Hoofdstuk 2. Aanvullingen Markovketens

Betere formulering van Stelling 2.20.

Stelling. (**St. 2.20**) *Laat C een gesloten klasse zijn, en $j \in C$. Dan geldt dat $\{\mu_{ij}\}_{i\in C}$ zijn de minimale niet-negatieve oplossing (in $[0,\infty]$) van het stelsel vergelijkingen*

$$x_i = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k, \quad i \in C.$$

Als er een eindige niet-negatieve oplossing is, dan is j positief recurrent. Als C eindig is, dan is de oplossing uniek en eindig.

Hieruit volgt nu onmiddellijk: als C eindig en gesloten, dan zijn alle toestanden van C positief recurrent.

Herformulering Stelling 2.21 en gevolgen. Laten $\mathsf{R_1},\ldots,\mathsf{R_m}$, $m \le \infty$, de recurrente klassen van de Markov keten zijn en T de verzameling van transiënte toestanden.

Stelling. (**St. 2.21**) $P^* = \lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n-1} P^{(t)}/n$ *bestaat met de eigenschappen*

(I) $p^*_{jj} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{jj}}, & \textit{als } j \in \cup_k \mathsf{R_k} \\ 0, & \textit{als } j \in \mathsf{T}. \end{cases}$

(II) $p^*_{ij} = f_{ij}p^*_{jj}$, $i,j \in \boldsymbol{S}$

(III) $p^*_{jj} = \mathsf{E}\big(\sum_{t=0}^{Y_1-1}\mathbf{1}_{\{j\}}(X_t)\,|\,X_0 = i\big)$, *voor $i,j \in \mathsf{R_k}$ met i positief recurrent, $1 \le k \le m$. Hierbij is $Y_1 = \min\{t \ge 1\,|\,X_t = i\}$.*

De gevolgen **a, b, c** en **d** volgen hieruit, zoals in het dictaat staat. Op pagina 28, in onderdeel **(d)** staan typefoutjes.

d) $P^*P = P^*$. Je kunt weer nagaan dat de enige niet-triviale gevallen zijn wanneer $i \in \mathsf{T}\cup\mathsf{R_k}$ en $j \in \mathsf{R_k}$, met $\mathsf{R_k}$ een positief recurrente klasse. Laat $i \in \mathsf{R_k}$. Dan geldt

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} p_{ij}^{(t)}}{n} = \frac{\sum_{l\in\mathsf{R_k}}\sum_{t=0}^{n-1} p_{il}^{(t)}p_{lj}}{n}.$$

Dus

$$\begin{aligned} p^*_{ij} &= \liminf_{n\to\infty}\sum_{l\in\mathsf{R_k}}\frac{\sum_{t=0}^{n-1}p_{il}^{(t)}}{n}\cdot p_{lj} \\ &\ge \sum_{l\in\mathsf{R_k}}\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{t=0}^{n-1}p_{il}^{(t)}}{n}\cdot p_{lj} \\ &= \sum_{l\in\mathsf{R_k}} p^*_{il}p_{lj}. \end{aligned}$$

Stel nu, dat er een $j \in \mathsf{R_k}$ is en $\epsilon > 0$ met $p^*_{ij} \geq \epsilon + \sum_{l \in \mathsf{R_k}} p^*_{il} p_{lj}$. Dan geldt

$$1 = \sum_{j \in \mathsf{R_k}} p^*_{ij} \geq \epsilon + \sum_{l,j \in \mathsf{R_k}} p^*_{il} p_{lj} = \epsilon + 1,$$

tegenspraak. Dus geldt gelijkheid. Het geval dat $i \in \mathsf{T}$ en $j \in \mathsf{R_k}$ volgt hieruit direct.

Uit eigenschap (II) volgt dat de rijen van P^* van toestanden in dezelfde recurrente klassen allemaal gelijk zijn, en, zoals in het dictaat uitgelegd, een stationaire verdeling zijn.

Stelling. (**St. 2.25**) *Zij x een stationaire kansverdeling van P. Laten $\mathsf{R_k}$, $1 \leq k \leq m$, $m \leq \infty$, de positief recurrente klassen zijn en $\mathsf{R_0}$ de vereniging van all nul-recurrente klassen. Voor $1 \leq k \leq m$, laat $P^*_{i_k \bullet}$ de rij van een toestand $i_k \in \mathsf{R_k}$ zijn. Dan geldt dat er getallen $c_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$, met $\sum_k c_k = 1$, zijn, zodat*

$$x = \sum_{k=1}^{m} c_k P^*_{i_k \bullet},$$

d.w.z. dat $P_{i_k \bullet}$, $1 \leq k \leq m$, alle stationaire verdelingen voortbrengen.

Het gevolg hiervan is, dat in een Markovketen met één positief recurrente klasse, er precies één stationaire verdeling is, en wel een rij van P^* behorend bij een positief recurrente toestand.

Hoofdstuk 3. Aaanvullingen Vernieuwingstheorie

Poissonproces Zij $\lambda \geq 0$, en laten $X_1, X_2, \ldots$ onderling onafhankelijk $\exp(\lambda)$ verdeelde stochastische grootheden zijn, d.w.z.

$$\mathsf{P}\{X_i \geq x\} = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

en $\mathsf{E}(X_i) = 1/\lambda$, $i = 1, 2, \ldots$. Het geassocieerde vernieuwingsproces $N(t)$, $t \geq 0$, heet een Poisson proces met parameter λ.

We hebben op college afgeleid, dat

$$\mathsf{P}\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

oftewel $N(t)$ heeft een Poissonverdeling met parameter λt.

Voor het bewijs hebben we gebruik gemaakt van het feit dat de kansverdeling van $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ een Gammaverdeling heeft met parameters (n, λ), notatie: $S_n \stackrel{\mathsf{d}}{=} \Gamma(n, \lambda)$. D.w.z., de dichtheid $f_{(n,\lambda}(t)$, $t \geq 0$, van S_n is gegeven door

$$f_{(n,\lambda)}(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0,$$

en

$$\mathsf{P}\{S_n \geq x\} = \int_x^\infty f_{(n,\lambda)}(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0.$$

Verder hadden we op college aangetoond dat de tijdsduur tot de eerstvolgende vernieuwing na tijdstip t een exponentiële verdeling heeft met parameter λ, formeel:

$$\mathsf{P}\{S_{N(t)+1} - t \geq y\} = e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0.$$

De geheugenloosheid van de exponentiële verdeling zorgt voor nog enkele prettige eigenschappen, die we zonder bewijs noemen:

1) $N(t+s) - N(t)$ heeft dezelfde kansverdeling als $N(s)$, $s, t \geq 0$.

2) $N(t+s) - N(s)$ en $N(s)$ zijn onderling onafhankelijk, $s, t \geq 0$.

Hieronder beschouwen we nog enige andere eigenschappen van het Poisson proces.

Opgave VT.1

Laten X en Y twee onderling onafhankelijke stochasten zijn, die beide exponentieel verdeeld zijn met parameters respectievelijk λ en μ.

a) Laat zien dat $\min(X, Y)$ een exponentiële verdeling heeft met parameter $\lambda + \mu$. Bereken $\mathsf{P}\{X = \min(X, Y)\}$.

b) Zij $t \geq 0$. Bewijs dat de tijdsduur tot de eerstvolgende vernieuwing na t onafhankelijk is van $N(t)$, m.a.w. bewijs dat

$$\mathsf{P}\{N(t) = n, S_{N(t)+1} - t > y\} = \mathsf{P}\{N(t) = n\} \cdot \mathsf{P}\{S_{N(t)+1} - t > y\}, \quad y \geq 0, n = 0, 1, \ldots.$$

c) Laten $N_1(t)$, $t \geq 0$, en $N_2(t)$, $t \geq 0$, onderling onafhankelijke Poissonprocessen zijn, met parameters respectievelijk λ en μ. Stel dat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de tussentijden van $N_1(t)$ zijn en $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ die van $N_2(t)$. Onafhankelijkheid van de twee bovenstaande Poissonprocessen wil zeggen dat voor elke $k, l \in \mathbf{N}$, en rijen niet-negatieve, reële getallen $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $s_1, \ldots, s_l$, geldt dat

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X_1 \leq t_1, \ldots, X_k \leq t_k, Y_1 \leq s_1, \ldots, Y_l \leq s_l\} \\ = \mathsf{P}\{X_1 \leq t_1, \ldots, X_k \leq t_k\}\mathsf{P}\{Y_1 \leq s_1, \ldots, Y_l \leq s_l\}.\end{aligned}$$

Beargumenteer, dat $N_1(t) + N_2(t)$, $t \geq 0$, een Poisson proces is met parameter $\lambda + \mu$.

Opgave VT.2

Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameter λ. Laat verder K een geometrisch verdeelde stochast zijn met succesparameter p, ofwel

$$\mathsf{P}\{K = j\} = (1-p)^{j-1}p,$$

die onafhankelijk is van $X_1, X_2, \ldots$. Laat vervolgens de stochast Y gegeven zijn door $Y = \sum_{j=1}^{K} X_j$.

a) Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter λp.

Beschouw een Poisson proces $N(t)$, $t \geq 0$, met parameter λ. Stel dat we elke gebeurtenis gegenereerd door dit Poisson proces registreren met kans p. Dit gebeurt onderling onafhankelijk: het al dan niet registreren van de ene gebeurtenis geeft geen informatie over of we een andere gebeurtenis wel of niet zullen registreren. Laat $R(t)$ het aantal *geregistreerde* gebeurtenissen tot tijdstip t. We noemen $R(t)$, $t \geq 0$, vervolgens een uitgedund telproces.

b) Bereken $\mathsf{P}\{R(t) = k|N(t) = n\}$.

c) Bewijs dat $R(t)$, $t \geq 0$, een Poisson proces is met parameter λp.

Opgave VT.3 Laat $N(t)$, $t \geq 0$ een Poisson proces zijn met parameter λ, met tussentijden $X_1, X_2, \ldots$. Laten $U_1, ..., U_k$ onderling onafhankelijke continue stochasten zijn met een uniforme verdeling op $(0, t)$ (d.w.z. $\mathsf{P}\{U_i \geq s\} = 1 - s/t$, $s \in (0, t)$).

a) Laat zien dat $\mathsf{P}\{(X_1 \leq s|N(t) = k) = 1 - (1 - \frac{s}{t})^k$, $s \leq t$. Hint: aan welke eigenschap moet $N(s)$ voldoen als $X_1 \leq s$?

b) Laat zien dat $\mathsf{P}\{\min(U_1, ..., U_k) \leq s\} = 1 - (1 - \frac{s}{t})^k$, $s \leq t$.

c) Kennelijk geldt dat $\mathsf{P}\{(X_1 \leq s|N(t) = k) = \mathsf{P}\{\min(U_1, ..., U_k) \leq s\}$. Geef hiervoor een intuïtieve uitleg.

N.B. Bij de onderstaande opgaven mag gebruik gemaakt worden van de eigenschappen van het Poisson proces die boven vermeld staan **(al dan niet in een opgave!)**.

Opgave VT.4 De voetbalclubs Ajax en R.K.S.V. Nuenen spelen in de Amsterdam ArenA een voetbalwedstrijd, die bestaat uit twee helften van elk precies 45 minuten. De verwachting van het aantal doelpunten dat in een willekeurige helft valt is gelijk aan 5. Doelpunten van Ajax en doelpunten van R.K.S.V. Nuenen vallen elk volgens een Poisson proces. Je mag er van uit gaan dat deze twee processen onafhankelijk zijn. Verder is gegeven dat Ajax gemiddeld gesproken anderhalf keer zoveel doelpunten maakt als R.K.S.V. Nuenen, en dat er in de eerste helft in totaal precies 3 doelpunten vallen. Licht je antwoorden bij onderstaande opgaven kort toe!

a) Wat is de kans dat er in de eerste 10 minuten van de eerste helft twee doelpunten vallen?

b) Wat is de kans dat er in de eerste 10 minuten van de tweede helft twee doelpunten vallen voor Ajax, en een voor R.K.S.V. Nuenen?

c) Wat is de kans dat Ajax meer doelpunten maakt dan R.K.S.V. Nuenen in de eerste helft?

d) Wat is de kans dat de wedstrijd met 4-0 wordt afgesloten in het voordeel van Ajax?

Opgave VT.5 In de immer zo pittoreske gemeente Ermelo in Gelderland liggen 10 dorpen, waarvan één ook de naam Ermelo draagt. Uit statistische analyse blijkt dat de tijd tussen twee elektriciteitsstoringen in de gemeente exponentieel verdeeld is met verwachting een half jaar. Tijden tussen twee elektriciteitsstoringen zijn onderling onafhankelijk. Ook blijkt dat een elektriciteitsstoring in de gemeente met kans 0,75 niet het dorp zelf treft, onafhankelijk van eerdere of toekomstige elektriciteitsstoringen. Licht je antwoorden bij onderstaande opgaven kort toe.

a) Wat is de kans dat in het komende half jaar zich drie elektriciteitsstoringen in het dorp Ermelo voordoen, en twee in de overige 9 dorpen?

b) Wat is de kans dat van de eerstvolgende vijf elektriciteitsstoringen in de gemeente, zich twee in het dorp Ermelo voordoen?

c) Wat is de kans dat de eerstvolgende elektriciteitsstoring in het dorp Ermelo zich pas na het komende jaar voordoet?

d) Stel dat er, bij wijze van hoge uitzondering, zich de komende week drie elektriciteitsstoringen voordoen. Hoe lang duurt het naar verwachting vanaf nu totdat de eerste van de drie zich voordoet?

Opgave VT.6 De illustere meneer X vervangt de batterij van zijn telefoon wanneer deze kapot gaat. Het vervangen van een batterij kost een negeerbare hoeveelheid tijd. De tijd (ofwel de levensduur) totdat een telefoonbatterij van meneer X het begeeft, gemeten vanaf de installatie, is uniform(6) verdeeld, gemeten in maanden. De levensduren van verschillende batterijen zijn onafhankelijk. Licht je antwoorden kort toe.

a) Laat meneer X 3 maanden geleden een nieuwe batterij geïnstalleerd hebben. Wat is het verwachte aantal batterijen dat door meneer X sindsdien tot nu toe is geïnstalleerd? Hint: zie Voorbeeld 3.3.

b) Meneer X is het vervangen van kapotte batterijen eigenlijk spuugzat, en hij besluit om per direct zijn strategie te veranderen. Wanneer een batterij al kapot gaat voordat deze 3 maanden oud is, dan vervangt meneer X deze. Echter, als een batterij na 3 maanden nog steeds functioneert, dan vervangt meneer X hem nu ook preventief, ook al functioneert hij nog steeds. Wat is bij deze nieuwe strategie de verwachte tijd tussen twee vervangingen van batterijen in de telefoon van meneer X? Wat is dus de lange-termijn vervangingsfrequentie van batterijen in de telefoon van meneer X?

c) Laat Z een uniform(6)-verdeelde stochast zijn. Toon aan, dat $\mathsf{P}\{Z \leq s \,|\, Z \leq 3\} = s/3$, $s \in [0, 3]$. Bereken hieruit $\mathsf{E}(Z \,|\, Z \leq 3\}$. Op de lange termijn, hoe vaak per maand moet meneer X naar verwachting zijn batterij vervangen omdat deze is stukgegaan?

Opgave VT.7 Meneer X besluit op willekeurige tijdstippen zijn telefoonbatterij door te meten en deze gegevens bij te houden. De meting geeft als resultaat een uitslag hoe lang de batterij nog mee gaat. Na een paar jaar middelt hij de verkregen uitkomsten. Hij verwacht dat dit ongeveer de helft van de door de fabrikant opgegeven levensduur zal zijn. Tot zijn verbazing is het gemiddelde groter dan de helft. Wat is hier aan de hand?

Laten $X_1, \ldots$ onderling onafhankelijke, identiek verdeelde, niet-negatieve stochasten zijn, met $0 < \mathsf{E}X_1 < \infty$, en $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$. Laat $u \in [0, \infty)$, en R^u de tijdsduur tot de volgende vernieuwing. M.a.w. $R^u = S_{N(u)+1} - u$. Op college hebben we aangetoond, dat

$$\frac{\mathsf{E}\int_{[0,t)} R^u du}{t} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{E}X_1^2}{\mathsf{E}X_1} > \frac{1}{2}\mathsf{E}X_1, \quad t \to \infty,$$

tenzij X_n deterministische variabelen zijn, dus met kans 1 gelijk aan de verwachting. Toegepast op het batterijenvoorbeeld: de gemiddelde verwachte resterende levensduur van een batterij is groter dan of gelijk aan de halve verwachte levensduur van een batterij. Hij is dan en slechts dan gelijk aan de halve verwachte levensduur, als de levensduur een *deterministische* stochast is, dus met kans 1 gelijk aan zijn verwachting.

Stel dat we geïnteresseerd zijn in de tijdsduur sinds de laatste vernieuwing voor u, noem dit A^u.

i) Bewijs dat

$$\frac{\mathsf{E}\int_{[0,t)} A^u du}{t} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathsf{E}X_1^2}{\mathsf{E}X_1} > \frac{1}{2}\mathsf{E}X_1.$$

ii) Uit bovenstaande kunnen we direct concluderen wat de gemiddelde verwachte duur van een willekeurig gekozen vernieuwingsinterval is. Hoe groot is deze? Kun je dit intuïtief verklaren? Om de intuïtie te verkrijgen, kun je bijvoorbeeld denken aan het geval dat de vernieuwingsintervallen met kans 1/2 duur 1 hebben en met kans 1/2 duur 2.

Hoofdstuk 4. Aanvullingen Markovprocessen

Bewijs Lemma 4.2 Merk op, dat

$$p_{ii}(h) = \mathsf{P}\{X(h) = i \,|\, X(0) = i\} \geq \mathsf{P}\{T_i > h \,|\, X(0) = i\} = e^{-\nu_i h}.$$

Dus

$$\frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \geq \frac{e^{-\nu_i h} - 1}{h},$$

zodat

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \geq -\nu_i.$$

Voor $j \neq i$, met $\nu_j \neq \nu_i$ geldt

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &\geq \mathsf{P}\{T_i < h, X(T_i) = j, T_i + T_j > h \,|\, X(0) = i\} = p_{ij} \int_0^h e^{-\nu_j(h-s)} e^{-\nu_i s} ds \\ &= \frac{\nu_i p_{ij}}{\nu_i - \nu_j} \big(e^{-\nu_j h} - e^{-\nu_i h}\big). \end{aligned}$$

Daaruit volgt dat

$$\liminf_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\geq \liminf_{h\downarrow 0}\frac{\nu_i}{\nu_i-\nu_j}\frac{\left(e^{-\nu_j s}-e^{-\nu_i s}\right)}{h}=\nu_i p_{ij}.$$

Als $\nu_i=\nu_j$, dan volgt dezelfde liminf op analoge wijze.
Nu krijgen we

$$\limsup_{h\downarrow 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h)}{h}\overset{*}{\leq}\limsup\frac{1-p_{ii}(h)}{h}\leq\limsup_{h\downarrow 0}\frac{1-e^{-\nu_i h}}{h}=-\liminf_{h\downarrow 0}\frac{e^{-\nu_i h}-1}{h}\leq\nu_i.$$

Anderzijds,

$$\liminf_{h\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}\overset{*}{\geq}\liminf_{h\downarrow 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h)}{h}\geq\sum_{j\neq i}\liminf_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\geq\sum_{j\neq i}\nu_i p_{ij}=\nu_i.$$

In de tweede ongelijkheid hebben we gebruik gemaakt van het Lemma van Fatou, en het feit dat $p_{ij}(h)\geq 0$.

Combinatie van bovenstaande ongelijkheden levert op, dat

- $\limsup_h \frac{1-p_{ii}(h)}{h}=\liminf_{h\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}=\nu_i$, zodat $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}$ bestaat en gelijk is aan ν_i.
- analoog: $\lim_{h\downarrow 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\nu_i$.
- analoog: $\sum_{j\neq i}\liminf_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\nu_i$.

We moeten nog zien te bewijzen dat $\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}$ bestaat en gelijk is aan $\nu_i p_{ij}$.

Stel dat de limiet voor zekere (i,j_0) niet bestaat. Dan is

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}>\liminf_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij_0}(h)}{h}\geq\nu_i p_{ij_0}.$$

Dus is er een rij $\{h_n\}_n$, $h_n\downarrow 0$, $n\to\infty$, en $\epsilon>0$ zodat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{ij_0}(h_n)}{h_n}=\limsup_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij_0}(h)}{h}=\nu_i p_{ij_0}+\epsilon.$$

Dus geldt

$$\nu_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h_n)}{h_n}\geq\sum_{j\neq i}\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{ij}(h_n)}{h_n}\geq\nu_i p_{ij_0}+\epsilon+\sum_{j\neq i,j_0}\nu_i p_{ij}=\nu_i+\epsilon.$$

Tegenspraak!

We gebruiken hier, dat $\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{ij}(h_n)}{h_n}\geq\liminf_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\geq\nu_i p_{ij}$ voor $j\neq j_0,i$ (je neemt het liminf over de kleinere collectie $\{h_n\}_n$, dus dat kan nooit iets kleiners opleveren dan de liminf over de collectie $[0,\infty)$). Verder, is $\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{ij}(h_n)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{ij}(h_n)}{h_n}=\nu_i p_{ij_0}+\epsilon$.

Opm. De ongelijkheden $\overset{*}{\leq}$ en $\overset{*}{\geq}$ zijn gelijkheden als de som van de kansen gelijk is aan 1, hetgeen we hier veronderstellen. In de algemene theorie van Markovprocessen is het niet altijd opportuun deze aanname te maken (er kan ook kansmassa 'verdwijnen'), maar in dat geval gaat de hele afleiding nog wel op door de gebruikte ongelijkheden in te zetten.

Herformulering Stelling 4.7 (ii) (de zuinigste vorm totnutoe)
Stel het MP heeft één gesloten klasse, zeg C, $C \subseteq \boldsymbol{S}$. Stel er is een oplossing van het stelsel

$$\sum_{i \in S} x_i q_{ij} = 0, \quad j \in \boldsymbol{S}.$$

Dan is $x_i \geq 0$ voor all $i \in \boldsymbol{S}$, of $x_i \leq 0$, voor alle $i \in \boldsymbol{S}$. Als $\sum_i |x_i| < \infty$, dan is $P_i := |x_i| / \sum_j |x_j|$, $i \in C$, de stationaire verdeling op C, d.w.z. dat $\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = P_j$, $i, j \in C$.

Als voor alle $i \notin C$ geldt dat $\mathsf{P}\{\exists t : X(t) \in C \,|\, X(0) = i\} = 1$, dan is $\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = P_j$ voor $i, j \in \boldsymbol{S}$.

Opgave VT.8 Een databank heeft N verschillende items die gebruikt worden voor transacties. Een transactie heeft m items nodig met kans $1/M$, $1 \leq m \leq N$, voor zekere $M \leq N$. Gegeven dat een transactie m items nodig heeft, is elke deelverzameling van m gevraagde items even waarschijnlijk. Aanvragen voor transacties komen binnen volgens een Poisson proces met parameter λ. De verwerkingstijd van een transactie die bestaat uit m items, is $\exp(\mu)$ verdeeld. Een item dat gebruikt wordt bij de behandeling van een transactie, is niet beschikbaar voor andere transacties zolang de verwerking duurt. Aanvragen voor transacties waarvoor niet alle items beschikbaar zijn, gaan verloren. Dit model kan beschreven worden door een Markovproces met als toestanden $(n_1, n_2, \ldots, n_M)$, waarbij n_m het aantal lopende transacties is met m items, $1 \leq m \leq M$.

a) Bepaal de overgangsintensiteiten van het Markovproces.

b) Toon voor $N = 4$ en $M = 2$ aan dat het proces reversibel is. Zal dit ook voor algemene N en M waar zijn?

c) Bepaal de stationaire verdeling voor $N = 4$ en $M = 2$.

Reversibiliteit voor een discrete-tijdsMarkovketen Laat $\{X_n\}_{n \in \{-\infty, \infty\}}$ een discrete-tijdsMarkovketen zijn, die al oneindig lang loopt. We veronderstellen dat de keten irreducibel is en positief recurrent.

Het hele reversibiliteitsbegrip kan analoog worden opgezet. De rol van Q in continue tijd wordt nu weer gespeeld door de overgangsmatrix P. We krijgen dan dat de Markovketen reversibel is d.e.s.d.a.

$$P_i p_{ij} = P_j p_{ji}, \quad i, j \in \boldsymbol{S},$$

waarbij $\{P_i\}_{i \in S}$ de stationaire verdeling van de Markovketen is. Dit is het analogon van (4.6.1) in het dictaat. Hiermee kunnen we ook Stelling 4.8 herformuleren voor het discrete-tijdsgeval.

Stelling 0.1. *De Markovketen is reversibel d.e.s.d.a. voor elke pijlenronde in de geassocieerde graaf geldt dat het product van de overgangskansen langs de pijlenronde gelijk is aan het product van de overgangskansen langs de omgekeerde ronde.*

Je kunt hiermee gemakkelijk laten zien dat een stochastische wandeling op een ongerichte graaf (zoals de webgraaf, die gebruikt wordt voor het berekenen van de Google PageRank), reversibel is.

Opgave VT.9 Laat $G = (V, E)$ een ongerichte graaf zijn, met knooppuntenverzameling $V = \{1, \ldots, n\}$, en takkenverzameling E een verzameling van ongeordende paren knooppunten. Laat $d(i)$ de graad van knooppunt i zijn, d.w.z. het aantal takken dat aan knooppunt i grenst, $i \in V$.

Een stochastische wandelaar loopt over de graaf, en kiest in elk knooppunt geheel willekeurig een aangrenzende tak. Dit is een discrete-tijdsMarkovketen met overgangsmatrix P, waarbij $p_{ij} = 1/d(i)$, voor alle knooppunten j met $(i, j) \in E$.

a) Laat zien dat de Markovketen reversibel is.

b) Leidt een formule voor de stationaire verdeling af, en toon de correctheid hiervan aan.

c) Beschouw nu een schaakbord met de gebruikelijke 64 velden. Zet een paard in één van de hoekpunten, en laat het over het schaakbord springen door steeds geheel willekeurig één van de mogelijke sprongen te kiezen. Hoe lang doet het paard er in verwachting over om in ditzelfde hoekpunt terug te keren? En hoe lang wanneer je het paard op één van de naburige velden laat beginnen?

Hoofdstuk 8. Aanvullingen Markov beslissingstheorie

Opgave VT.10 Het bewijs van Stelling 8.19 in het dictaat is gebaseerd op een argument dat gebruikt maakt van superharmonische vectoren. Een alternatief bewijs maakt gebruik van strategieverbetering.

Kies strategie f_0^∞, met $f_0(i) = 1$ (stoppen) als $i \in \boldsymbol{S}_0$, en $f_0(i)$ is willekeurig voor $i \notin \boldsymbol{S}_0$. Dan geldt dat $v_i(f_0^\infty) = r_i$, $i \in \boldsymbol{S}_0$. Algoritme 8.2 toepassen geeft een optimale strategie in eindig veel iteraties, zeg N. De strategie f_N^∞ is dus optimaal.

a) Laat zien dat $f_n(i) = 1$, voor $i \in \boldsymbol{S}_0$, $n = 1, \ldots$. Bij gevolg is stoppen op $\boldsymbol{S}_0$ optimaal.

b) Vervolgens willen we aantonen dat doorgaan in $i \notin \boldsymbol{S}_0 \cup \{\Delta\}$ optimaal is. Neem daartoe aan dat $f_N(i) = 1$ voor een toestand $i \notin \boldsymbol{S}_0 \cup \{\Delta\}$ en leidt een tegenspraak af.