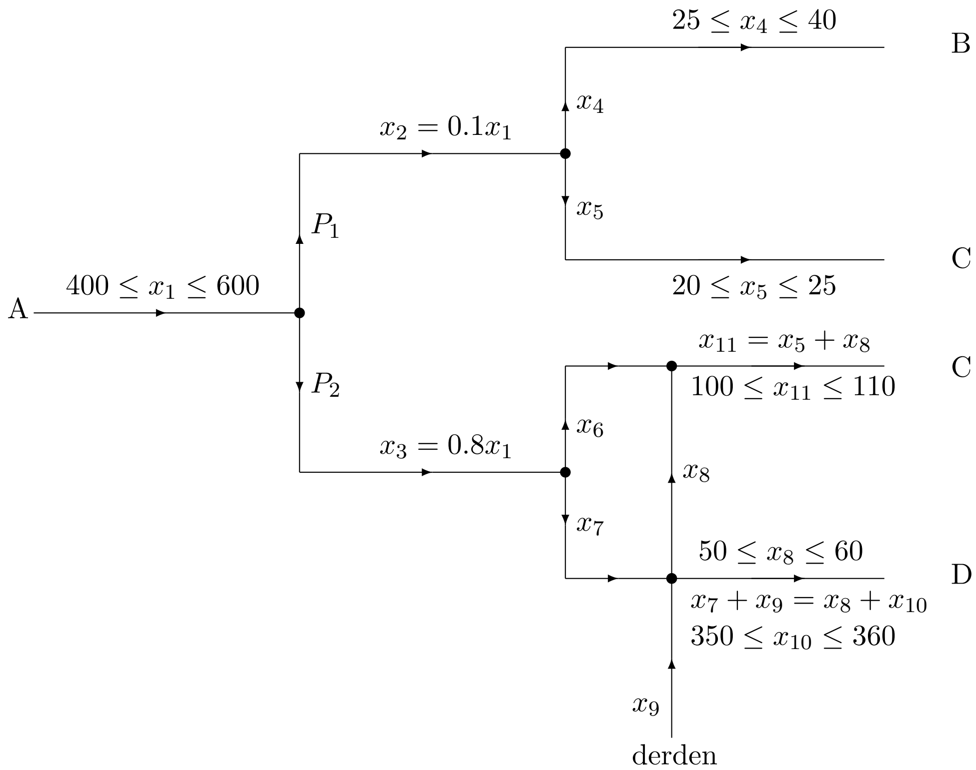
P_1: $A \to B$: 1 euro; $A \to C$: 2 euro.

P_2: $A \to C$: 4 euro; $A \to D$: 2 euro; $D \to C$: 1 euro.

De inkoopkosten zijn (per eenheid): x_1 3 euro en x_9 10 euro.

De verkoopkosten zijn (per eenheid): x_4 en x_5 15 euro, x_{10} en x_{11} 12 euro.

De doelstelling is het maximaliseren van de totale netto omzet.



Maatschap A betaalt $3x_1$ aan inkoop en ontvangt $8x_4$ (van B), $8x_5$ (van C), $8x_6$ (van C) en $8x_7$ (van D). Maatschap B betaalt $8x_4$ (aan A) en x_4 (aan transportkosten); B ontvangt $15x_4$ aan verkoop. Maatschap C betaalt $8x_5 + 8x_6$ (aan A), $10x_8$ (aan D) en $2x_5 + 4x_6 + x_8$ (aan transportkosten); C ontvangt $15x_5 + 12x_{11}$ aan verkoop. Maatschap D betaalt $8x_7$ (aan A), $10x_9$ (aan derden) en $2x_7$ (aan transportkosten); D ontvangt $12x_{10}$ (aan verkoop) en $10x_8$ (van C).

Omdat interne verekeningen niet van belang zijn, is de functie die gemaximaliseerd moet worden: $-3x_1 - x_4 + 15x_4 - 2x_5 - 4x_6 - x_8 + 15x_5 + 12x_{11} - 10x_9 - 2x_7 + 12x_{10}$.

De beperkingen zijn, naast de niet-negativiteiteisen van alle variabelen:

$$\begin{array}{rcccrl rcccrl rcll rcl}
400 & \leq & x_1 & \leq & 600; & & 100 & \leq & x_{11} & \leq & 110; & & x_2 & = & 0.1x_1; & & x_3 & = & x_6 + x_7; \\
25 & \leq & x_4 & \leq & 40; & & 50 & \leq & x_8 & \leq & 60; & & x_3 & = & 0.8x_1; & & x_{11} & = & x_6 + x_8; \\
20 & \leq & x_5 & \leq & 25; & & 350 & \leq & x_{10} & \leq & 360; & & x_2 & = & x_4 + x_5; & & x_7 + x_9 & = & x_8 + x_{10}.
\end{array}$$

Hiermee is de LP-formulering voor het maatschappen probleem gevonden.

Opgave 1

Een bedrijf produceert 4 producten: A, B, C en D. Ieder product vereist, per eenheid die wordt geproduceerd, een gegeven aantal uren werk op 3 machines en eveneens een bepaalde gegeven hoeveelheid grondstof (in kg). De 3 machines zijn 400, 500 resp. 300 uur beschikbaar, en er is 150 kg grondstof aanwezig. Ieder product levert per eenheid een bepaalde winst op (in euro's). De gegevens van dit probleem staan in onderstaande tabel.

	A	B	C	D	beschikbaar
machine 1	1.0	1.0	0.5	0.5	400
machine 2	0.5	0.7	0.8	0.5	500
machine 3	0.3	0.2	0.5	0.3	300
grondstof	0.2	0.3	0.2	0.2	150
winst	5	12	6	7	

Welk productieschema maximaliseert de winst? Geef een LP-formulering om dit probleem op te lossen

Opgave 2
Een bedrijf produceert luxe en gewone zeep. De voorspellingen voor de vraag gedurende de 12 maanden van het jaar zijn (in eenheden van 1000 dozen):

maand	gewone zeep	luxe zeep	maand	gewone zeep	luxe zeep
januari	40	24	juli	124	165
februari	61	27	augustus	135	161
maart	64	61	september	97	147
april	83	109	oktober	84	114
mei	88	126	november	76	62
juni	106	137	december	51	46

Het bedrijf heeft één machine waarmee zowel gewone zeep als luxe zeep geproduceerd kan worden. Deze machine kan 180.000 dozen zeep per maand produceren in normale werktijden. Als er overgewerkt wordt kunnen er nog eens 30.000 dozen extra per maand worden geproduceerd. Dit overwerk kost extra geld: 1 euro per doos luxe zeep en 0,80 euro per doos gewone zeep.
De vraag is in de zomer groter dan er geproduceerd kan worden incl. overwerk. Er zal dus voorraad moeten worden opgebouwd om aan deze vraag te kunnen voldoen. Het opslaan van zeep kost 0,10 euro per doos per maand.
De vraagstelling luidt: welk productieschema moet worden gehanteerd om in iedere maand aan de vraag te kunnen voldoen en zodanig dat de totale kosten minimaal zijn?
Geef een LP-formulering om dit probleem op te lossen.

Opgave 3
Voor LP-problemen met k vrije variabelen geeft de substitutie $x_j = x_j^+ - x_j^-$ met $x_j^+, x_j^- \geq 0$ een equivalente formulering met k extra variabelen.
Toon aan dat het mogelijk is om een equivalente formulering te verkrijgen waarin alle variabelen niet-negatief zijn met slechts één extra niet-negatieve variabele.
<u>Aanwijzing:</u>
Vervang x_j door $y_j - w$ zdd. $w \geq 0$ en $y_j \geq 0$ voor alle j; druk w uit in de x_j's.