Hoofdstuk 7

SPECIALE LINEAIRE MODELLEN

7.1 Unimodulariteit en totale unimodulariteit

Vele combinatorische optimaliseringsproblemen kunnen worden beschreven als het maximaliseren van een lineaire functie p^Tx over de *geheeltallige* punten van een polyhedron. Deze problemen zijn van het type

$$\max\{p^Tx \mid Ax \leq b;\; x \geq 0 \text{ en geheel}\}, \tag{7.1}$$

waarbij de matrix A en de vector b ook meestal geheeltallig zijn. Vaak gebruiken we dan de LP-relaxatie $\max\{p^Tx \mid Ax \leq b;\; x \geq 0\}$. Als de oplossing van de LP-relaxatie geheeltallig is, dan is het tevens een optimale oplossing van (7.1). In sommige gevallen kunnen we garanderen dat de oplossing van de LP-relaxatie geheeltallig is. Zoals bekend, is de optimale oplossing van de LP-relaxatie $x_B = B^{-1}b,\; x_N = 0$ met B een *basismatrix* van A. Wanneer b geheeltallig is en ook B^{-1}, dan is x_B eveneens geheeltallig. Uit de lineaire algebra (de *regel van Cramer*) is bekend dat B^{-1} geheeltallig is als $det(B) = \pm 1$. Indien de matrix A totaal unimodulair is, dan kun je garanderen dat iedere basismatrix B de determinantwaarde ± 1 heeft.

Een $m \times n$ matrix A met rang m heet *unimodulair* als alle elementen geheel zijn en de determinant van iedere $m \times m$ deelmatrix +1, -1 of 0 is; een matrix $m \times n$ matrix met willekeurige rang heet *totaal unimodulair* als de determinant van iedere vierkante deelmatrix +1, -1 of 0 is. Dus ook alle elementen van een totaal unimodulaire matrix zijn $+1, -1$ of 0. De volgende stelling geeft de relatie tussen unimodulariteit en de geheeltalligheid van hoekpunten van een LP-probleem.

Stelling 7.1
Zij A een $m \times n$ matrix A met rang m en met geheeltallige elementen.
Dan is A unimodulair d.e.s.d. als voor iedere geheeltallige m-vector b geldt dat het polyhedron $\{x \mid Ax = b\,;\; x \geq 0\}$ geheeltallige hoekpunten heeft.

Bewijs

$\Rightarrow$ Zij x een hoekpunt. Dan is er een niet-singuliere $m \times m$ deelmatrix B van A zdd. $Bx_B = b$. Omdat A unimodulair is, is $det(B) = +1$ of -1. Volgens de regel van Cramer is iedere component $(x_B)_j$ het quotiënt van twee determinanten met in de noemer $det(B)$ en in de teller de determinant van dezelfde matrix, alleen staat de in de j-de kolom vector b.
De teller is dus geheeltallig, zodat $(x_B)_j$ dat ook is.

$\Leftarrow$ Zij B een niet-singuliere $m \times m$ deelmatrix van A (voor singuliere $m \times m$ deelmatrices hoeft niets meer bewezen te worden). We zullen eerst aantonen dat $B^{-1}y$ geheel is voor iedere geheeltallige y. Neem een geheeltallige y, dan is er een geheeltallige w zdd. $z = B^{-1}y + w \geq 0$ is. Omdat $Bz = y + Bw$, is Bz geheeltallig. Kies nu $b = y + Bw$, dan is $Bz = b,\ z \geq 0$ met B een niet-singuliere $m \times m$ deelmatrix: z is dus een hoekpunt en volgens de aanname geheeltallig. Dan is $B^{-1}y = z - w$ ook geheeltallig. Maar dan is B^{-1} zelf ook geheeltallig (in te zien door voor y de eenheidsvectoren te nemen). Omdat $1 = det(B) \cdot det(B^{-1})$, moet gelden $det(B) = det(B^{-1}) = \pm 1$, d.w.z. A is unimodulair. $\square$

Een polytoop $P = \{x \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}$ heet *integraal* als ieder hoekpunt van P geheeltallig is. Het is duidelijk dat in dat geval de LP-relaxatie ook een optimale oplossing van (7.1) geeft. De volgende stelling geeft een verband tussen de begrippen totaal unimodulariteit en integrale polyhedra. De volgende stelling is afkomstig van Hoffman en Kruskal.[1] Hun bewijs is tamelijk lang. We volgen hier het veel kortere bewijs van Veinott en Dantzig.[2]

Stelling 7.2

Zij A een geheeltallige $m \times n$ matrix. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. A is totaal unimodulair.

2. Voor iedere geheeltallige m-vector b geldt dat het polyhedron $\{x \mid Ax \leq b\,;\ x \geq 0\}$ integraal is.

3. Iedere niet-singuliere vierkante deelmatrix van A heeft een geheeltallige inverse.

Bewijs

$1 \Rightarrow 2$:

Neem een geheeltallige b en laat x een hoekpunt zijn van $P = \{x \mid Ax \leq b\,;\ x \geq 0\}$. Door verschilvariabelen $y = b - Ax$ in te voeren, krijgen we $\{(x,y) \mid Ax + y = b\,;\ x,y \geq 0\}$ als equivalent polyhedron met bijbehorend hoekpunt (x,y). Dit punt is de unieke oplossing van $Bx_B = b$ met B een niet-singuliere $m \times m$ deelmatrix van (A, I). Omdat A totaal unimodulair is, is (A, I) ook totaal unimodulair (ga dit zelf na). Gebruik nu dat $det(B) = \pm 1$ en pas de regel van Cramer weer toe.

$2 \Rightarrow 3$:

[1] A.J. Hoffman and J.B. Kruskal, *Integral boundary points of convex polyhedra*, in: H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematical Study 38, Princeton University Press (1956) 223–246.

[2] A.F. Veinott Jr. and G.B. Dantzig, *Integral integer points*, SIAM Review 10 (1968) 371–372.

We zullen eerst bewijzen dat iedere niet-singuliere $m \times m$ deelmatrix B van (A, I) een geheeltallige inverse heeft. Het polyhedron $\{(x, y) \mid Ax + y = b\,;\; x, y \geq 0\}$ heeft ook geheeltallige hoekpunten. Volgens het bewijs van Stelling 7.1 (merk op dat (A, I) rang m heeft) is B^{-1} geheeltallig. Neem vervolgens een willekeurige niet-singuliere vierkante $k \times k$ deelmatrix C van A. Door de kolommen van A te nemen die bij C behoren en deze aan te vullen met de $m-k$ kolommen van I die behoren bij de $m-k$ rijen die niet tot C behoren, ontstaat een $m \times m$ deelmatrix B van (A, I). Eventueel na verwisseling van rijen is te schrijven: $B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & I_{m-k} \end{pmatrix}$. Omdat $det(B) = det(C) \neq 0$, is B niet-singulier. Bovendien is $B^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -DC^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$. Omdat B^{-1} geheeltallig is, is C^{-1} ook geheeltallig.

$3 \Rightarrow 1$:

Laat C een willekeurige niet-singuliere vierkante deelmatrix van A zijn. C^{-1} heeft geheeltallige elementen. Uit $1 = det(C) \cdot det(C^{-1})$, volgt: $det(C) = det(C^{-1}) = \pm 1$. □

Gevolg 7.3

Een geheeltallige matrix A is totaal unimodulair d.e.s.d. als voor iedere geheeltallige b en p het duale paar LP-problemen $\max\{p^T x \mid Ax \leq b\,;\; x \geq 0\}$ *en* $\min\{b^T u \mid A^T u \geq p\,;\; u \geq 0\}$ *geheeltallige optimale oplossingen heeft (indien deze problemen eindige oplossingen hebben).*

Bewijs

$\Rightarrow$ Volgens Stelling 7.2 heeft $\{x \mid Ax \leq b\,;\; x \geq 0\}$ geheeltallige hoekpunten, dus heeft het probleem $\max\{p^T x \mid Ax \leq b\,;\; x \geq 0\}$ een geheeltallig optimum. Omdat A totaal unimodulair is, is A^T ook totaal unimodulair. Volgens Stelling 7.2 heeft $\min\{b^T u \mid A^T u \geq p\,;\; u \geq 0\}$ geheeltallige hoekpunten, dus een geheeltallige optimale oplossing.

$\Leftarrow$ Omdat $\max\{p^T x \mid Ax \leq b\,;\; x \geq 0\}$ een geheeltallige optimale oplossing heeft voor iedere p, is ieder hoekpunt van $\{x \mid Ax \leq b\,;\; x \geq 0\}$ geheeltallig. Eveneens volgens Stelling 7.2 is de matrix A totaal unimodulair. □

Opmerking:

Het nagaan of een matrix al of niet totaal unimodulair is, is in feite een combinatorisch probleem. In 1980 slaagde Seymour er in om dit probleem met een polynomiaal algoritme op te lossen.[3] In 1990 vond Truemper een eenvoudiger algoritme met complexiteit $\mathcal{O}\big((n+m)^3\big)$.[4] Beide algoritmen vallen buiten het bereik van dit college. Als de matrix in iedere kolom maximaal twee niet-nul elementen heeft, dan is de controle op totaal unimodulariteit eenvoudig. De volgende stelling geeft het resultaat, afkomstig van Camion.[5]

---

[3] P.D. Seymour: *Decomposition of regular matroids*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 28 (1980) 305–359.

[4] K. Truemper: *A decomposition theory for matroids: V. Testing of matrix total unimodularity*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 49 (1990) 241–281.

[5] P. Camion: *Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires*, PhD Thesis, Université de Bruxelles, 1963.

Stelling 7.4
Zij A een matrix met elementen $0, +1, -1$ met in iedere kolom hoogstens twee niet-nul elementen. A is totaal unimodulair d.e.s.d. als de rijen van A in twee disjuncte deelverz. I_1 en I_2 zijn te verdelen zdd.
(1) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom hetzelfde teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot verschillende deelverz.
(2) als twee niet-nul elementen uit dezelfde kolom verschillend teken hebben, dan behoren de bijbehorende rijen tot dezelfde deelverz.

Bewijs
$\Rightarrow$ Laat A totaal unimodulair zijn en in iedere kolom precies twee niet-nul elementen hebben (in verband met wat moet worden aangetoond is dit geen beperking). Construeer de volgende niet-gerichte graaf: neem voor iedere rij een knooppunt en voor iedere kolom een tak; verbind de knooppunten i en j met een tak voor iedere kolom waarin in rij i en j twee niet-nul elementen hebben. Noem een tak *speciaal* als beide niet-nul elementen hetzelfde teken hebben; anders heet de tak *gewoon.*

We zullen allereerst aantonen dat iedere kring van de graaf een even aantal speciale takken heeft. Laat C een kring van de graaf zijn, zeg $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1\}$. Beschouw de vierkante deelmatrix van A voortgebracht door deze kring:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \beta_p \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{p-2} & \alpha_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \beta_{p-1} & \alpha_p \end{pmatrix}$$

Hierbij is $\alpha_j = \pm 1,\ \beta_j \pm 1$, $a_j = \beta_j$ als de j-de tak speciaal is en $a_j = -\beta_j$ als de j-de tak gewoon is.

Om de determinant van deze deelmatrix te bepalen ontwikkelen we hem naar de eerste rij:

$$\text{determinant} = \textstyle\prod_{j=1}^{p} \alpha_j + (-1)^{p-1} \prod_{j=1}^{p} \beta_j.$$

Als er een oneven aantal, zeg $2k+1$, speciale takken zijn, dan is dit gelijk aan:

$$\textstyle\prod_{j=1}^{p} \alpha_j + (-1)^{p-1}(-1)^{p-(2k+1)} \prod_{j=1}^{p} \alpha_j = 2\prod_{j=1}^{p} \alpha_j = \pm 2.$$

De matrix A is dus niet totaal unimodulair: iedere kring heeft dus een even aantal speciale takken. Perk nu alle gewone takken in, d.w.z. voeg de uiteinden samen tot één knooppunt (kies één van de twee) en laat de tak weg. De zo verkregen graaf heeft geen kringen meer van oneven lengte en is dus bipartiet, d.w.z. dat de knooppuntenverz. in twee deelverz. I_1 en I_2 is op te splitsen zdd. alle takken één uiteinde in I_1 en één in I_2 hebben.

Wijs vervolgens de knooppunten die door inperking zijn verdwenen toe aan de indexverz. waar het andere knooppunt toe behoort. Nu is eenvoudig na te gaan dat aan het gestelde in (1) en (2) is voldaan.

$\Leftarrow$ Veronderstel vervolgens dat er een splitsing van de rijenverz. is die aan (1) en (2) voldoet. Neem een willekeurige $(k \times k)$-deelmatrix B van A. We bewijzen de bewering met inductie naar k. Merk op dat het klopt voor $k = 1$. Neem nu k algemeen en kies een willekeurige kolom van B. Het aantal 1'en in deze kolom is 0, 1 of 2. Als de kolom geen 1'en bevat, dan is $det(B) = 0$. Als de kolom precies één 1 bevat, dan ontwikkelen we de determinant naar deze kolom: de determinant is dan $\pm\ det(B')$ voor de $(k-1) \times (k-1)$ matrix B' die uit B ontstaat door de rij en kolom die behoren bij het niet-nul element uit B weg te laten. Volgens de inductieveronderstelling klopt het gestelde. Op deze wijze is de stelling te bewijzen voor iedere deelmatrix B waarin niet alle kolommen twee 1'en bevatten. Beschouw tenslotte een B met in iedere kolom precies twee 1'en. Uit (1) en (2) geldt dat voor iedere kolom j: $\sum_{i \in I_1} b_{ij} = \sum_{i \in I_2} b_{ij}$, wat afhankelijkheid van de rijen inhoudt. Maar dit betekent dat $det(B) = 0$. □

De *incidentiematrix* $A(G)$ van een niet-gerichte graaf G met n knooppunten en m takken is een $n \times m$ matrix met in iedere kolom twee 1'en en wel op de plaatsen corresponderend met de twee knooppunten die de eindpunten zijn van de desbetreffende tak; de overige elementen zijn 0.
De *incidentiematrix* $A(G)$ van een gerichte graaf G met n knooppunten en m pijlen is een $n \times m$ matrix met in iedere kolom één $+1$ en één -1 en wel op de plaatsen corresponderend met de twee knooppunten die het beginpunt resp. het eindpunt zijn van de desbetreffende pijl; de overige elementen zijn 0.
Deze definities en Stelling 7.4 leiden direct tot de volgende resultaten, die verklaren waarom LP-problemen op grafen vaak een geheeltallige oplossing geven.

Stelling 7.5
De incidentiematrix van een niet-gerichte graaf is totaal unimodulair d.e.s.d. als de graaf bipartiet is.

Stelling 7.6
De incidentiematrix $A(G)$ van een gerichte graaf G is totaal unimodulair.

Vraag 7.1
Toon aan dat het polyhedron dat wordt bepaald door de ongelijkheden $y \leq 1;\ x_i \leq y,\ 1 \leq i \leq m$ geheeltallige hoekpunten heeft.

7.3 Transportprobleem

7.3.1 Inleiding

Er is een aantal, zeg m, depots van waaruit naar diverse, zeg n, bestemmingen goederen vervoerd moeten worden. De vraag kan dan gesteld worden hoeveel er vanuit de diverse depots naar de verschillende bestemmingen verzonden moet worden zdd. de totale transportkosten minimaal zijn. We veronderstellen dat de transportkosten evenredig zijn met de te transporteren hoeveelheden. Laat c_{ij} de kosten voorstellen die gemaakt worden als één eenheid van depot i naar bestemming j wordt vervoerd, a_i de totale voorraad in depot i en b_j het totaal dat in bestemming j moet worden bezorgd.

Wil het probleem een toegelaten oplossing hebben, dan moet de totale vraag niet groter zijn dan het totale aanbod, d.w.z. $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$. We mogen aannemen dat $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, immers: als namelijk het aanbod groter is dan de vraag, dan voegen we een extra bestemming $n+1$ toe, en nemen we $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ met bijbehorende kosten $c_{i,n+1} = 0$ voor alle i, d.w.z. dat het overschot zonder kosten naar de extra bestemming wordt afgevoerd.

Het transportprobleem is een bijzonder geval van het minimale kostenstroomprobleem en ieder minimale kostenstroomprobleem kan worden omgezet in een transportprobleem. Deze problemen zijn dus in zeker opzicht equivalent. Toch zullen we in deze paragraaf een aparte methode bespreken voor het transportprobleem. Het transportprobleem in deze vorm stamt uit 1941 en is beschreven door Hitchcock.[6]

Uit de theorie van de minimale kostenstromen weten we dat een oplossing optimaal is als er geen ronden met negatieve lengte zijn in een bepaald hulpnetwerk. In een recentelijk ontdekt artikel dat uit 1930 stamt[7] heeft de Rus Tolstoǐ reeds een bepaald transportprobleem uit de praktijk beschreven en met diverse technieken opgelost, onder andere met gebruikmaking van de eigenschap dat er geen ronden met negatieve lengte zijn in een bepaald hulpnetwerk.

De methode die we hier bespreken is gebaseerd op de formulering van het transportprobleem als LP-probleem. Laat x_{ij} de hoeveelheid zijn die van depot i naar bestemming j verzonden wordt. Het transportprobleem kan nu als volgt als LP-probleem worden geformuleerd:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,\ 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,\ 1 \leq j \leq n \\ x_{ij} \geq 0 \text{ voor alle } (i,j) \end{array} \right\}. \tag{7.3}$$

[6]F.L. Hitchtcock: *The distribution of a product from several sources to numerous localities*, Journal of Mathematics and Physics 21 (1941) 224–230.

[7]A.N. Tolstoǐ: *Metody nakhozhdeniya naimen'shego summovogo kilometrazha pri planirovanii perevozok v prostranstve*, Planirovanie Perevozok, Sbornik Pervyǐ, Moscow (1930) 23–55. Dit artikel wordt toegelicht in:
A. Schrijver, *On the history of the transportation and maximum flow problems*, Mathematical Programming 91 (2002) 437–445.

Het duale probleem bij de LP-formulering (7.3) luidt:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \;\middle|\; u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ voor alle } (i,j) \right\}. \tag{7.4}$$

Voorbeeld 7.1

Beschouw een transportprobleem met 3 depots, 4 bestemmingen en verder de volgende gegevens:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 6 \\ 8 & 13 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 55 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat in ons voorbeeld geldt $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, zodat de LP-formulering is:

$$\min \quad 3x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + 2x_{23} + 6x_{24} + 8x_{31} + 13x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34}$$

onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{llllllllllllr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & & & & & & & & & & = 15 \\
 & & & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & & & & & & & = 30 \\
 & & & & & & & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & & & & = 55 \\
x_{11} & & & & + x_{21} & & & & + x_{31} & & & & = 30 \\
 & x_{12} & & & & + x_{22} & & & & + x_{32} & & & = 10 \\
 & & x_{13} & & & & + x_{23} & & & & + x_{33} & & = 15 \\
 & & & x_{14} & & & & + x_{24} & & & & + x_{34} & = 45
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

De formulering van het duale probleem is:

$$\max \quad 15u_1 + 30u_2 + 55u_3 + 30v_1 + 10v_2 + 15v_3 + 45v_4$$

onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{lllllllcr}
u_1 & & & +v_1 & & & & \leq & 3 \\
u_1 & & & & +v_2 & & & \leq & 7 \\
u_1 & & & & & +v_3 & & \leq & 3 \\
u_1 & & & & & & +v_4 & \leq & 4 \\
 & u_2 & & +v_1 & & & & \leq & 5 \\
 & u_2 & & & +v_2 & & & \leq & 7 \\
 & u_2 & & & & +v_3 & & \leq & 2 \\
 & u_2 & & & & & +v_4 & \leq & 6 \\
 & & u_3 & +v_1 & & & & \leq & 8 \\
 & & u_3 & & +v_2 & & & \leq & 13 \\
 & & u_3 & & & +v_3 & & \leq & 9 \\
 & & u_3 & & & & +v_4 & \leq & 3
\end{array}$$

Het transportprobleem geeft een LP-probleem met een speciale structuur. De matrix A van de beperkingen van het LP-probleem (7.3) is de incidentiematrix van de volledige bipartiete graaf $K_{m,n}$. Deze is totaal unimodulair (Stelling 7.5), zodat - als alle a_i en b_j geheeltallig zijn - voor iedere basisoplossing x alle x_{ij} geheeltallig zijn. Verder geldt (Stelling 7.9) dat de rang van A gelijk aan $m+n-1$ is, zodat een basis $m+n-1$ x-variabelen bevat.

Stelling 7.13

De toelaatbare bases van probleem (7.3) behoren bij de opspannende bomen in de graaf, die corresponderen met een toelaatbaar vervoersschema.

Bewijs

$\Rightarrow$ Zij B een toelaatbare basismatrix van probleem (7.3), dan hoort deze matrix bij $m+n-1$ x-variabelen (de overige variabelen zijn 0) die een toelaatbaar vervoersschema geven. De kolommen van B zijn lineair onafhankelijk, zodat de bijbehorende takken volgens Stelling 7.8 geen kring bevatten. Maar dan vormen deze takken een opspannende boom in de bipartiete graaf.

$\Leftarrow$ Zij T een opspannende boom die behoort bij een toelaatbaar vervoersschema. De $m+n-1$ kolommen die behoren bij T zijn volgens Stelling 7.8 lineair onafhankelijk. Omdat de rang van A $m+n-1$ is, kan er één rij worden weggelaten, zeg de laatste rij. Voeg nu aan de $m+n-1$ kolommen die behoren bij T de $(m+n)$-ste eenheidsvector toe, dan geeft dit een toelaatbare basismatrix. $\square$

7.3.2 Tableau en startoplossing

In plaats van in een simplex tableau zullen we oplossingen van het transport probleem representeren in het volgende tableau:

	b_1		b_2		$\cdots$	b_n	
a_1	c_{11}	x_{11}	c_{12}	x_{12}	$\cdots$	c_{1n}	x_{1n}
a_2	c_{21}	x_{21}	c_{22}	x_{22}	$\cdots$	c_{2n}	x_{2n}
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	.
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	.
.	.	.	.	.	$\cdots$	.	.
a_m	c_{m1}	x_{m1}	c_{m2}	x_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	x_{mn}

Dit tableau heeft $m+1$ rijen en $2n+1$ kolommem en is dus veel compacter dan het simplex-tableau dat $m+n+1$ rijen en $mn+1$ kolommen bevat. We zullen laten zien dat we alle benodigde informatie uit bovenstaand kunnen halen.

We moeten starten met een basisoplossing, d.w.z. met een opspannende boom waarover alles vervoerd kan worden. We zullen hier drie gebruikelijke keuzes bespreken en aan de hand van Voorbeeld 7.1 toelichten.

a. De Noord-West regel
Hierbij gebruiken we routes die in het tableau zoveel mogelijk in de Noord-West hoek (linksboven) staan. We beginnen te kijken wat van depot 1 naar bestemming 1 vervoerd kan worden: het minimum van a_1 en b_1. In Voorbeeld 7.1 is dit 15. Alles wat beschikbaar is in depot 1 is nu op. Daarom kijken we vervolgens wat van depot 2 naar bestemming 1 kan worden vervoerd. Deze hoeveelheid is 15, want daarmee is aan de vraag van 30 voldaan. Vervolgens kan er 10 van depot 2 naar bestemming 2 en 5 van depot 2 naar bestemming 3. Tenslotte wordt er van depot 3 een hoeveelheid 10 vervoerd naar bestemming 3 en 45 naar bestemming 4. Bij deze regel hoort dus het starttableau:

	30		10		15		45	
15	3	15	7		3		4	
30	5	15	7	10	2	5	6	
55	8		13		9	10	3	45

Kosten: $3 \times 15 + 5 \times 15 + 7 \times 10 + 2 \times 5 + 9 \times 10 + 3 \times 45 = 425$.

Omdat we in het tableau iedere keer ofwel een stap naar rechts, ofwel een stap naar omlaag gaan, komen we nooit in reeds bezochte punten terug. In de bijbehorende graaf zijn dus geen kringen en we krijgen dus een opspannende boom. Een nadeel van deze regel is dat er geen enkele rekening wordt gehouden met de kosten. De volgende regel komt aan dit bezwaar tegemoet.

b. De minimale-kosten regel
Vervoer zoveel mogelijk over het goedkoopste traject (in het voorbeeld van depot 2 naar bestemming 3), vervolgens over het op één na goedkoopste traject, etc. Om een opspannende boom te krijgen, moet per stap precies één bestemming of depot worden 'afgesloten', behalve in de laatste iteratie waar we zowel één bestemming als één depot afsluiten. Door deze afsluitingen kunnen we geen kringen krijgen. Na $n + m - 1$ toekenningen hebben we dus een opspannende boom. Met deze regel krijgen we voor Voorbeeld 7.1 als starttableau:

	30		10		15		45	
15	3	15	7		3		4	
30	5	15	7	0	2	15	6	
55	8		13	10	9		3	45

Kosten: $2 \times 15 + 3 \times 15 + 3 \times 45 + 5 \times 15 + 7 \times 0 + 13 \times 10 = 415$.

Nadat in de vierde stap over het traject depot 2 - bestemming 1 15 is vervoerd zijn tegelijk de eisen van depot 2 en bestemming 1 vervuld. We mogen echter maar één bestemmimg of depot afsluiten; in dit geval is gekozen om bestemming 1 af te sluiten. In de volgende stap wordt daarom 0 toegewezen aan de route depot 2 - bestemming 2 waarna depot 2 wordt afgesloten. Een toewijzing 0 betekent in termen van de lineaire optimalisering dat de bijbehorende basisoplossing gedegenereerd is. Een dergelijke *degeneratie* kan voorkomen als

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{j \in J_1} b_j \text{ met } I_1 \text{ en } J_1 \text{ echte deelverzamelingen van } \{1, 2, \dots, m\} \text{ resp. } \{1, 2, \dots, n\}. \quad (7.5)$$

De minimale-kosten regel kan als nadeel hebben dat een goede keuze aan het begin leidt tot hoge kosten aan het eind. Er is dan geen afweging van alternatieven. Deze afweging vindt in de volgende meer geavanceerde regel wel plaats.

c. De regel van Vogel

In de eerste stap wordt een boete gegeven aan ieder depot of iedere bestemming. Deze boetes zijn de extra kosten als niet de goedkoopste maar de op één na goedkoopste route vanuit het desbetreffende depot of naar de desbetreffende bestemming wordt gekozen. In Voorbeeld 7.1 zijn de boetes:

bestemming	boete	depot	boete
1	5 - 3 = 2	1	3 - 3 = 0
2	7 - 7 = 0	2	5 - 2 = 3
3	3 - 2 = 1	3	8 - 3 = 5
4	4 - 3 = 1		

Vervolgens wordt die bestemming of dat depot gekozen waarvoor de boete maximaal is (in het voorbeeld: depot 3), en wijzen we zo veel mogelijk toe aan de goedkoopste route in de betreffende kolom of rij (in het voorbeeld: 45 aan route depot 3 - bestemming 4), waarna een depot of een bestemming wordt afgesloten (in het voorbeeld: bestemming 4). We kiezen dus dat traject waarvan het alternatief zo ongunstig mogelijk is. Deze procedure wordt herhaald met inachtneming van de afgesloten bestemmingen en depots. In elke stap moeten de boetes worden aangepast. Om ook hier een opspannende boom te krijgen moet in iedere stap precies één bestemming of depot worden afgesloten.

Voeren we deze regel uit in ons voorbeeld, dan krijgen we:

stap 1: 45 toewijzen aan depot 3 - bestemming 4;
stap 2: 15 toewijzen aan depot 2 - bestemming 3;
stap 3: 10 toewijzen aan depot 3 - bestemming 1;
stap 4: 15 toewijzen aan depot 1 - bestemming 1;
stap 5: 10 toewijzen aan depot 2 - bestemming 2;
stap 6: 5 toewijzen aan depot 2 - bestemming 1.

Bij deze toewijzing hoort dus het tableau:

	30		10		15		45	
15	3	15	7		3		4	
30	5	5	7	10	2	15	6	
55	8	10	13		9		3	45

Kosten: $3 \times 45 + 2 \times 15 + 8 \times 10 + 3 \times 15 + 5 \times 5 + 7 \times 10 = 385$.

7.3.3 Algemene iteratiestap

Hebben we een basisoplossing x, dan gaan we de bijbehorende vectoren u en v van het duale probleem berekenen. Omdat voor een x in de basis de bijbehorende verschilvariabele van het duale probleeem 0 is, geldt:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ voor alle } (i, j) \text{ met } x_{ij} \text{ in de basis.}$$

Uit (7.4) blijkt dat een duale oplossing toelaatbaar blijft en dat de waarde van de doelfunctie niet verandert als bij alle u_i hetzelfde getal wordt opgeteld en van iedere v_j dat getal wordt afgetrokken (ga dit zelf na). Eén der variabelen kan dus willekeurig worden gekozen. We spreken af dat we $u_1 = 0$ zullen nemen. Beschouw de bij de basis x behorende boom en neem het knooppunt dat behoort bij u_1 als wortel, zeg knooppunt 1. De waarden van de andere u_i's en v_j's zijn te bepalen door in de boom vanuit knooppunt 1 naar de eindpunten te lopen, immers: voor tak (i, j) geldt: $v_j = c_{ij} - u_i$, zodat we v_j kunnen uitrekenen als u_i bekend is; omgekeerd kunnen we via $u_i = c_{ij} - v_j$, u_i uitrekenen als v_j bekend is.

Vervolgens gaan we na of deze (u, v) toelaatbaar is voor (7.4). Is dit het geval, dan weten we uit de lineaire optimalisering dat x een optimale oplossing is van (7.3) en dat (u, v) een optimale oplossing van (7.4) is.

Als (u, v) niet toelaatbaar is voor (7.4)), dan gaan we als volgt te werk. De variabelen x_{ij} met $u_i + v_j > c_{ij}$ zijn de kandidaten om in de basis te komen (*pivotkolom*): de bijbehorende verschilvariabelen van het duale probleem (deze staan in het simplex-tableau in de getransformeerde doelfunctie) zijn dan negatief.
Toevoegen van de corresponderende tak aan de boom doet een kring ontstaan. Deze is in het tableau op te sporen en we geven de takken er van afwisselend een + en een − (de toegevoegde tak krijgt een +). Over de + takken zal meer vervoerd gaan worden en over de − takken evenveel minder. De hoeveelheid die we gaan vervoeren is het minimum van de waarden van de takken met een −; noem deze hoeveelheid d. Hierdoor krijgt een der − takken de waarde 0 en deze tak verlaat de boom (*pivotrij*). Het is mogelijk dat het minimum niet uniek is; in dat geval verlaat één van deze 'minimale takken' de boom en blijven de andere in de boom met waarde 0.

Als de hoeveelheid d vervoerd gaat worden over de toegevoegde tak, dan nemen - omdat ieder pivotelement gelijk is aan 1 - de totale kosten met $d \cdot \{u_i + v_j - c_{ij}\}$ af. Een goede keuze lijkt dus om die tak (i, j) te kiezen waarvoor $u_i + v_j - c_{ij}$ maximaal is. Dit komt overeen met de meest gebruikelijke keuze van de pivotkolom in de simplexmethode, nl. die kolom waarvan de coëfficiënt in de getransformeerde doelfunctie het meest negatief is. De hier beschreven methode is dan ook een speciale implementatie van de simplex-methode voor een LP probleem van de vorm (7.3).

Voorbeeld 7.1 (vervolg)
Uitgaande van de startoplossing volgens de Noord-West regel wordt de oplossing van ons voorbeeld als volgt verkregen (in de voorste kolom staat u en in de bovenste rij v):

	3		5		0		-6	
0	3	15	7		3		4	
2	5	15^-	7	10	2	5^+	6	
9	8	$^+$	13		9	10^-	3	45

$c = 425$ $d = 10.$

	3		5		0		-2	
0	3	15	7		3		4	
2	5	5	7	10	2	15	6	
5	8	10	13		9		3	45

$c = 385$ optimaal

Eindigheid
Als $d = 0$, dan is er sprake van degeneratie en geldt (7.5) voor zekere deelverz. I_1 en J_1. In dat geval kan de eindigheid in gevaar komen. Het is mogelijk dit te voorkomen met de zogenaamde *ε-perturbatie*, d.w.z. in plaats van 0 nemen we een klein getal ε. Aan het einde vervangen we ε weer door 0. Indien voor geen enkele deelverz. I_1 en J_1 (7.5) niet geldt, dan is er geen degeneratie en is de eindigheid van de methode zonder meer gegarandeerd.

7.3.4 Gevoeligheidsanalyse

We zullen de volgende veranderingen van het probleem onderzoeken:
1. veranderingen in de doelfunctie;
2. veranderingen van de voorraad en de vraag.

1. Veranderingen in de doelfunctie
Veronderstel eerst dat de coëfficiënt c_{ij} van een niet-basis-variabele x_{ij} wordt gewijzigd. Uit het voorafgaande volgt dat de huidige basis optimaal blijft zolang $c_{ij} \geq u_i + v_j$.
Veronderstel vervolgens dat de coëfficiënt c_{ij} van een basis-variabele x_{ij} wordt gewijzigd. Stel $c_{ij} = \lambda$ en bereken opnieuw de u_i en v_j waarden als functie van λ. Door te eisen dat $c_{ij} \geq u_i + v_j$ voor alle (i, j) met x_{ij} niet in de basis, krijgen we het bereik van c_{ij} waarvoor de huidige oplossing optimaal is.

Voorbeeld 7.1 (vervolg)
Beschouw allereerst de waarde van c_{32} (de huidige waarde is 13). Omdat $u_3 = 5$ en $v_2 = 5$, is de huidige oplossing optimaal voor $c_{32} \geq 10$. Beschouw vervolgens de waarde van c_{31} (de huidige waarde is 8). De berekening van de u_i's en de v_j's doen we in onderstaand tableau.

	3		5		0		6 - λ	
0	3	15	7		3		4	
2	5	5	7	10	2	15	6	
$\lambda - 3$	λ	10	13		9		3	45

Er moet gelden:
$13 \geq \lambda + 2;\ 9 \geq \lambda - 3;\ 4 \geq 6 - \lambda;\ 6 \geq 8 - \lambda$.
Hieruit volgt: $2 \leq \lambda \leq 11$, zodat de huidige oplossing optimaal blijft voor $2 \leq c_{31} \leq 11$.

2. Veranderingen van de voorraad en de vraag
We beschouwen het geval dat de voorraad in één depot, zeg depot i, met λ verandert en dat de vraag in één bestemming, zeg bestemming j, met eveneens λ verandert (λ mag zowel positief als negatief zijn).

Merk op dat $\Sigma_{i=1}^{m}\ a_i = \Sigma_{j=1}^{n}\ b_j$ blijft gelden en dat volgens de dualiteitsstelling van de lineaire optimalisering geldt:

$$\begin{aligned} \text{nieuw optimum (7.3)} = \text{nieuw optimum (7.4)} &= \Sigma_{i=1}^{m}\ a_i u_i + \Sigma_{j=1}^{n}\ b_j v_j + \lambda(u_i + v_j) \\ &= \text{oude optimum } + \lambda(u_i + v_j), \end{aligned}$$

zolang (u, v) de optimale oplossing van (7.4) blijft.
Een optimale oplossing van het gewijzigde probleem wordt nu als volgt verkregen:
Beschouw eerst het geval dat x_{ij} een basis-variabele is:
Vervang x_{ij} door $x_{ij} + \lambda$ mits λ zdd. $x_{ij} + \lambda \geq 0$. Het is duidelijk dat x toelaatbaar is en optimaal, want (u, v) blijft optimaal.

Voorbeeld 7.1 (vervolg)
Neem het eerste depot en ook de eerste bestemming. Voor $\lambda \geq -15$ is de verandering in de optimale oplossing: $x_{11} = 15 + \lambda$ en het optimum $= 385 + \lambda(0 + 3) = 385 + 3\lambda$.

Beschouw vervolgens het geval dat x_{ij} een niet-basis-variabele is:
In de boom is een unieke keten van i naar j. Doorloop deze keten, beginnend met (i, k) en vermeerder en verminder afwisselend de bijbehorende basisvariabelen met λ, beginnend door x_{ik} te vermeerderen met λ. Ga door tot knooppunt j is bereikt. Omdat een oneven aantal veranderingen heeft plaats gehad, is er in rij i en kolom j een hoeveelheid λ bijgekomen, d.w.z. de voorraad in depot i en de vraag in bestemming j is met λ toegenomen. λ moet nu nog wel voldoen aan de eis dat de nieuwe variabelen niet-negatief zijn. De verkregen oplossing is dan weer toelaatbaar en ook optimaal, omdat (u, v) optimaal is voor (7.4).

Voorbeeld 7.1 (vervolg)
Neem het eerste depot en de tweede bestemming. De keten is: depot 1 $\rightarrow$ bestemming 1 $\rightarrow$ depot 2 $\rightarrow$ bestemming 2. De veranderingen zijn: $x_{11} = 15 + \lambda$, $x_{21} = 5 - \lambda$, $x_{21} = 10 + \lambda$. Voor $-10 \leq \lambda \leq 5$ blijven dezelfde variabelen in de basis. Het optimale tableau voor $\lambda = 4$ staat hieronder:

	3		5		0		-2	
0	3	19	7		3		4	
2	5	1	7	14	2	15	6	
5	8	10	13		9		3	45

7.3.5 Toepassing

Er is vraag naar een aantal, zeg n, producten die gemaakt moeten worden uit nieuw materiaal en uit gerecyclede materialen, zeg de gerecyclede materialen $1, 2, \ldots, m$. Van gerecycled materiaal i is een hoeveelheid a_i beschikbaar, $i = 1, 2, \ldots, m$.
Naar product j is een vraag d_j die moet worden gemaakt uit minstens m_j nieuw materiaal en verder uit gerecyclede materialen. Als gerecycled materiaal wordt gebruikt voor product j, dan kan van iedere eenheid van het gerecyclede materiaal slechts de fractie t_j effectief worden gebruikt.

Gevraagd wordt naar een productieproces dat zo min mogelijk nieuw materiaal gebruikt.
Laat v_j de hoeveelheid nieuw materiaal zijn voor product j en laat x_{ij} de hoeveelheid van gerecycled materiaal i zijn dat wordt gebruikt voor product j.
Bovenstaand probleem kan dan als volgt als LP-probleem worden geformuleerd:

$$min \left\{ \sum_{j=1}^{n} v_j \;\middle|\; \begin{array}{rl} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq a_i, 1 \leq i \leq m \\ t_j \cdot \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + v_j & \geq d_j, 1 \leq j \leq n \\ v_j & \geq m_j, 1 \leq j \leq n \\ x_{ij} & \geq 0 \text{ voor alle } (i,j) \end{array} \right\}. \tag{7.6}$$

Neem als depots $\{0, 1, \ldots, m\}$ en de bestemmingen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Laat $c_{0j} = t_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ en $c_{ij} = 0,\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Neem verder $x_{0j} = \frac{v_j - m_j}{t_j},\ j = 1, 2, \ldots, n$, dan is $c_{0j}x_{0j} = t_j x_{0j} = v_j - m_j =$ het extra nieuwe materiaal voor product $j,\ j = 1, 2, \ldots, n$.
De doelfunctie is dus equivalent met $\sum_{j=1}^{n}\ c_{0j}x_{0j} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n}\ c_{ij}x_{ij}$.
Merk verder op dat:
$v_j \geq m_j \Leftrightarrow x_{0j} \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ en
$t_j \cdot \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + v_j \geq d_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \frac{d_j - v_j}{t_j} = \frac{d_j - m_j}{t_j} - \frac{v_j - m_j}{t_j} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} x_{ij} \geq \frac{d_j - m_j}{t_j},\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Noem $\frac{d_j - m_j}{t_j} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Het is nu in te zien dat (7.6) equivalent is met:

$$min \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{rl} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq a_i,\ 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=0}^{m} x_{ij} & \geq b_j,\ 1 \leq j \leq n \\ x_{ij} & \geq 0,\ 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}. \tag{7.7}$$

Probleem (7.7) is van het type (7.3), zodat deze toepassing is op te lossen als transportprobleem.

7.3.6 Het overslagprobleem

In het transportprobleem worden de producten direct van de depots naar de bestemmingen gebracht. In vele practische situatie kan het niodig of gewenst (goedkoper) zijn om de producten eerst over te slaan op bepaalde tussenstations. Ook vervoer tussen tussenstations is mogelijk. Een dergelijk probleem heet een *overslagprobleem*. We krijgen dan geen bipartiete graaf meer. We kunnen het probleem echter herformuleren tot een gewoon transportprobleem. Daartoe beschouwen we ieder tussenstation zowel als depot als als bestemming. De bestemmingsfunctie van een tussenpunt komt overeen met het brengen van een bepaalde hoeveelheid van een 'echt' depot naar het tussenstation en de depotfunctie van een tussenpunt komt overeen met het brengen van een bepaalde hoeveelheid van het tussenpunt naar een 'echte' bestemming. Verder nemen we in de tussenstations een voldoend grote productie en vraag (bijvoorbeeld $\sum_{i=1}^{m}\ a_i$) en zijn de kosten van een tussenstation als depot en een tussenstation als bestemming gelijk aan 0 (dit betekent in feite dat wat er op een tussenstation aan voorraad overblijft niet ter zake doet, want met kosten 0 naar zijn eigen bestemming kan worden gebracht). We zullen dit illusteren in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 7.2

Beschouw een probleem met drie depots (1, 2 en 3), twee tussenstations (4 en 5) en twee bestemmingen (6 en 7). In de depots is 10, 20 resp. 15 beschikbaar en in de bestemmingen is de vraag 25 resp. 20. De transportkosten staan in onderstaande tabel.

	4	5	6	7
1	5	-	4	-
2	4	3	-	-
3	-	5	-	12
4	0	-	2	3
5	4	0	-	6

Met de punten 4a, 5a en 4b, 5b geven we de bestemmingsfuncties resp. de depotfuncties aan van de tussenpunten 4 en 5. Dit geeft een 'gewoon' transportprobleem met bijbehorend tableau.

	45	45	25	20
10	5	-	4	-
20	4	3	-	-
15	-	5	-	12
45	0	-	2	3
45	4	0	-	6

In Vraag 7.7 wordt gevraagd een optimale oplossing voor dit probleem te bepalen.

Vraag 7.3

Een bedrijf levert goederen aan 3 klanten, die ieder 30 eenheden wensen te ontvangen. Het bedrijf heeft 2 depots. In depot 1 zijn 40 eenheden beschikbaar en in depot 2 30 eenheden.
De transportkosten (in euro's per eenheid) staan in onderstaande tabel:

	klant 1	klant 2	klant 3
depot 1	15	35	25
depot 2	10	50	40

Voor iedere eenheid die de eerste klant niet ontvangt moet een boete van 90 euro worden betaald, bij de tweede klant is een dergelijke boete 80 euro en bij de derde klant 110 euro.

a. Formuleer een transportprobleem dat de som van de transportkosten en de boetes minimaliseert.

b. Veronderstel dat het bedrijf voor 100 euro per eenheid de voorraad in depot 1 en/of depot 2 kan aanvullen, en dat alle klanten de door hen verlangde hoeveelheid moeten ontvangen. Formuleer het probleem dat de som van de transportkosten en de aanvulkosten minimaliseert eveneens als een transportprobleem.

Vraag 7.4

Een bedrijf moet van een product de komende 4 maanden 5000, 8000, 12000 resp. 7000 eenheden leveren. Het bedrijf kan iedere maand in het reguliere productieproces 6000 eenheden leveren en, indien gewenst, per maand 3000 stuks extra door overwerk.

De productiekosten voor regulier en overwerk zijn resp. 10 en 15 euro per stuk. De voorraadkosten bedragen 2 euro per eenheid per maand (wat in een zekere maand wordt geproduceerd kan in dezelfde maand worden geleverd en er zijn dan geen voorraadkosten aan verbonden).

Welk productie schema minimaliseert de som van de productiekosten en de voorraadkosten?

a. Modelleer dit probleem als een transportprobleem.

b. Bepaal een startoplossing met de kolom minimalisatie methode, d.w.z. startend in kolom 1 sluiten we kolom voor kolom af, door die rij te kiezen met de laagste kosten.

Vraag 7.5

Bepaal een optimale oplossing van Voorbeeld 7.1, uitgaande van de minimale-kosten regel.

Vraag 7.6

a. Los het volgende transportprobleem met 2 depots en 3 bestemmingen op:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b. Wat wordt de optimale oplossing bij de volgende veranderingen:

(1) $c_{13} = 1$;

(2) $c_{11} = 6$;

(3) $c_{21} = 8$.

c. Wat wordt de optimale oplossing bij de volgende veranderingen:

(1) de voorraad in depot 1 en de vraag in bestemming 1 worden beide met 1 verhoogd;

(2) de voorraad in depot 1 en de vraag in bestemming 3 worden beide met 1 verhoogd.

Vraag 7.7

Bepaal een optimale oplossing van Voorbeeld 7.2, uitgaande van het volgende vervoersschema: 10 van 1 naar 6; 15 van 3 naar 7; 20 van 2 naar 4; 15 van 4 naar 6 en 5 van 4 naar 7.

element (i, j) uitgezonderd (waarom?).

b. In de optimale oplossing is $x_{ij} = 0$:
Als c_{ij} groter wordt, dan zal deze toewijzing zeker nog steeds niet worden gekozen.
Als c_{ij} kleiner wordt, zeg met λ afneemt, dan is de huidige oplossing nog steeds niet optimaal zolang $\lambda \leq d_{ij}$.

Voorbeeld 7.6 (vervolg)

Neem $(i, j) = (1, 2)$: de huidige oplossing is in ieder geval optimaal als $c_{12} \leq 45 + 30 + 0 = 75$.
Neem $(i, j) = (1, 1)$: de huidige oplossing is in ieder geval optimaal als $c_{11} \geq 105 - 45 = 60$.

Vraag 7.11

Los het toewijzingsprobleem op voor de volgende kostenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag 7.12

Drie werkzaamheden moeten worden uitgevoerd, ieder door één persoon. Er zijn 5 personen beschikbaar, waarbij werk 1 niet door persoon 2, werk 2 niet door persoon 5 en werk 3 niet door persoon 3 gedaan kan worden.
De kosten c_{ij} als persoon i werk j uitvoert staan in onderstaande matrix.
Welke toewijzing minimaliseert de totale kosten? Los dit probleem op.

	W1	W2	W3
P1	10	12	9
P2	-	14	13
P3	15	16	-
P4	13	15	12
P5	12	-	11

7.5 Opgaven

Opgave 7.1

a. Ga na of de volgende matrices totaal unimodulair zijn:

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Geef een voorbeeld van een matrix die totaal unimodulair is, maar niet unimodulair.

c. Geef een voorbeeld van een matrix die unimodulair is, maar niet totaal unimodulair.

Opgave 7.2

Beschouw de volgende deelverz. van $W(G)$, waarbij G een niet-gerichte graaf is:
$W_C(G)$: de m-tallen van $W(G)$ die behoren bij de nulgraaf, de enkelvoudige kringen en de som van tak-disjuncte kringen.
$W_S(G)$: de m-tallen van $W(G)$ die behoren bij de nulgraaf, de minimale sneden en de som van tak-disjuncte sneden.
Bewijs de volgende eigenschappen:
a. $W_C(G)$ en $W_S(G)$ zijn lineaire deelruimtes van $W(G)$.
b. Als x behoort tot $W_C(G) \cap W_S(G)$, dan bevat x een even aantal 1'en.

Opgave 7.3

Beschouw het transportprobleem met 4 depots, 6 bestemmingen en verder de volgende gegevens:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 11 & 9 & 11 \\ 10 & 9 & 12 & 10 & 7 & 10 \\ 11 & 12 & 9 & 10 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} 61 \\ 42 \\ 38 \\ 51 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 30 \\ 38 \\ 31 \\ 29 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de startoplossing met de regel van Vogel.
b. Los dit transportprobleem op, uitgaande van de in onderdeel a verkregen startoplossing.

Opgave 7.4

Beschouw onderstaand transportprobleem met 3 depots en 3 bestemmingen:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a. Los dit probleem op voor $\alpha = 3$; is de oplossing uniek?
b. Geef de waarde van de doelfunctie als functie van α voor alle $\alpha > 0$.

Opgave 7.5

Dertien nieuwe papiersoorten moeten worden gemaakt, waarvoor nieuw papier en tien soorten gerecycled papier gebruikt kunnen worden. Van de nieuwe papiersoort j wordt een hoeveelheid d_j (in kg) gevraagd, waarvoor minstens m_j kg nieuw papier moet worden gebruikt, $1 \leq j \leq 13$. Van het gerecyclede materiaal kan voor de nieuwe papiersoort j slechts de fractie t_j effectief worden gebruikt ($1 \leq j \leq 13$) en bovendien is niet al het gerecycelde materiaal geschikt voor ieder nieuw product. Zij $S_j \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$ de gerecyclede soorten die gebruikt kunnen worden bij de productie van de nieuwe papiersoort j, $1 \leq j \leq 13$. Onderstaande tabel geeft de concrete gegevens voor ieder van de dertien nieuwe papiersoorten.

j	d_j	m_j	t_j	S_j
1	3475	0	0.85	$\{1, 2\}$
2	1223	699	0.90	$\{1, 2, 3, 4\}$
3	2260	1077	0.85	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$
4	2700	1285	0.85	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$
5	2950	1965	0.90	$\{5, 6\}$
6	1112	848	0.95	$\{4, 5, 6\}$
7	3910	2980	0.80	$\{7, 8, 10\}$
8	1673	1275	0.80	$\{7, 8, 10\}$
9	3855	367	0.85	$\{1, 2, 4\}$
10	12100	9210	0.90	$\{10\}$
11	7382	6320	0.95	$\{6\}$
12	7215	0	0.93	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
13	4000	381	0.90	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Van gerecycled soort i is een hoeveelheid van 3100 kg beschikbaar, $1 \leq i \leq 10$.
Welk productieproces voldoet aan de vraag, terwijl er zo min mogelijk nieuw papier voor wordt gebruikt? Formuleer dit probleem als een transportprobleem.

Opgave 7.6

Beschouw het volgende vervoersprobleem, waarbij behalve depots (1,2,3) en bestemmingen (6 en 7) er ook nog twee tussenpunten (4 en 5) zijn. In de tussenpunten is niets nodig en ook niets beschikbaar. In de bestemmingen 6 en 7 worden resp. 25 en 20 eenheden gevraagd. De overige gegevens van dit probleem zijn als volgt (- betekent dat hierover niets vervoerd kan worden):

		Transportkosten naar			
Depot	Beschikbaar	Punt 4	Punt 5	Punt 6	Punt 7
1	10	5	-	4	-
2	20	4	3	-	-
3	15	-	5	-	12

	Transportkosten naar			
Tussenpunt	Punt 4	Punt 5	Punt 6	Punt 7
4	-	-	2	3
5	4	-	-	6

a. Los dit probleem op als transportprobleem door voor ieder depot en bestemming de goedkoopste route van depot naar bestemming te bepalen.

b. Los dit probleem op als transportprobleem door als depots de echte depots en de tussenpunten te nemen, en als bestemmingen de echte bestemmingen en eveneens de tussenpunten.
Toon eerst aan dat de gegeven formulering als transportprobleem overeenkomt met het oorspronkelijke probleem.