

**UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT- PARIS 7**

École doctorale de Mathématiques de Paris centre

UFR Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Présentée par

**CECÍLIA SALGADO**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

**RANG DE SURFACES ELLIPTIQUES :  
THÉORÈMES DE COMPARAISON**

**Thèse dirigée par M. Marc HINDRY**

Soutenue le 19 Juin 2009 devant le jury composé de

<b>M. Daniel BERTRAND</b>	examineur
<b>M. Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE</b>	examineur
<b>M. Marc HINDRY</b>	directeur de thèse
<b>M. Qing LIU</b>	examineur
<b>M. Philippe SATGÉ</b>	examineur
<b>M. Joseph SILVERMAN</b>	rapporteur (absent)
<b>Sir H. Peter SWINNERTON-DYER</b>	examineur
<b>M. Douglas ULMER</b>	rapporteur (absent)



A meus pais



# Remerciements

Je suis très heureuse de pouvoir remercier ici tous ceux qui m'ont aidée, motivée et accompagnée pendant cette période.

Tout d'abord, Marc Hindry qui m'a guidée le long de cet agréable parcours. Merci de m'avoir indiqué plusieurs fois la bonne direction, de m'avoir suggéré le beau problème principal de cette thèse, d'avoir lu mon travail avec soin et de m'avoir souvent conseillé. Merci d'avoir toujours trouvé le temps pour discuter avec moi et surtout de m'avoir écoutée avec patience. On dit qu'on apprend en regardant les autres. Je peux certainement dire que Marc m'a appris à faire des mathématiques non seulement en donnant le bon exemple, mais aussi avec de nombreuses et riches discussions.

Un grand "obrigada" pour Amilcar Pacheco, qui depuis ma licence m'encourage énormément. Merci de m'avoir poussée à venir étudier à Paris avec Marc, pour les cours qui constituent une bonne partie de ma base mathématique et de continuer à me stimuler.

Je remercie Douglas Ulmer pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour ses suggestions qui ont aidé à améliorer mon premier article et d'avoir accepté de faire le rapport de ma thèse.

Je remercie Joe Silverman d'avoir accepté de faire le rapport de ma thèse, tâche dont il s'est acquitté vite et avec grand soin.

Je remercie Daniel Bertrand, Jean-Louis Colliot-Thélène, Qing Liu, Philippe Satgé et Sir Peter Swinnerton-Dyer d'avoir gentiment accepté de faire partie de mon jury de thèse. Merci beaucoup à Jaap Top pour nos discussions à Banff et pour m'avoir soutenu.

J'ai le plaisir de remercier des jeunes et brillants mathématiciens pour des discussions, des échanges d'email et aussi des suggestions. Parmi eux, João Pedro, Mathieu Florence (qui a aussi relu le français de ma thèse), Matthias Schütt, Jasper Scholten, Tony Várilly et Daniel Erman.

Je remercie ma copine flamenca, Dominique Biancamaria, qui a corrigé le français des premiers chapitres et voulait faire encore plus.

Merci à tous mes amis, ceux que j'ai rencontrés à Paris, ceux que je connais depuis toujours à Rio, mes copines de flamenco, mes amis de Chevaleret, Jacques Portal (l'ancien propriétaire de mon studio, ceux qui le connaissent comprendront), Christophe et Anath qui nous ont accueilli dans leur belle famille et à tous les autres qui, des fois sans le savoir, ont rendu ma vie encore plus heureuse et belle.

Enfin, ma merveilleuse famille. Mes grand-parents, mes tantes, mes cousins et mon frère, João Antônio. Ma grand-mère, Marília, qui m'a appris à parler français. Mes parents, mes amis, mon plus bel exemple, Marco et Teresa que j'admire tellement, qui me poussent toujours plus loin avec leur force et leur amour. Mon mari, mon copain, mon ami, João Pedro qui depuis toutes ces années m'encourage et me donne envie de faire de mon mieux dans tous les domaines de ma vie. J'espère, comme lui, que cette thèse et tout ce que j'ai appris en la rédigeant, pas seulement sur les mathématiques, fassent de moi une femme méritante de son amour et amitié. Obrigada, João.

# Table des matières

0.1	Résultats connus . . . . .	6
0.2	Résultats nouveaux . . . . .	7
0.2.1	Changements de base . . . . .	7
0.2.2	Résultats . . . . .	8
0.2.3	Organisation du texte . . . . .	13
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>14</b>
1.1	Surfaces elliptiques . . . . .	14
1.2	Outils géométriques . . . . .	15
1.2.1	Théorie d'intersection sur les surfaces elliptiques minimales . . . . .	15
1.2.2	Construction de surfaces elliptiques rationnelles . . . . .	16
1.2.3	Un critère de rationalité . . . . .	17
1.2.4	Sections de torsion . . . . .	18
1.2.5	Le réseau de Mordell-Weil et l'accouplement hauteur . . . . .	19
1.3	Outils arithmétiques . . . . .	20
1.3.1	Modèles minimaux sur un corps parfait . . . . .	20
1.3.2	Surfaces elliptiques $k$ -rationnelles . . . . .	21
1.3.3	Un exemple de surface elliptique rationnelle dont $\mathbb{P}^2$ n'est pas un modèle $\mathbb{Q}$ -minimal . . . . .	23
1.3.4	La formule de Shioda-Tate sur un corps de nombres . . . . .	24
1.3.5	Théorie de Kummer . . . . .	25
1.3.6	Densité des points rationnels et rang des fibres . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Augmentation du rang</b>	<b>27</b>
2.1	L'algorithme de Néron . . . . .	27
2.2	Démonstration des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 avec une hypothèse supplémentaire	28
2.3	Action du groupe de Galois sur les points de base . . . . .	30
2.4	Pinceaux de courbes rationnelles dans les surfaces de del Pezzo . . . . .	34
2.4.1	Dimension et genre de courbes dans les surfaces de del Pezzo . . . . .	35
2.4.2	Surfaces del Pezzo de degré cinq . . . . .	36
2.4.3	Surfaces de del Pezzo de degré six . . . . .	38
2.4.4	Surfaces de degré huit . . . . .	39
2.4.5	Démonstration du théorème 0.2.3 . . . . .	41

2.4.6	Démonstration du théorème 0.2.19 . . . . .	42
2.5	Surfaces elliptiques rationnelles avec $k(\mathcal{E}) \neq k(\mathbb{P}^2)$ . . . . .	43
2.5.1	Dimension et genre de courbes dans les fibrés en coniques . . . . .	44
2.5.2	Constructions . . . . .	45
2.5.3	Surfaces de degré deux ou trois . . . . .	46
2.5.4	Surfaces de degré quatre . . . . .	47
2.5.5	Surfaces de del Pezzo de degré un . . . . .	48
2.6	Points rationnels dans le produit fibré de deux courbes . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Surfaces elliptiques de type K3</b>	<b>55</b>
3.1	Surfaces de dimension de Kodaira zéro . . . . .	55
3.2	Surfaces K3 . . . . .	56
3.2.1	Augmentation du rang . . . . .	56
3.2.2	Exemples . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Mauvaises fibres</b>	<b>63</b>
4.1	Monodromie et changements de base . . . . .	63
4.2	Configuration des points de base et configuration des fibres . . . . .	66
4.2.1	Obtention des fibres singulières . . . . .	68
4.2.2	Conclusions . . . . .	69
4.3	Configuration des fibres . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Construction des pinceaux de cubiques de rang de Mordell-Weil cinq</b>	<b>73</b>
5.1	Introduction . . . . .	73
5.2	Constructions . . . . .	74
5.2.1	Une seule fibre réductible . . . . .	74
5.2.2	Deux fibres réductibles . . . . .	77
5.2.3	Trois fibres réductibles . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Le signe de l'équation fonctionnelle</b>	<b>83</b>
6.1	Base rationnelle . . . . .	84
6.1.1	Fibration sans fibres multiplicatives . . . . .	84
6.1.2	Fibrations avec fibres multiplicatives . . . . .	85
6.1.3	Exemples . . . . .	87
6.2	Base elliptique . . . . .	89

# Introduction

Cette thèse traite certaines questions diophantiennes liées aux familles de courbes elliptiques. Le principal problème abordé concerne la comparaison entre le rang de la fibre générique d'une surface elliptique et le rang des fibres spéciales.

Un théorème sur la spécialisation de Silverman garantit que le rang d'une fibre spéciale est, à un nombre fini d'exceptions près, borné inférieurement par celui de la fibre générique. Pour améliorer cette borne nous considérons des changements de base  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré petit (souvent égal à deux) où  $C$  est une courbe rationnelle. Intuitivement cela revient à remplacer une famille  $E_t$  par une nouvelle famille  $E_{f(t)}$ .

Nous exposons dans la suite brièvement quelques définitions clef ainsi que les résultats principaux de cette thèse.

**Définition 0.0.1.** *Une surface elliptique définie sur un corps  $k$  est une surface algébrique projective  $\mathcal{E}$  définie sur  $k$  telle que*

- i) Il existe un morphisme (une fibration)  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ , où  $B$  est une courbe projective lisse (appelé la courbe de base de la fibration) et la fibre générique est une courbe projective lisse de genre un.*
- ii) Il existe une section  $\sigma : B \rightarrow \mathcal{E}$  définie sur  $k$  (fibration jacobienne).*

Pour presque tout  $t \in B(k)$ , la fibre au dessus de  $t$  donnée par  $E_t = \pi^{-1}(t)$  est une courbe elliptique définie sur  $k$  et l'ensemble  $E_t(k)$  a une structure de groupe, appelé le groupe de Mordell-Weil de  $E$  sur  $k$ . Le théorème de Mordell-Weil dit que ce groupe se décompose comme la somme d'un groupe libre  $\mathbb{Z}^r$  et un groupe fini, les éléments de torsion.

Pour la plupart des géomètres algébristes pour qu'une surface soit elliptique il suffit de satisfaire l'hypothèse i), i.e d'avoir une fibration elliptique. Une telle fibration munie d'une section est appelée fibration jacobienne. Puisque nous nous intéressons au rang du groupe de Mordell-Weil de la fibre générique, pour nous une surface elliptique est toujours munie d'une section.

**Définition 0.0.2.** Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $k$ ,  $E(k) = \mathbb{Z}^r \oplus Tors$ , l'entier  $r$  est appelé *le rang* de  $E$  sur  $k$ .

La fibre générique  $E$  d'une surface elliptique  $\mathcal{E} \rightarrow B$ , en tant que courbe elliptique sur le corps de fonctions  $K = k(B)$ , a aussi un groupe de Mordell-Weil sur  $K$  noté  $E(K)$ . Le théorème de Mordell-Weil est aussi valable sur un corps de fonctions (Lang-Néron). Nous pouvons alors définir :

**Définition 0.0.3.** Soient  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique définie sur  $k$  et  $E$  sa fibre générique définie sur  $K = k(B)$ . Le rang du groupe  $E(K)$  sera appelé le *rang générique* de  $\mathcal{E}$  sur  $k$ .

Les surfaces elliptiques peuvent être classifiées selon plusieurs critères. Le plus souvent utilisé les divise selon leur dimension de Kodaira (qui peut être  $-\infty, 0$  ou  $1$ ). Celles qui sont de dimension  $-\infty$  sont birationnelles au plan projectif sur la clôture algébrique. Elles sont appelés rationnelles. Il existe aussi une sous-classification pour ces dernières surfaces qui dépend du corps de définition d'un morphisme birationnel vers  $\mathbb{P}^2$ .

**Définition 0.0.4.** Une surface elliptique  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  définie sur un corps de nombres  $k$  est dite *k-rationnelle* s'il existe une application  $k$ -birationnelle  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Elle est dite *rationnelle* si elle est  $\bar{k}$ -rationnelle.

Si cette application est un  $k$ -morphisme alors un modèle minimal de  $\mathcal{E}$  sur  $k$  sera isomorphe à  $\mathbb{P}^2$ . Nous verrons, pendant le texte (sous-section 1.3.2), que ceci n'est pas toujours le cas. Une surface  $k$ -rationnelle peut avoir pour modèle minimal une surface de del Pezzo. Une surface elliptique rationnelle peut avoir pour modèle minimal soit une surface de del Pezzo, soit un fibré en coniques.

Nous allons considérer le problème de la comparaison du rang des fibres d'une surface elliptique principalement pour les classes suivantes :

$$\mathcal{R}_0(k) = \{ \text{surfaces elliptiques rationnelles définies sur } k \}$$

$$\mathcal{R}_1(k) = \{ \text{surfaces elliptiques } k\text{-rationnelles} \}$$

$$\mathcal{R}_2(k) = \{ \text{surfaces elliptiques possédant un modèle minimal sur } k \text{ isomorphe à } \mathbb{P}_k^2 \}$$

Ces ensembles satisfont clairement  $\mathcal{R}_2(k) \subseteq \mathcal{R}_1(k) \subseteq \mathcal{R}_0(k)$ .

## 0.1 Résultats connus

Nous pouvons regarder  $\mathcal{E}$  en tant que courbe elliptique sur le corps de fonctions  $k(B)$  (si  $E$  est une courbe elliptique définie sur  $k(B)$  alors il existe une surface elliptique  $\mathcal{E}$  ayant  $E$  comme fibre générique). Le théorème de Mordell-Weil est encore valable dans cette généralité (Lang-Néron).

On dira qu'une surface elliptique  $\mathcal{E} \rightarrow B$  est *scindée* si elle est  $B$ -birationnelle à un produit  $E_0 \times B$  où  $E_0$  est une courbe elliptique définie sur  $k$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & E_0 \times B \\ & \searrow \pi & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

**Remarque 0.1.1.** Si la surface est scindée alors le rang de ses fibres est trivialement égal au rang de la courbe elliptique  $E_0$ .

Pour les surfaces non-scindées, un théorème de Silverman [50] nous dit qu'il est possible de comparer le rang du groupe de Mordell-Weil d'une fibre avec celui de  $\mathcal{E}$  (le rang générique). Plus précisément, si  $\sigma_t : \mathcal{E}(k(B)) \rightarrow \mathcal{E}_t(k)$  est l'application de spécialisation :

**Théorème 0.1.2.** (Silverman – [50] [51, Theorem. 11.4, Chapter III]) : Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique non-scindée définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $\delta \in \text{Div}(B)$  un diviseur de degré positif. Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\sigma_t : \mathcal{E}(k(B)) \rightarrow \mathcal{E}_t(\bar{k}) \text{ est injective pour tout } t \in B(\bar{k}) \text{ satisfaisant } h_\delta(t) \geq c.$$

Ce théorème nous dit que pour presque tout  $t \in B(k)$  le rang du groupe de Mordell-Weil d'une fibre est au moins égal au rang générique de la surface. Les objets principaux d'étude de cette thèse sont les surfaces elliptiques rationnelles, i.e celles qui sont birationnelles au plan projectif. Dans le but de comparer le rang des fibres avec le générique, Billard a démontré dans [4] ce qui suit :

**Théorème 0.1.3.** (Billard) Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle dans  $\mathcal{R}_1(\mathbb{Q})$  non isotriviale avec un rang générique  $r$ . Soit  $r_t$  le rang du groupe de Mordell-Weil d'une fibre  $\mathcal{E}_t = \pi^{-1}(t)$ . Alors

$$\#\{t \in B(\mathbb{Q}); r_t \geq r + 1\} = \infty.$$

Les questions suivantes sont donc très naturelles :

**Question 0.1.4.** Le théorème 0.1.3, peut-il être généralisé aux surfaces dans  $\mathcal{R}_1(k)$  où  $k$  est un corps de nombres ?

**Question 0.1.5.** Peut-on démontrer qu'il existe une infinité de fibres avec  $r_t \geq r + 2$  pour certaines surfaces dans  $\mathcal{R}_0(k)$ ,  $\mathcal{R}_1(k)$  ou  $\mathcal{R}_2(k)$  ?

**Question 0.1.6.** Est-il possible démontrer un théorème similaire au théorème 0.1.3 pour des classes des surfaces elliptiques non rationnelles ?

Nous donnons une réponse positive aux trois questions pour  $\mathcal{E}$  définie sur un corps de nombres.

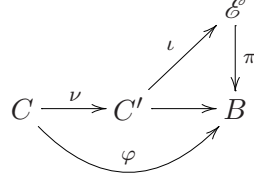
## 0.2 Résultats nouveaux

Un outil essentiel pour les démonstrations des résultats sera le suivant :

### 0.2.1 Changements de base

Soient  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique munie d'une section et  $\iota : C' \hookrightarrow \mathcal{E}$  une courbe irréductible. Soit  $\nu : C \rightarrow C'$  sa normalisation. La composition des applications ci dessus

donnée par  $\varphi = \nu \circ \iota \circ \pi$  donne un revêtement fini  $\varphi : C \rightarrow B$ .



Nous obtenons une nouvelle surface elliptique en considérant le produit fibré suivant :

$$\pi_C : \mathcal{E}^C = \mathcal{E} \times_B C \rightarrow C$$

Chaque section  $\sigma$  de  $\mathcal{E}$  induit naturellement une section dans  $\mathcal{E}^C$  :

$$(\sigma, id) : C = B \times_B C \rightarrow \mathcal{E} \times_B C$$

Nous les appellerons des sections *anciennes*. La surface  $\mathcal{E} \times_B C$  a aussi une *nouvelle section* donnée par

$$\sigma_C^{\text{new}} = (\iota \circ \nu, id) : C \rightarrow \mathcal{E} \times_B C$$

**Remarque 0.2.1.** La surface  $\mathcal{E} \times_B C$  peut être singulière même si la courbe  $C'$  est lisse i.e  $C' = C$ . Par exemple, si le morphisme  $\phi_C : C \rightarrow B$  ramifie au-dessus d'un point  $t \in B$  tel que  $\pi^{-1}(t)$  est une mauvaise fibre, alors la nouvelle surface est singulière.

**Remarque 0.2.2.** Si  $C'$  n'est pas contenue dans une fibre ni dans une section alors la nouvelle section est clairement différente des sections anciennes, mais pas forcément linéairement indépendante.

La composition de la normalisation  $\nu : C \rightarrow C'$  avec l'inclusion  $\iota : C' \hookrightarrow \mathcal{E}$  et avec la projection  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  nous donne une application  $\phi_C : C \rightarrow B$ . Le degré  $d$  de cette application et les genres de  $B$  et  $C$  sont reliés par la formule de Hurwitz

$$2g(C) - 2 = d(2g(B) - 2) + \deg(R_{\phi_C})$$

où  $\deg(R_{\phi_C})$  est le degré du diviseur de ramification de  $\phi_C$ .

Comme nous souhaitons que  $B(k)$  soit infini, nous sommes naturellement amenés à nous restreindre aux bases  $B$  telles que  $B \simeq \mathbb{P}^1$  ou  $g(B) = 1$  et  $\text{rang}(B(k)) \geq 1$ .

## 0.2.2 Résultats

L'ordre des résultats suivra celui des questions posées dans la section précédente. Le résultat suivant répond donc à la question 1.

**Théorème 0.2.3.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique dans  $\mathcal{R}_0(k)$  telle que l'un des ses modèles minimaux sur  $k$  n'est pas une surface de del Pezzo de degré un. Il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$ , où  $C$  est une courbe rationnelle dans  $\mathcal{E}$ , tel que la surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  satisfait*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1$$

Puisque une surface de del Pezzo de degré un n'est pas  $k$ -birationnellement triviale nous obtenons :

**Corollaire 0.2.4.** *Soit  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_1(k)$ , alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$ , où  $C$  est une courbe rationnelle dans  $\mathcal{E}$ , tel que*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1$$

Puisque  $C$  est rationnelle nous avons les deux résultats suivants :

**Corollaire 0.2.5.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique dans  $\mathcal{R}_0(k)$  telle qu'un modèle minimal sur  $k$  n'est pas une surface de del Pezzo de degré un. Alors*

$$\#\{t \in B(k); \text{rang}(E_t(k)) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1\} = \infty.$$

**Corollaire 0.2.6.** *Soit  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_1(k)$ , alors*

$$\#\{t \in B(k); \text{rang}(E_t(k)) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1\} = \infty.$$

**Remarque 0.2.7.** Dans le cas où les seuls modèles  $k$ -minimaux sont des surfaces de del Pezzo degré un la méthode utilisée pour démontrer ce théorème n'aboutit pas. Nous arrivons cependant, dans certains cas à démontrer son corollaire. Nous verrons, dans la sous-section 2.5.5, que les surfaces elliptiques, dont un modèle  $k$ -minimal est une surface de del Pezzo de degré un, ont rang nul sur  $k$  (et huit sur la clôture algébrique  $\bar{k}$ ). Nous y donnerons aussi des exemples pour lesquels la surface  $\mathcal{E}$  a une infinité de fibres de rang strictement supérieur au rang générique, i.e une infinité de fibres de rang au moins un.

L'étude de la question 2 nous a apporté les résultats suivants :

**Théorème 0.2.8.** *Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique dans  $\mathcal{R}_0(k)$ . Soit  $X$  un modèle  $k$ -minimal. Supposons que  $X$  satisfait les hypothèses suivantes :*

- i)  $(\omega_X.\omega_X) = d > 1$ ,*
- ii) Il existe un  $k$ -morphisme birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow X$  tel que  $\bar{f} : \mathcal{E} \times_k \bar{k} \rightarrow X \times_k \bar{k}$  a  $d$  points distincts dans le centre.*

*Alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$  où  $C$  est une courbe de genre  $\leq 1$  telle que  $C(k)$  est infini et la surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  satisfait :*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 2.$$

Nous avons obtenu le même résultat pour d'autres surfaces elliptiques rationnelles, à savoir :

**Théorème 0.2.9.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle. Supposons que  $\mathcal{E}$  satisfait l'une de deux hypothèses suivantes :*

- i)  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_2(k)$ ,*
- ii)  $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_0(k)$  et il existe un morphisme  $k$ -birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow X$  tel que  $\bar{f} : \mathcal{E} \times_k \bar{k} \rightarrow X \times_k \bar{k}$  a 2 points distincts dans le centre et  $X$  est une surface de degré quatre.*

Alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$  où  $C$  est une courbe de genre  $\leq 1$  telle que  $C(k)$  est infini et la surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  satisfait :

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 2.$$

Puisque  $C(k)$  est infini nous obtenons :

**Corollaire 0.2.10.** *Soit  $\mathcal{E}$  comme dans les théorèmes 0.2.8 ou 0.2.9 et  $r$  son rang générique. Alors*

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 2\} = \infty.$$

**Remarque 0.2.11.** Nous démontrons en fait les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 pour une classe plus grande de surfaces elliptiques. Nous verrons ceci en détail dans les sous-sections 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 et 2.5.4 ainsi que les cas pour lesquels notre méthode n'aboutit pas.

Les constructions utilisées pour répondre à la deuxième question vont nous aider à répondre aussi à la troisième question pour quelques surfaces de type K3. En particulier pour les surfaces K3 qui satisfont :

**Définition 0.2.12.** Nous dirons qu'une surface  $\mathcal{E}$  de type K3 provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle s'il existe une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}_0 \rightarrow B$  et un revêtement de degré deux  $C \rightarrow B$ , où  $C$  est une courbe rationnelle, tels que  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_0 \times_B C$ .

**Théorème 0.2.13.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface K3 qui provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}_0$  via le changement de base donné par  $\varphi : B \rightarrow B_0$ . Supposons que  $\mathcal{E}_0$  satisfait les hypothèses du théorème 0.2.8 ou 0.2.9. Alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$  avec  $\#C(k) = \infty$  tel que*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1,$$

où  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$ .

**Corollaire 0.2.14.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface K3 qui provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}_0$  via le changement de base donné par  $\varphi : B \rightarrow B_0$ . Supposons que  $\mathcal{E}_0$  satisfait l'une des hypothèses suivantes :*

H1)  $\varphi : B \rightarrow B_0$  se factorise par  $B \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow B_0$  et un modèle  $k$ -minimal de  $\mathcal{E}_0$  est une surface de degré  $d > 1$ .

H2) Il existe un morphisme  $k$ -rationnel  $f : \mathcal{E}_0 \rightarrow S_0$  où  $S_0$  est une surface de del Pezzo de degré  $d > 1$  et  $\bar{f} : \mathcal{E}_0 \times_k \bar{k} \rightarrow S_0 \times_k \bar{k}$  a  $d$  points distincts dans le centre.

H3) Son modèle minimal sur  $k$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$ .

Soit  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil  $\mathcal{E}(k(B))$  et  $r_t$  le rang d'une fibre. Alors

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 1\} = \infty$$

Le théorème précédent est un corollaire du théorème suivant. Il concerne les surfaces K3 qui ont deux fibrations elliptiques distinctes. Éclairons ce concept :

**Définition 0.2.15.** Nous dirons qu'une surface  $\mathcal{E}$  est munie de deux fibrations elliptiques différentes  $\pi_i : \mathcal{E} \rightarrow B_i$  ( $i = 1, 2$ ) si  $\pi_i \neq \varphi \circ \pi_j$  pour tout isomorphisme  $\varphi : B_i \rightarrow B_j$  avec  $i \neq j$ .

**Remarque 0.2.16.** De façon équivalente, nous pourrions définir deux fibrations elliptiques différentes en tant que fibrations transversales, i.e, si  $F_i$  est une fibre de  $\pi_i$  pour  $i = 1, 2$  alors leur intersection satisfait

$$F_1.F_2 \neq 0.$$

**Remarque 0.2.17.** Les surfaces  $K3$  qui proviennent quadratiquement d'une surface rationnelle sont munies de deux fibrations elliptiques. La fibration transversale contribuera pour l'augmentation du rang des fibres relatives à l'autre fibration.

Notons  $\mathcal{E}_{1,t}$  (resp.  $\mathcal{E}_{2,t}$ ) les fibres de la fibration  $\pi_1 : \mathcal{E} \rightarrow B_1$  (resp.  $\pi_2 : \mathcal{E} \rightarrow B_2$ ). Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 0.2.18.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface  $K3$  munie de deux fibrations elliptiques  $\pi_i : \mathcal{E} \rightarrow B_i$ . Si  $\text{rang}(\mathcal{E}_1(k(B_1))) \geq 1$ , alors l'ensemble*

$$\{t \in B_2(k); \text{rang}(\mathcal{E}_{2,t}(k)) \geq \text{rang}(\mathcal{E}_2(k(B_2))) + 1\}$$

*est infini.*

Les démonstrations des théorèmes précédents nous permettront de démontrer le résultat suivant

**Théorème 0.2.19.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique comme dans le théorème 0.2.8 ou 0.2.9. S'il existe une courbe rationnelle  $D$  munie d'un morphisme de degré deux  $\varphi_D : D \rightarrow B$  telle que  $\text{rang}(\mathcal{E} \times_B D(k(D))) = \text{rang} \mathcal{E}(k(B)) + r_D$ , alors il existe une courbe rationnelle  $C$  munie d'un morphisme fini  $\varphi_C : C \rightarrow B$  telle que, si on note  $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times_B D \times_B C \rightarrow B'' = D \times_B C$ , alors*

- a)  $\text{rang} \mathcal{E}''(k(B'')) \geq \text{rang} \mathcal{E}(k(B)) + r_D + 1$ .
- b)  $B''(k)$  est infini.

**Remarque 0.2.20.** La courbe  $D$  dans l'énoncé du théorème 0.2.19 n'est pas forcément munie d'un morphisme  $i : D \hookrightarrow \mathcal{E}$ .

**Remarque 0.2.21.** Ce théorème, ainsi que les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 sont valables dans plus de généralité. Nous avons choisi, par simplicité, de les énoncer en supprimant certains cas. Nous verrons dans les sous-sections 2.4.2 – 2.4.4 les cas où nous arrivons à contruire les courbes de l'énoncé.

Nous donnerons, dans 3.2.2, des exemples de surfaces qui satisfont les hypothèses de ce théorème. Ces exemples sont produits à partir des surfaces de type  $K3$ , dont le rang générique est assez grand (supérieur à douze), qui proviennent des surfaces elliptiques rationnelles. Ils sont non triviaux, puisque le rang de ces surfaces  $K3$  est supérieur à celui de la surface rationnelle plus quatre.

Finalement, en combinant les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 avec des résultats analytiques obtenus par H. Helfgott [18] valables modulo des conjectures classiques, à savoir

- 1) La conjecture de parité qui affirme que  $(-1)^{\text{rang}(E(K))} = W(E|K)$ , où  $E$  est une courbe elliptique sur un corps de nombres et  $W(E|K)$  est un signe qui peut être attribué à  $E$  intrinsèquement.
- 2) La conjecture de Chowla qui affirme que si  $\lambda$  est la fonction de Liouville et  $f(x, y)$  un polynôme à deux variables qui n'est pas un carré, alors la moyenne de  $\lambda(f(x, y))$  est nulle (voir 6.1.7).
- 3) La conjecture de *Square Free Sieve* (conj. 6.1.1) qui affirme que si  $f(X, Y)$  est un polynôme sans facteur carré, le nombre de valeurs  $f(x, y)$  sans facteur carré tels que  $|x|, |y| \leq A$  est proportionnel à  $A^2$ .

Nous obtenons une borne meilleure mais conditionnelle pour le rang d'une infinité de fibres.

**Théorème 0.2.22.** (*modulo Conjecture de parité, Conjecture de Chowla et Square free sieve*) Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  comme dans le théorème 0.2.8, ou 0.2.9, alors

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 3\} = \infty$$

**Remarque 0.2.23.** Une classe de surfaces elliptiques ne sera pas traité par nous le long de ce texte. Ce sont les surfaces constantes, i.e celles de la forme  $E \times B$  où  $E$  est une courbe elliptique et  $B$  une courbe projective lisse. Pour ces surfaces le rang d'une fibre est, trivialement, toujours égal au rang générique, d'où notre manque d'intérêt.

**Remarque 0.2.24.** Les problèmes traités dans cette thèse peuvent être généralisés aux fibrations en dimension supérieure i.e fibrations en variétés abéliennes  $f : \mathcal{A} \rightarrow B$ . Nous retrouvons d'autres questions comme par exemple la validité de la conjecture de Tate, qui affirme que la fonction  $L$  associée au  $H^2$  de  $\mathcal{A}$  a un pôle en  $s = 2$  dont l'ordre est égal au rang du groupe de diviseurs en  $\mathcal{A}$  modulo ceux qui sont algébriquement équivalents à zéro. Dans [21] M. Hindry et A. Pacheco démontrent que cette conjecture est équivalente à une conjecture analytique due à Nagao en généralisant le même résultat démontré pour les fibrations elliptiques par M. Rosen et J. Silverman dans [42].

**Remarque 0.2.25.** En caractéristique zéro nous ne savons pas si le rang d'une courbe elliptique est borné. En caractéristique positive grâce à J. Tate et I. Shafarevich, dans [43], on connaît des surfaces elliptiques isotriviales de rang arbitrairement grand. Les exemples non isotriviaux sur  $\mathbb{F}_p(t)$  sont dûs à Douglas Ulmer qui a aussi montré la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour ces exemples [54] et [55].

**Remarque 0.2.26.** Des calculs numériques faits par S. Fermigier dans [12] suggèrent que pour toute surface elliptique  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^1$  non constante de rang générique  $r$ , il y a une infinité de fibres de rang  $r + 1$  et  $r + 2$ , même, peut être, une proportion positive de telles fibres parmi les fibres de  $\pi$ . Les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 confirment donc cette "conjecture" pour une grande famille de surfaces elliptiques rationnelles.

**Remarque 0.2.27.** Dans [44] on a traité le cas i) du théorème 0.2.9 en donnant la démonstration en détail dans le cas où au moins deux points de base d'un pinceau qui induit la surface sont  $k$ -rationnels.

### 0.2.3 Organisation du texte

Le premier chapitre est dédié aux résultats, la plupart classiques, utilisés le long des démonstrations des théorèmes principaux. Là on retrouvera comment obtenir géométriquement une surface elliptique rationnelle, la théorie d'intersection dans ces surfaces et des énoncés de la théorie des réseaux de Mordell-Weil développée par Shioda, de la théorie de Kummer étudié par Ribet, Bertrand et d'autres, de la théorie des modèles minimaux sur un corps parfait due à Manin, Tsfasman, Iskovskih entre autres.

Dans le deuxième chapitre je démontre les théorèmes principaux de cette thèse pour les surfaces elliptiques rationnelles (0.2.8 et 0.2.9). Le résultat principal est le lemme 2.2.4 qui, combiné à des constructions de pincesaux de courbes rationnelles dans le modèle  $k$ -minimal de la surface, démontre les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9. La démonstration d'un cas spécial du théorème 0.2.9 sera complétée par le lemme 4.2.2 au chapitre 4.

Le troisième chapitre traite les surfaces elliptiques de type  $K3$ . J'étudie le problème de comparaison du rang générique avec celui des fibres spéciales. Je démontre, avec une variante de la méthode du chapitre précédent, l'existence d'une infinité de fibres dont le rang du groupe de Mordell-Weil sur le corps de définition de la surface est supérieur au rang générique plus un, pour une certaine classe de surfaces de type  $K3$ .

Lors de l'étude du problème principal j'ai pu rencontrer d'autres questions également liées aux surfaces elliptiques. Les trois derniers chapitres constituent une partie de mon travail sur ces questions.

Au chapitre quatre j'examine de près les surfaces elliptiques rationnelles du point de vue de leurs fibres singulières. D'abord j'étudie leur comportement après un changement de base ; la deuxième section apporte possiblement un nouveau regard en étudiant le lien, dans une surface elliptique rationnelle, entre les points de base d'un pinceau de cubiques qui induit la surface et les possibles types de mauvaises fibres. Ces arguments sont utilisés pour terminer la preuve du théorème 0.2.8 dans un cas particulier laissé en suspens au chapitre deux.

Le chapitre cinq, qui est indépendant du reste du travail, fournit une construction géométrique des surfaces elliptiques rationnelles dont le rang du groupe de Mordell-Weil de la fibre générique sur un corps algébriquement clos est égal à cinq.

Finalement, dans le dernier chapitre, on reprend le problème principal à partir de la théorie analytique des nombres. En combinant les résultats principaux avec les résultats analytiques (modulo la conjecture de parité, la conjecture du *square free sieve* et celle due à Chowla) nous obtenons une meilleure borne inférieure pour le rang des fibres d'une surface elliptique qui reste en général conditionnelle, même si on peut la démontrer dans des cas particuliers, ce que nous illustrerons par des exemples.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Surfaces elliptiques

Soit  $k$  un corps de nombres et  $B$  une courbe projective, lisse et irréductible définie sur  $k$ . Dans le texte nous adoptons la définition suivante pour une surface elliptique :

**Définition 1.1.1.** Une surface elliptique définie sur  $k$  est une surface algébrique projective  $\mathcal{E}$  munie d'une fibration  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  telle que :

- (fibration elliptique) Pour presque tout  $t \in B$ ,  $\pi^{-1}(t)$  est une courbe de genre 1.
- (existence d'une section sur  $k$ ) Il existe un morphisme défini sur  $k$ ,  $\sigma_0 : B \rightarrow \mathcal{E}$  tel que  $\pi \circ \sigma_0 : B \rightarrow B$  est l'identité.

**Remarque 1.1.2.** Il existe des surfaces elliptiques qui sont toujours minimales, par exemple les surfaces elliptiques de type  $K3$  (voir 0.2.18). De l'autre côté, l'existence d'une section implique qu'une surface elliptique rationnelle n'est jamais minimale dans le sens classique de la définition (voir [17, page 418]).

Néanmoins, elle peut être minimale dans le sens suivant :

**Définition 1.1.3.** Une surface fibrée  $S \rightarrow B$  est *minimale* (comme surface fibrée) si

- a)  $S$  est lisse.
- b) Tout  $B$ -morphisme birationnel  $S' \rightarrow S$ , où  $S' \rightarrow B$  est une surface fibrée, est un isomorphisme.

De façon équivalente, une surface fibrée est minimale si ses fibres ne contiennent pas de courbes exceptionnelles.

**Remarque 1.1.4.** Notre définition de surface elliptique est la même que celle dans [51]. Elle diffère de la définition adoptée par la plupart de géomètres algébristes qui ne demandent pas l'existence d'une section, mais supposent que la surface est non singulière.

Nous pouvons associer à une surface elliptique  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une courbe elliptique  $E$  sur le corps de fonctions de la courbe de base. Cette association est bijective à isomorphisme birationnel de surfaces elliptiques près. La courbe  $E$  est la fibre générique de  $\mathcal{E}$ . Donc, si  $\mathcal{E} \rightarrow B$  est une surface elliptique minimale, il existe une unique courbe elliptique  $E$  définie sur  $k(B)$  dont  $\mathcal{E}$  est le modèle minimal et, réciproquement pour toute courbe elliptique  $E$  définie sur  $k(B)$  il existe une unique surface elliptique minimale  $\mathcal{E} \rightarrow B$  dont  $E$  est la fibre générique.

La fibre générique, en tant que courbe elliptique, a donc un modèle de Weierstrass

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

avec  $a, b \in k(B)$ .

Le modèle de Weierstrass est dit *minimal* en  $t \in B(\bar{k})$  si  $a$  et  $b$  sont réguliers en  $t$  et si  $\text{ord}_t(a) \leq 3$  ou  $\text{ord}_t(b) \leq 5$ .

Cette présentation de la courbe/surface est très utile pour décrire les mauvaises fibres de la surface ainsi que d'autres propriétés géométriques.

## 1.2 Outils géométriques

### 1.2.1 Théorie d'intersection sur les surfaces elliptiques minimales

Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique (lisse et munie d'une section). Le diviseur canonique  $K_{\mathcal{E}}$  satisfait (voir [1, Theorem 7.15] et [32, Prop.III.1.1]) :

$$K_{\mathcal{E}} \simeq \pi^*(L^{-1} \otimes K_B),$$

où  $K_B$  est le diviseur canonique de  $B$  et  $L^{-1} := \pi_*(\mathcal{N}_{C_0|\mathcal{E}})$  est l'image directe du fibré normal à la section neutre  $C_0$ ; ou encore  $L^{-1} = R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ . Il existe donc  $D \in \text{Pic}(B)$  tel que  $K_{\mathcal{E}} = \pi^*(D)$ .

**Remarque 1.2.1.** Si  $\pi$  n'est pas munie d'une section, la fibration peut avoir des fibres multiples qui interviendront dans l'expression de  $K_{\mathcal{E}}$ . Ce cas est traité dans [1].

Soient  $F$  une fibre et  $C_0$  une section. Nous avons les intersections suivantes :

$$C_0.F = 1, F_0.F = 0,$$

pour toute composante de fibre  $F_0$ .

Puisque le nombre d'intersection est invariant par déformation, et deux fibres ne s'intersectent pas,  $F^2 = 0$ . La classe canonique satisfait (modulo équivalence numérique)

$$K_{\mathcal{E}} = (p_a(\mathcal{E}) - 2)F.$$

Une application de la formule d'adjonction nous donne :

$$C_0^2 + C_0.K_{\mathcal{E}} = 2g(C_0) - 2 \Rightarrow C_0^2 = -(p_a(\mathcal{E}) - 2) - 2 = -p_a(\mathcal{E}).$$

Dans le cas où la surface est rationnelle  $p_a(\mathcal{E}) = 1$  donc la classe d'une fibre est moins la classe canonique et les sections sont les courbes exceptionnelles

$$K = -F \text{ et } C_0^2 = -1.$$

Si  $F$  est une fibre et  $F_i$  est une des ses composantes, la formule d'adjonction donne

$$F_i^2 = 2p_a(F_i) - 2$$

alors, ou bien  $F_i = F$  et dans ce cas  $p_a(F_i) = 1$  (par exemple si  $F_i$  est de type  $I_0, I_1$  ou  $II$ ) et donc  $F_i^2 = 0$ , ou bien  $p_a(F_i) = 0$  et  $F_i$  est lisse de genre zéro avec  $F_i^2 = -2$ .

Si la surface est de type K3,  $p_a(\mathcal{E}) = 2$  (la classe canonique est nulle), les sections sont des courbes de auto-intersection égale à  $-2$ . De plus, par la formule d'adjonction (puisque le diviseur canonique est trivial), toute courbe a une auto-intersection paire :

$$C^2 = 2p_a(C) - 2.$$

### 1.2.2 Construction de surfaces elliptiques rationnelles

Soient  $F$  et  $G$  deux cubiques dans  $\mathbb{P}^2$ . Nous noterons aussi  $F$  et  $G$  des polynômes homogènes de degré trois associés. Supposons  $F$  lisse.

Le pinceau de cubiques engendré par  $F$  et  $G$

$$P := \{tF + uG : (t : u) \in \mathbb{P}^1\}.$$

a neuf points de base (comptés avec ses multiplicités) et l'éclatement de ces neuf points dans  $\mathbb{P}^2$  définit une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}_P$ .

La surface  $\mathcal{E}_P$  est birationnelle à la surface elliptique (éventuellement singulière)

$$\mathcal{E}'_P = \{[x, y, z], [t, u] \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : tF(x, y, z) + uG(x, y, z) = 0.\}$$

Réciproquement, sur un corps algébriquement clos nous avons

**Proposition 1.2.2.** *Toute surface elliptique lisse minimale rationnelle avec une section est isomorphe à une surface  $\mathcal{E}_P$ .*

**Démonstration :** (d'après R. Miranda) Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique minimale rationnelle, sa classe canonique  $K = -F$ , où  $F$  est la classe des fibres. Si  $C$  est une courbe lisse dans  $\mathcal{E}$  on a  $C^2 \geq -2$ , par la formule d'adjonction  $-2 = C^2 + C.K = C^2 - C.F$ , comme  $F$  varie dans un pinceau on a  $C.F \geq 0$ . Si on fait la contraction de  $\mathcal{E}$  à un modèle minimal (qui doit être soit  $\mathbb{P}^2$ , soit  $F_N$  - surface réglée rationnelle), on ne peut pas avoir  $N \geq 3$  parce que les surfaces  $F_N$  (géométriquement réglées de base  $\mathbb{P}^1$ , voir chapitre 3 de [3]) ont une courbe rationnelle avec auto-intersection  $-N$ . Alors, quelle que soit la façon dont on fait la contraction on obtient nécessairement  $\mathbb{P}^2, F_0, F_1$  or  $F_2$ . Mais un éclatement de  $F_0$  a aussi

une contraction à  $\mathbb{P}^2$ , une contraction de  $F_1$  est elle même  $\mathbb{P}^2$ , et un éclatement de  $F_2$  peut être aussi contracté à  $\mathbb{P}^2$  si le point n'est pas dans une  $(-2)$ -courbe. Mais pour obtenir  $\mathcal{E}$  à partir de  $F_2$  on ne peut pas éclater un point dans une  $(-2)$ -courbe, parce qu'on obtiendra une  $(-3)$ -courbe. Donc  $\mathcal{E}$  peut être obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^2$ .

Comme  $K_{\mathcal{E}}^2 = 0$  et  $K_{\mathbb{P}^2}^2 = 9$ , on a eu besoin d'exactly 9 éclatements.

Finalement on démontre que si  $F$  est une fibre irréductible de  $\mathcal{E}$  et  $q$  est l'éclatement, alors  $q(F)$  est une cubique de  $\mathbb{P}^2$ . Si  $D \in \mathbb{P}^2$  est l'image d'une fibre irréductible (courbe elliptique)  $F$ , alors

$$0 = (F.F) = (D.D) + \sum_{q(E_i) \in D} (E_i.E_j)$$

$E_i.E_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $-1$ , si  $i = j$ . Comme on éclate neuf fois on obtient neuf courbes exceptionnelles  $E_i, i = 1, \dots, 9$ . Il faut vérifier que les neuf points appartiennent à  $D = q(F)$ ,

$$q^*D = F + \sum_{q(E_i) \in D} E_i = F + E_D \Rightarrow 0 = F.F = q^*D.q^*D + E_D.E_D = D.D + E_D.E_D$$

Nous avons :

(i)  $D.D = -E_D.E_D = \#\{i \in \{1, \dots, 9\}; q(E_i) \in D\} \leq 9 \Rightarrow D.D \leq 9$ .

(ii)  $p_a(D) \geq g(D) = 1$ , donc  $\deg(D) \geq 3$  et alors  $D.D \geq 9$  avec égalité si et seulement si  $D$  cubique.

(i) + (ii)  $\Rightarrow D$  cubique et  $D$  passe par les neuf points de l'éclatement. □

Cette construction motive la définition suivante :

**Définition 1.2.3.** Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle. Nous dirons qu'un pinceau de cubiques  $\Lambda$  dans  $\mathbb{P}^2$  induit  $\mathcal{E}$ , si  $\mathcal{E}$  est  $\bar{k}$ -isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  éclaté dans les points de base de  $\Lambda$ . La choix de  $\Lambda$  est non canonique.

Sur un corps de nombres quelconque une surface elliptique rationnelle peut avoir d'autres modèles minimaux. En conséquence nous ne pourrons pas garantir qu'il existe un morphisme  $k$ -birationnel entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathbb{P}^2$ . Cette question sera traitée dans les sous-sections 1.3.1 et 1.3.2.

### 1.2.3 Un critère de rationalité

Dans la sous-section précédente nous avons vu qu'une surface elliptique rationnelle est isomorphe, sur la clôture algébrique, au plan projectif éclaté en neuf points, les points de base d'un pinceau de cubiques.

Souvent une surface elliptique est donnée par une équation sur le corps de fonctions  $k(t)$ . Nous énonçons ici un critère connu pratique pour déterminer si la surface est birationnelle à  $\mathbb{P}^2$ , sur  $\bar{k}$ .

**Proposition 1.2.4.** [32, Lemma III.4.6 (a)] [42, Remark 1.3.1] Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  une surface elliptique, définie sur un corps de nombres  $k$ , dont l'équation minimale de Weierstrass sur  $k(B) = k(t)$  est

$$Y^2 = X^3 + A(t)X + B(t).$$

Alors  $\mathcal{E}$  est rationnelle si et seulement si l'équation en haut vérifie l'une des deux conditions :

- 1)  $0 < \max\{3 \deg(A), 2 \deg(B)\} < 12$ ,
- 2)  $3 \deg(A) = 2 \deg(B) = 12$  et  $\text{ord}_{t=0} t^{12} \Delta(t^{-1}) = 0$ ,

où  $\Delta = 4A(t)^3 + 27B(t)^2$  est le discriminant de l'équation de Weierstrass.

**Remarque 1.2.5.** Il suit de la proposition 1.2.4 que la surface d'équation généralisée  $Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6$  est rationnelle dès que  $\deg(a_i) \leq i - 1$ . Une variante de ce critère est le fait que si  $\Delta_{\mathcal{E}|B}$  est le diviseur discriminant minimal,  $\mathcal{E}$  est rationnelle si et seulement si  $\deg(\Delta)_{\mathcal{E}|B} = 12$ .

## 1.2.4 Sections de torsion

Les résultats de cette sous-section sont contenus dans [33] et [31]. Le premier nous dit que dans une surface elliptique minimale deux sections de torsion n'ont pas d'intersection.

**Lemme 1.2.6.** Soient  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique minimale,  $C_1$  et  $C_2$  deux sections de  $\pi$ . Si  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  alors  $C_1 - C_2$  est une section d'ordre infini.

Une conséquence de la démonstration est le corollaire suivant :

**Corollaire 1.2.7.** Soient  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique quelconque et  $C_1, C_2$  deux sections distinctes de  $\pi$ . S'il existe  $x \in \mathcal{E}^{\text{lisse}} \cap (C_1 \cap C_2)$ , alors  $C_1 - C_2$  est d'ordre infini.

Le lemme 1.2.6 est contenu dans [33, Lemma1.1] pp.250 et dans [31, Proposition VII.3.2 p.72]. Nous donnerons la preuve, sur  $\mathbb{C}$ , pour le confort du lecteur.

**Preuve :** Soit  $S_0$  la section neutre. Il suffit de démontrer que si  $S$  est une section de torsion, alors  $S$  ne rencontre pas  $S_0$ .

Puisque les sections de torsion rencontrent les fibres en une composante de multiplicité un, si le lemme est vrai après un changement de base, il le sera aussi avant. Comme toute surface elliptique admet une fibre semi-stable après un changement de base, il suffit de vérifier le lemme localement autour d'une fibre de type  $I_n$ .

Si  $S$  et  $S_0$  se coupent dans une fibre lisse ( $I_0$ ), la fibration est localement donnée par  $\mathbb{C} \times \Delta_t / \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau(t)$ , où  $\Delta_t$  est un disque avec coordonnée  $t$ . La section neutre est donnée par  $z(t) = 0$ . Supposons  $S$  donnée par l'application holomorphe  $z(t)$ ; comme  $S$  est une section de torsion,  $z(t) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\tau(t)$  pour tout  $t$ , ceci implique que  $z(t)$  est constante. Par supposition  $S$  et  $S_0$  se rencontrent, on a  $z(0) = 0$ , donc  $z(t) = 0$  et  $S = S_0$ .

Supposons que  $S$  et  $S_0$  se touchent en un point d'une fibre singulière  $I_n$  avec  $n \geq 1$ . La fibration a une représentation locale sous forme de Jacobi  $\mathbb{C}^* \times \Delta_t / \{t^{nj} | j \in \mathbb{Z}\}$  avec section

neutre donnée par  $z(t) = 1$ . Soit  $S$  donnée par  $z(t) \in \mathbb{C}^*$  avec  $s(0) = 1$  (parce que  $S$  et  $S_0$  se coupent). Puisque  $S$  est de torsion nous avons  $z(t)^k = t^{nj}$  pour un entier  $j$ . Donc  $z(t)$  est une branche de  $t^{nj/k}$  et puisque  $z(t)$  est holomorphe,  $nj/k \in \mathbb{Z}$  et  $z$  est une racine de l'unité élevée à une puissance positive de  $t$ . Néanmoins, puisque  $z(0) = 1$  on doit avoir  $z(t)$  égal à 1, et encore  $S = S_0$ . □

**Preuve du corollaire :** Soit  $\mathcal{E}_0$  le modèle minimal lisse birationnel à  $\mathcal{E}$ . Soit  $q$  l'application birationnelle entre les deux surfaces et soit  $S$  l'ensemble des points singuliers de  $\mathcal{E}$ . Alors  $q$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{E} - S$  et  $\mathcal{E}_0 - q^{-1}(S)$ . Donc si  $p \in \mathcal{E}$  est non singulier, deux sections de torsion ne se rencontrent pas dans  $p$  puisque ceci entraînerait que les sections de torsion données par les images inverses des deux sections se couperaient au point  $q^{-1}(p)$ . Le lemme nous garantit que ceci ne peut pas arriver. □

### 1.2.5 Le réseau de Mordell-Weil et l'accouplement hauteur

La théorie des réseaux de Mordell-Weil a été développée par Shioda. Il a remarqué que les groupes de Néron-Severi et de Mordell-Weil d'une surface elliptique ont une structure de réseau muni d'un accouplement. Cet accouplement est essentiellement donné par l'intersection. Dans le cas du réseau de Mordell-Weil il détermine une hauteur qui est en fait la hauteur de Néron-Tate.

Il a décrit avec Oguiso [37] les réseaux de Mordell-Weil pour une surface elliptique rationnelle. Par exemple, si la surface est de rang huit (le maximum pour une surface rationnelle) alors son réseau de Mordell-Weil est un  $E_8$ . Plus tard Shimada [46] a décrit tous les réseaux possibles pour une K3 elliptique.

La hauteur donnée par l'accouplement dans le réseau de Mordell-Weil nous sera très utile dans un lemme crucial, le lemme 2.2.4, ainsi que dans des nombreux exemples. Elle dépend des mauvaises fibres, mais puisque deux types de fibres peuvent avoir le même réseau associé la hauteur ne distingue pas tous les types de fibres (par exemple  $I_2$  et  $III$  sont équivalentes). Pour la définir nous aurons besoin de quelques notations :

Soit  $\Theta_v$  une fibre avec  $m_v$  composantes notées par  $\Theta_{v,i}$ . Soient  $\Theta_{v,0}$  la composante neutre et  $A_v = ((\Theta_{v,i}, \Theta_{v,j}))_{1 \leq i, j \leq m_v - 1}$  matrice qui est définie négative. L'accouplement hauteur est donné par la formule suivante :

$$(1.1) \quad \langle P, Q \rangle = \chi + (PO) + (QO) - (PQ) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P, Q)$$

où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler de la surface,  $(PQ)$  est l'intersection des sections  $P$  et  $Q$  et  $\text{contr}_v(P, Q)$  donne la contribution locale dans  $v \in R$  selon leur intersection avec les composantes de fibres : si  $P$  coupe  $\Theta_{v,i}$  et  $Q$  coupe  $\Theta_{v,j}$  alors  $\text{contr}_v(P, Q) = -(A_v^{-1})_{i,j}$  si  $i \geq 1$  et  $j \geq 1$  et zéro dans le cas contraire ( $P$  ou  $Q$  rencontre la composante neutre).

La matrice  $A_v$  est la matrice d'intersection définie-négative

$$A_v = ((\Theta_{v,i} \cdot \Theta_{v,j}))_{1 \leq i; j \leq m_v - 1}$$

de rang  $m_v - 1$ .

Dans [47] Shioda a fourni la table suivante :

type de $F_v$	III	III*	IV	IV*	$I_b (b \geq 2)$	$I_b^* (b \geq 0)$
$contr_v(P)$	1/2	3/2	2/3	4/3	$i(b-i)/b$	$\begin{cases} 1 & (i=1) \\ 1+b/4 & (i>1) \end{cases}$
$contr_v(P, Q)$	—	—	1/3	2/3	$i(b-j)/b$	$\begin{cases} 1/2 & (i=1) \\ (2+b)/4 & (i>1) \end{cases}$

Où  $P$  rencontre  $\Theta_{v,i}$  et  $Q$  rencontre  $\Theta_{v,j}$  avec  $i \leq j$ .

Les fibres additives potentiellement bonnes ont une unique composante, dont la multiplicité est un, qui n'intersecte pas la section neutre. C'est pour cela que la contribution est fixé pour ces fibres.

Pour les fibres de type  $I_n$ , numérotation des composantes suit le sens anti-horaire. En fixant  $\Theta_0$ , la composante qui intersecte la section neutre, alors  $\Theta_1$  est la composante qui coupe  $\Theta_0$  à droite et  $\Theta_{n-1}$  est celle qui la coupe à gauche.

## 1.3 Outils arithmétiques

### 1.3.1 Modèles minimaux sur un corps parfait

La théorie de cette sous-section a été développée par Manin [24], [25], Tsfasman [27], Iskovskih [22], Colliot-Thélène dans [9] et [8]. Nous énoncerons seulement les deux résultats principaux pour la suite.

**Théorème 1.3.1.** [27] *Soit  $X$  une surface rationnelle minimale lisse définie sur un corps parfait  $k$ . Alors  $X$  est isomorphe à une surface dans l'une de deux familles :*

I) *Une surface de del Pezzo avec  $PicX \simeq \mathbb{Z}$ .*

II) *Une surface munie d'une fibration en coniques telle que  $PicX \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .*

*Réciproquement, si  $X$  satisfait I), elle est automatiquement minimale. Si  $X$  satisfait II), alors elle est non minimale si, et seulement si,  $d = (K_X, K_X) = 3, 5, 6$  ou  $d = 8$  et  $X$  isomorphe à la surface réglée  $F_1$  ; il n'existe pas de surface minimale avec  $d = 7$ .*

*Quelques surfaces munies d'une fibration en coniques sont aussi des surfaces de del Pezzo, à savoir, si  $d = 3, 5, 6$  ou si  $d = 1, 2, 4$  et  $X$  a deux fibrations différentes, ou  $d = 8$  et  $\bar{X} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou  $\mathbb{P}^2$  éclaté en un point.*

Nous rappelons que, sur un corps non algébriquement clos, une surface de del Pezzo est une surface complète et lisse dont le faisceau anti-canonique est ample. Sur un corps algébriquement clos les surfaces de del Pezzo de degré  $d$  sont isomorphes à l'éclatement de  $9 - d$  points en position générale dans  $\mathbb{P}^2$  ou, si  $d = 8$ , soit à l'éclatement d'un point dans  $\mathbb{P}^2$ , soit à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Définition 1.3.2.** *Nous dirons qu'une surface  $X$  est  $k$ -birationnellement triviale, ou  $k$ -rationnelle, s'il existe une application birationnelle  $\mathbb{P}^2 \rightarrow X$  définie sur  $k$ .*

**Théorème 1.3.3.** [27] *Toute surface minimale avec  $d \leq 4$  est  $k$ -birationnellement non-triviale.*

**Théorème 1.3.4.** [27, Thm. 7.1.1] *Toute surface  $X$  rationnelle de degré au moins cinq telle que  $X(k) \neq \emptyset$  est  $k$ -rationnelle.*

**Remarque 1.3.5.** A priori toutes les surfaces minimales avec  $d \geq 1$  décrites dans le théorème 1.3.1, telles que  $X(k) \neq \emptyset$  peuvent être un modèle  $k$ -minimal d'une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}$ . La condition  $X(k) \neq \emptyset$  s'impose grâce à la section neutre de  $\mathcal{E} \rightarrow B$  qui est définie sur  $k$  et se contracte sur un point  $k$ -rationnel. On exclura aussi les fibrés en coniques de degré huit tels que  $\bar{X} = X \times_k \bar{k} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  avec  $n \geq 3$ , puisqu'une telle surface contient une courbe avec auto-intersection  $-n$  et une surface elliptique ne contient pas des courbes avec auto-intersection  $-n$  avec  $n \geq 3$ .

### 1.3.2 Surfaces elliptiques $k$ -rationnelles

Soit  $E$  une surface elliptique  $k$ -rationnelle. Selon les résultats de la sous-section précédente le modèle minimal  $X$  de  $E$  sur  $k$  est tel que  $d = (K_X, K_X) \geq 5$ . En plus nous avons :

**Lemme 1.3.6.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique  $k$ -rationnelle. Alors un modèle minimal  $X$ , sur  $k$ , est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$  ou à une surface de del Pezzo de degré cinq, six ou huit avec  $X \times_k \bar{k} \simeq \mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$  ou  $F_2 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ .*

**Démonstration :** Nous montrerons d'abord qu'un modèle minimal d'une surface elliptique  $k$ -rationnelle appartient à la famille I) ou est isomorphe sur  $\bar{k}$  à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou à  $F_2 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ .

Si  $d = 5, 6$  et  $X$  est dans II) alors  $X$  est non minimale. Les surfaces avec  $d = 7$  sont toujours non minimales. Pour  $d = 8$  dans II), si  $\bar{X} \simeq F_1$  alors la surface  $X$  est aussi non minimale, les surfaces telles que  $\bar{X} \simeq F_{n \geq 3}$  contiennent une courbe de auto-intersection  $-n$  et ne peuvent donc pas être un modèle minimal d'une surface elliptique, l'unique possibilité sera  $\bar{X} = F_2$  ou  $F_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ; finalement pour  $d = 9$ ,  $X$  est une surface de Severi-Brauer avec un point  $k$ -rationnel, donc isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$ .

Regardons maintenant quels sont les cas dans la famille I) qui ne se produisent pas. Le cas où son degré est sept est exclu et si le degré est neuf alors  $X$  est, trivialement,  $\mathbb{P}_k^2$ . Il nous reste à exclure les surfaces de del Pezzo de degré huit qui ne sont pas isomorphes sur  $\bar{k}$  à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Une telle surface est donnée par l'image inverse de l'éclatement d'un point dans  $\mathbb{P}^2$ . Le centre de la transformation monoïdale  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  correspond à un point de base d'un pinceau de cubiques dans  $\mathbb{P}^2$ . Puisque les huit autres points de base sont invariants par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$  le neuvième point l'est aussi, il est donc  $k$ -rationnel.  $\square$

**Proposition 1.3.7.** *Toute surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}$  définie sur un corps de nombres  $k$  avec une fibre de type II\* ou III\* est  $k$ -rationnelle.*

**Démonstration :** Si  $\mathcal{E}$  est une surface elliptique rationnelle alors par la sous-section précédente son modèle  $k$ -minimal  $S$  est soit une surface de del Pezzo, soit un fibré en coniques. Nous allons montrer que, si  $\mathcal{E}$  contient un de deux types de mauvaise fibre de l'énoncé, alors le degré de ce modèle est forcément supérieur à quatre. Ceci nous suffit par le théorème 1.3.3. Si  $\mathcal{E}$  contient une fibre  $F$  de type  $II^*$  ou  $III^*$  alors, par le tableau des possibles configurations en [38], cette fibre est la seule de ce type, et donc définie globalement sur  $k$ . De plus, la disposition et la multiplicité des composantes de  $F$  implique que chaque composante est définie sur  $k$ . Chacune, avec exception de la composante qui intersecte la section neutre, contribue au groupe de Picard de  $\mathcal{E}$  sur  $k$ . Puisqu'une fibre de type  $II^*$  (resp.  $III^*$ ) a neuf (resp. huit) composantes le rang du groupe de Picard  $Pic(\mathcal{E}|k)$  est au moins huit. Le centre du morphisme birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  contient au moins six points. Ce qui implique que le degré de  $S$  est au moins six. Il suit de la sous-section précédente que  $S$  est  $k$ -rationnelle.  $\square$

**Proposition 1.3.8.** *Si  $\mathcal{E}$  est une surface elliptique rationnelle avec une fibre de type  $II^*$  ou  $III^*$  alors son modèle minimal est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$  ou à une surface de del Pezzo de degré huit avec  $X \times_k \bar{k} \simeq \mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$  ou  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ .*

**Preuve :** Soit  $X$  le modèle minimal de  $\mathcal{E}$  sur  $k$ . Par la proposition antérieure  $X$  est soit  $\mathbb{P}^2$ , soit une del Pezzo de degré cinq, six ou huit avec  $X \times_k \bar{k} \simeq \mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$  ou  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ . Supposons que  $X$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$  ni à une surface de degré huit.

Le morphisme  $k$ -birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow X$  s'étend en un  $\bar{k}$ -morphisme  $f : \mathcal{E}_{\bar{k}} \rightarrow X_{\bar{k}}$  qui est en fait un facteur d'un  $\bar{k}$ -morphisme (le choix de  $\mathcal{E} \times_k \bar{k} \rightarrow \mathbb{P}^2$  n'est pas unique)

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}_{\bar{k}} \\ \downarrow f \\ X_{\bar{k}} \\ \downarrow g \\ \mathbb{P}_{\bar{k}}^2 \end{array}$$

Par la proposition 1.2.2,  $\mathcal{E}$  est  $\bar{k}$ -isomorphe à l'éclatement des points de base d'un pinceau de cubiques dans  $\mathbb{P}^2$ . Soit  $\mathcal{L}$  un pinceau qui induit  $\mathcal{E}$  sur  $\bar{k}$ . Par [31, Lemma 6.4], il contient une droite triple ou une droite double unie à une droite. Le morphisme  $g : X_{\bar{k}} \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{k}}^2$  a pour centre des points parmi les points de base de  $\mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{L}$  contient une droite triple, il y a au plus trois points de base qui sont donc colinéaires. Puisque un modèle minimal est une surface de del Pezzo, le centre ne peut pas contenir les trois points colinéaires. Il contient donc un ou deux points, ce qui contredit le fait que le degré de  $X$  est cinq ou six.

Dans le deuxième cas (une droite double unie à une droite simple) le nombre de points de base est aussi trois puisque l'unique configuration qui entraîne une fibre de type  $III^*$  a au plus trois points de base qui sont colinéaires. Puisque  $X$  est une surface de del Pezzo,

le centre de  $g$  est donné par au maximum deux points comme dans le cas précédent, en contredisant encore une fois le fait que  $X$  est de degré cinq ou six.  $\square$

### 1.3.3 Un exemple de surface elliptique rationnelle dont $\mathbb{P}^2$ n'est pas un modèle $\mathbb{Q}$ -minimal

Nous construirons une surface elliptique rationnelle, munie d'une section définie sur  $\mathbb{Q}$ , dont un modèle  $\mathbb{Q}$ -minimal est une surface cubique, i.e une surface de del Pezzo de degré trois.

Considérons  $S$  la surface cubique dans  $\mathbb{P}^3$  donnée par l'équation suivante :

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + 2T_3^3 = 0$$

Cette surface cubique est  $\mathbb{Q}$ -minimale (voir par exemple [26, Ex. 21.9]) et satisfait donc  $Pic(S) \simeq \mathbb{Z}$  et  $Pic(\bar{S}) \simeq \mathbb{Z}^7$ .

Soit  $i : S \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  l'immersion fermée donnée par le faisceau anti-canonique  $\Omega_S^{-1}$ . Le diviseur canonique satisfait

$$\omega_S^{-1} \simeq i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)).$$

Les courbes données par les diviseurs des sections dans  $H^0(S, \omega_S^{-1})$  peuvent être décrites par des équations linéaires dans  $\mathbb{P}^3$ . Un pinceau dans  $|\omega_S^{-1}|$  a trois points de base.

Nous prendrons maintenant un pinceau dont les points de base sont l'un des trois défini sur  $\mathbb{Q}$  et les autres deux sont conjugués par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ . Voici le pinceau considéré :

$$\{tF + uG = 0; (t : u) \in \mathbb{P}^1\}, F(T_0, T_1, T_2, T_3) = T_0 - T_1 \text{ et } G(T_0, T_1, T_2, T_3) = T_2.$$

Les points de base sont

$$P_1 = (1 : 1 : 0 : -1), P_2 = (1 : 1 : 0 : -e^{\frac{2i\pi}{3}}), P_3 = (1 : 1 : 0 : -e^{\frac{4i\pi}{3}}).$$

L'éclatement de  $S$  dans ces points produit une surface elliptique rationnelle dont l'équation sous la forme de Weierstrass, calculé à l'aide du logiciel MAGMA [5] est :

$$\mathcal{E} : Y^2 = X^3 + \left(\frac{28}{27}t^6 + \frac{1}{216}t^3\right).$$

Les fibres mauvaises sont de type  $I_0^*$  et  $3II$ .

Puisque les points de base sont différents, la surface  $\mathcal{E}$  est un exemple de surface qui satisfait les hypothèses du théorème 0.2.8.

**Remarque 1.3.9.** Cette construction suit l'idée présentée en [24, page 106]. Là, Manin considère l'immersion canonique d'une surface de del Pezzo  $S$  de degré  $3 \leq n \leq 8$  dans  $\mathbb{P}^n$ . En intersectant  $S$  avec un  $\mathbb{P}^{n-2}$  générique et en considérant la transformation monoïdale

de centre  $S \cap \mathbb{P}^{n-2}$  dans  $S$  on obtient une surface elliptique  $\mathcal{E}$  fibré sur la droite projective  $B = \mathbb{P}^1$ . La surface  $\mathcal{E}$  est  $B$ -minimale. Il conclut de cela que les  $k$ -formes des surfaces de del Pezzo sont des cas particuliers des  $k$ -formes des surfaces elliptiques. Dans le cas de surfaces de del Pezzo  $S$  de degré  $d$  égal à un ou deux, l'éclatement de  $d$  points de base d'un pinceau dans  $|\omega^{-1}|$  produit aussi une surface elliptique rationnelle dont  $S$  est une  $k$ -forme. Donc si  $S$  est  $k$ -minimale cette construction donne des surfaces elliptiques rationnelles dont le modèle  $k$ -minimal est isomorphe à  $S$ .

### 1.3.4 La formule de Shioda-Tate sur un corps de nombres

Dans cette sous-section nous rappelons la formule de Shioda-Tate pour les surfaces elliptiques sur un corps algébriquement clos, ainsi que sur un corps de nombres  $k$ .

Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique définie sur un corps algébriquement clos  $\bar{k}$  avec section neutre  $\sigma_0$ . Soit  $F = \pi^{-1}(v) = n_1 C_1 + \dots + n_s C_s$  la fibre au dessus de  $v \in B(\bar{k})$ , où  $C_i$  sont ses composantes irréductibles. Soit

$$F_v = \bigoplus \frac{\mathbb{Z}C_i}{\mathbb{Z}F}.$$

Le groupe de Galois agit sur les mauvaises fibres  $F_v$ .

La somme

$$\mathcal{F} = \bigoplus_v F_v$$

est stable par l'action du groupe de Galois. Elle est faite seulement sur un nombre fini de  $v \in B(\bar{k})$ , puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de fibres réductibles.

En considérant le plongement du groupe de Mordell-Weil  $\mathcal{E}(\bar{k}(B))$  dans le groupe de Néron-Severi  $NS(\mathcal{E})$  qui envoie une section  $\sigma$  dans  $\sigma - \sigma_0$ , nous avons l'isomorphisme décrit dans le théorème suivant :

**Théorème 1.3.10** (Formule de Shioda-Tate sur  $\bar{k}$ ). *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique définie sur un corps algébriquement clos  $\bar{k}$ . Nous avons l'isomorphisme suivant :*

$$NS(\bar{\mathcal{E}}) \simeq \mathcal{E}(\bar{k}(B)) \oplus \langle \sigma_0, F \rangle \oplus \mathcal{F},$$

où  $\langle \sigma_0, F \rangle$  est le sous groupe engendré par une fibre lisse et la section neutre.

En particulier nous avons :

**Corollaire 1.3.11.** *Soit  $\rho$  le rang du groupe de Néron-Severi,  $r$  le rang générique de  $\mathcal{E}$  et  $m_v$  le nombre de composantes de la fibre  $F_v$ , alors*

$$\rho = r + 2 + \sum_v (m_v - 1).$$

Pour une démonstration de ce théorème voir [49].

Pour une table avec les possibles configurations des mauvaises fibres voir la sous section 4.3.

Si  $\mathcal{E}$  est une surface elliptique définie sur  $k$  munie d'une section définie sur  $k$ , nous avons un isomorphisme de  $Gal(\bar{k}|k)$ -modules en considérant l'action du groupe de Galois  $G = Gal(\bar{k}|k)$  :

$$NS(\bar{\mathcal{E}})^G \simeq \mathcal{E}(\bar{k}(B))^G \oplus \langle \sigma_0, F \rangle \oplus \mathcal{F}^G.$$

Le groupe de Néron-Severi  $NS(\mathcal{E})$  sur le corps de nombres  $k$  n'est pas isomorphe, en général, au groupe  $NS(\bar{\mathcal{E}})^G$ . Il est un sous-groupe d'indice fini de ce dernier groupe ; tensoriser par  $\mathbb{Q}$  nous donne l'isomorphisme d'espaces vectoriels :

**Théorème 1.3.12.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique définie sur un corps de nombres  $k$  munie d'une section  $\sigma_0$  définie sur  $k$ . Alors*

$$NS(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{E}(k(B)) \otimes \mathbb{Q} \oplus \langle \sigma_0, F \rangle \otimes \mathbb{Q} \oplus \mathcal{F}^G \otimes \mathbb{Q}.$$

**Corollaire 1.3.13.**

$$\text{rang}(NS(\mathcal{E}|k)) = 2 + \text{rang}(\mathcal{E}|k) + \text{rang}(\mathcal{F}^G),$$

où  $G = Gal(\bar{k}|k)$ .

### 1.3.5 Théorie de Kummer

Soient  $K$  un corps de caractéristique zéro et  $A$  une variété abélienne, nous dirons que  $P \in A(K)$  est indivisible si pour tout  $Q \in A(K)$  tel que  $\alpha(Q) = P$  pour  $\alpha \in \text{End}(A)$  il existe  $\beta \in \text{End}(A)$  tel que  $\beta(P) = Q$ .

Notons  $A_n$  l'ensemble de points de  $n$ -torsion dans  $A(\bar{K})$  et  $\frac{1}{n}P$  un point dans  $Q \in [n]P$ . Le groupe de Galois  $G_{n,P}$  de l'extension

$$K(A_n, \frac{1}{n}P)|k(A_n)$$

peut être vu comme un sous groupe de  $A_n$  (L'application  $\varphi : G_{n,P} \rightarrow A_n$  qui associe  $\sigma \mapsto \sigma(\frac{1}{n}P) - \frac{1}{n}P$  est injective - voir Théorème 1.3.14). La théorie de Kummer pour les variétés abéliennes nous dit que le groupe  $G_{n,P}$  est en fait presque le groupe  $A_n$ , i.e son image par  $\varphi$  est d'indice fini (et indépendant de  $P$  et bien sur de  $n$ ) dans  $A_n$ .

Cette théorie a été étudiée de façon encore plus générale par Ribet, Bertrand, Bashmakov et d'autres. Nous nous restreindrons au cas plus simples où  $A$  est une courbe elliptique. Jusqu'à la fin de cette section  $k$  sera un corps de nombres et  $K = k(B)$  le corps de fonctions d'une courbe projective  $B$ .

Nous énoncerons maintenant un résultat typique de la théorie de Kummer pour des courbes elliptiques. Ce résultat est valable plus généralement, voir [40].

**Théorème 1.3.14.** *Soient  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $k$  et  $P \in E(k)$  un point indivisible. Alors le groupe de Galois  $G_{n,P} = Gal(k(E_n, \frac{1}{n}P)|k(E_n))$  est, à indice fini près, le groupe  $E_n$ . De plus, cet indice est majoré et indépendant de  $n$  (il ne dépend que de la courbe  $E$  et du corps  $k$ ).*

**Démonstration :** voir [40] pour le cas  $n = p$  premier et [20] pour le cas général.  $\square$

Maintenant considérons  $E$  une courbe elliptique définie sur  $K = k(B)$  et  $P \in E(K)$  indivisible. Pour presque tout  $t \in B(k)$  la spécialisation en  $t$  donne une courbe elliptique  $E_t$  définie sur  $k$  et un point  $P_t \in E_t(k)$  indivisible.

Fixons un tel  $t_0$ . Le théorème 1.3.14 appliqué à  $E_{t_0}$  implique qu'il existe une constante  $c_0 = c(E_{t_0}, k)$  telle que :

$$[k(E_{n,t_0}, \frac{1}{n}P) : k(E_{n,t_0})] = \frac{|E_{n,t_0}|}{c} = \frac{n^2}{c}, \quad c \leq c_0.$$

Ceci va nous permettre d'en déduire une inégalité sur le corps de fonctions  $K = k(B)$  puisque

$$[K(E_n, \frac{1}{n}P) : K(E_n)] \geq [k(E_{t,n}, \frac{1}{n}P_t) : k(E_{t,n})].$$

Nous avons  $[K(E_n, \frac{1}{n}P) : K(E_n)] \geq \frac{n^2}{c}$ .

### 1.3.6 Densité des points rationnels et rang des fibres

Le but de cette sous-section est de montrer le résultat élémentaire suivant :

**Lemme 1.3.15.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  une surface elliptique définie sur un corps de nombres  $k$ . Alors un et un seul des deux cas suivants se produit :*

- i)  $\#\{t \in B(k); r_t > 0\} < \infty$ .
- ii)  $\mathcal{E}(k)$  est Zariski dense dans  $\mathcal{E}$ .

**Démonstration :** Soient  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique et  $\mathcal{E}_t$  la fibre au dessus d'un point  $t \in B(\bar{k})$ . S'il existe un ensemble fini  $S$  tel que pour tout  $t$  en dehors de  $S$  le rang de la fibre  $\mathcal{E}_t$  est nul, alors le théorème principal dans [28] implique qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $T_N$  est l'adhérence de  $\text{Ker}([n])$  alors les points de  $\mathcal{E}(k)$  s'accablent dans l'union finie de courbes :

$$\mathcal{E}(k) \subseteq \left( \bigcup_{t \in T \cup S} \mathcal{E}_t \right) \cup \left( \bigcup_{N \leq N_0} T_N \right),$$

où  $T = \{t \in B(\bar{k}); \mathcal{E}_t \text{ est singulière}\}$ . D'où on conclut que  $\mathcal{E}(k)$  n'est pas Zariski dense dans  $\mathcal{E}$ .

De l'autre côté, si  $\overline{\mathcal{E}(k)} \neq \mathcal{E}$  alors il existe un ensemble fini  $I \subseteq B$  et  $S_1, \dots, S_l$ , des diviseurs horizontaux tels que :

$$\overline{\mathcal{E}(k)} \subseteq \left( \bigcup_{t \in I} \mathcal{E}_t \right) \cup S_1 \cup \dots \cup S_l.$$

Les fibres  $\mathcal{E}_t$  sont des courbes verticales dans  $\mathcal{E}$  qui ne s'intersectent pas, donc si  $t \notin I$  alors

$$\mathcal{E}_t(k) \subseteq S_{1,t}(k) \cup \dots \cup S_{l,t}(k).$$

Ce qui implique  $\text{rang}(\mathcal{E}_t(k)) = r_t = 0$ .  $\square$

# Chapitre 2

## Augmentation du rang

### 2.1 L'algorithme de Néron

Dans [35] Néron construit un exemple d'une famille de courbes elliptiques définies sur  $\mathbb{Q}$  dont le rang du groupe de Mordell-Weil  $E(\mathbb{Q}(T))$  est au moins 11. C'était le record à l'époque (en ce moment le record est de 19 pour une famille définie sur  $\mathbb{Q}$  et de 28 pour une courbe définie sur  $\mathbb{Q}$  – les deux dûs à Elkies [10], [11]). Plus tard Shioda dans [48] clarifie les idées de Néron en remarquant que son exemple fournissait un algorithme pour trouver plusieurs familles avec un rang au moins 11. La construction se fait de la façon suivante.

Soient  $F$  et  $G$  deux cubiques dans  $\mathbb{P}^2$  telles que les points  $p_1, \dots, p_9 \in V(F) \cap V(G)$  sont distincts et en position générale (pas trois dans une droite ni six dans une conique). Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  la surface elliptique rationnelle obtenue par l'éclatement de  $I_F + I_G$  avec section neutre donnée par la courbe exceptionnelle au dessus de  $p_1$ . Ses fibres sont données par  $tF(x, y, z) + uG(x, y, z)$ . Puisque les points éclatés sont distincts et en position générale,  $\mathcal{E}$  n'a pas de fibres réductibles. Son rang de Mordell-Weil est donc huit sur  $\bar{k}$  ou sur  $k$  à condition que les points  $p_i$  soient  $k$ -rationnels.

Soit  $L_i, i = 1, 2, 3$  une droite dans  $\mathbb{P}^2$  passant par le point  $p_i$  et tangente à  $F$ . Soit  $\iota_i : L'_i \hookrightarrow \mathcal{E}$  sa transformée stricte. La composition de l'inclusion  $\iota_i$  avec la projection  $\pi$  donne un morphisme de degré deux  $\phi_i : L'_i \rightarrow B$ .

La surface obtenue par le changement de base  $\mathcal{E} \times_B L'_1$  a une nouvelle section donnée par  $L'_1 \rightarrow \mathcal{E} \times_B L'_1$ . Nous pouvons faire encore deux changements de base et obtenir  $\mathcal{E} \times_B L'_1 \times_B L'_2 \times_B L'_3$ . Shioda démontre, via la théorie des hauteurs, que les nouvelles sections sont indépendantes des anciennes. Si les trois droites sont concourantes alors  $L'_1 \times_B L'_2 \times_B L'_3$  est une courbe de genre un. Elle a huit points  $\mathbb{Q}$ -rationnels, mais ceci n'est pas suffisant pour garantir l'existence d'une infinité de tels points. Shioda et d'autres ont produit beaucoup d'exemples où  $\text{rang}(L'_1 \times_B L'_2 \times_B L'_3) \geq 1$ .

**Remarque 2.1.1.**

On pourrait considérer encore d'autres changements de base en prenant des droites passant par les autres  $p_i, i \geq 4$ , mais la courbe de base de la nouvelle surface aurait un genre au moins égal à 2 (et donc, par Mordell-Faltings, un nombre fini de points  $\mathbb{Q}$ -rationnels).

L'idée principale de ce chapitre est de généraliser une telle construction pour plusieurs classes de surfaces rationnelles munies d'une section définie sur  $k$ . Pour cela nous considérons sa représentation comme l'éclatement de 9 points dans  $\mathbb{P}^2$  – cette fois non nécessairement en position générale .

La démonstration du théorème 0.2.8 sera faite le long de ce chapitre. Elle est divisée, grosso modo, en deux parties : le lemme 2.2.4 et la proposition 2.2.6 constituent la base, et les sous-sections qui y suivent fournissent des constructions auxquelles on les appliquera. Le théorème est démontré d'abord pour les surfaces dont un modèle  $k$ -minimal est  $\mathbb{P}^2$ , dans les sections 2.2 et 2.3. Les sections suivantes, 2.4.2–2.4.4, donnent les constructions nécessaires pour la démonstration de ce théorème dans le cas des surfaces  $k$ -rationnelles. Les constructions dans le cas de surfaces  $k$ -irrationnelles seront données dans les sous-sections 2.5.3 et 2.5.4.

Le théorème 0.2.9 est aussi traité, presque en totalité, dans ce chapitre. Le squelette de sa démonstration est similaire à celui de la preuve du théorème 0.2.8. Sa démonstration est contenue dans les sections 2.2, 2.3 et 2.5.4. Elle sera complétée par le lemme 4.2.2, qui traite le cas des surfaces obtenues à partir de l'éclatement centré en un seul point avec multiplicité neuf.

Dans la prochaine section nous démontrons le résultat clef –lemme 2.2.4– pour la preuve des théorèmes.

## 2.2 Démonstration des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 avec une hypothèse supplémentaire

Nous démontrerons d'abord une version plus faible des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9.

**Théorème 2.2.1.** [44] *Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B = \mathbb{P}^1$  une surface elliptique rationnelle, dont un modèle minimal sur  $k$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$ , définie par l'éclatement de 9 points dans  $\mathbb{P}^2$  dont au moins deux sont distincts et  $k$ -rationnels. Il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$  avec  $\#C(k) = \infty$  tel que si  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$ , alors*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 2.$$

### Remarque 2.2.2.

L'hypothèse d'une section définie sur  $k$  nous garantit qu'au moins un des points de base est  $k$ -rationnel.

**Démonstration :** Soient  $p_1, \dots, p_r$  avec  $1 \leq r \leq 9$  les points de base du pinceau qui induit  $\mathcal{E}$ . Considérons les pinceaux de droites  $\mathcal{L}_i$  où  $i = 1, 2$  passant par le point  $p_i$ .

Nous allons montrer que presque tout  $L_i$  dans  $\mathcal{L}_i$  est tel que sa transformée stricte  $L'_i$  dans  $\mathcal{E}$  induit une nouvelle section indépendante des anciennes.

Il semble difficile d'utiliser la théorie des hauteurs comme l'a fait Shioda, car nous ne savons pas quelles sont les contributions des fibres mauvaises. Le critère le plus utile pour nous est le

**Lemme 2.2.3.** *Une courbe  $C \hookrightarrow \mathcal{E}$  qui n'est pas une section ni une composante d'une fibre induit une section indépendante des anciennes sections dans le produit fibré  $\mathcal{E} \times_B C$  si et seulement si pour toute section  $C_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , la courbe  $C$  n'est pas une composante de  $[n]^{-1}(C_0)$ .*

Le prochain lemme nous garantira que si  $C$  appartient à une famille algébrique alors il suffit de vérifier ceci pour un  $n$  borné et pour un nombre fini de sections.

**Lemme 2.2.4.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique. Soit  $\mathcal{C}$  une famille algébrique non constante de courbes dans  $\mathcal{E}$  non contenues dans une fibre. Il existe  $n_0(\mathcal{C}) \in \mathbb{N}$  et un sous-ensemble fini  $\Sigma_0(\mathcal{C}) \subset \text{Sec}(\mathcal{E})$  tels que si  $C \in \mathcal{C}$  alors la nouvelle section  $\sigma_C$  est dépendante des anciennes si, et seulement si,  $[n]\sigma_C \in \Sigma_0$  pour un  $n \leq n_0$ .*

**Démonstration :** Supposons  $[n]C = C_0$  avec  $C_0$  une section.

La démonstration se divise en deux parties :

- 1) Borner  $n$  supérieurement par la théorie de Kummer.
- 2) Pour  $n$  fixé, montrer que l'ensemble des sections dans une même classe numérique est fini par la théorie des hauteurs de Néron-Tate.

**1) Borne pour n :** On définit le degré d'une courbe dans  $\mathcal{E}$  par l'intersection avec une fibre :

$$\text{deg}(C) = C.F$$

Si  $C_0$  est une section on a  $\text{deg}(C_0) = C_0.F = 1$ . L'application  $[n]$  n'est pas un morphisme défini sur toute la surface, mais dans un ouvert  $U \subseteq \mathcal{E}$  qui exclut les points singuliers des fibres. Puisque les sections n'intersectent pas les fibres dans des points singuliers, elles appartiennent à l'ouvert  $U$ . Ceci nous permet d'écrire :

$$\text{deg}([n]^{-1}C_0) = [n]^{-1}C_0.F = n^2(C_0.F) = n^2.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{deg}[n]^{-1}(C_0) = \infty$ .

Notons  $K = k(B)$ . La théorie de Kummer (voir section 1.3.5) implique que si  $P_0 \in E(K)$  correspond à la section  $C_0$  alors

$$[K(\frac{1}{n}P_0) : K] \geq \frac{n^2}{r},$$

où  $r$  est une constante qui dépend que de  $E$  et de  $K$ .

Puisque nous avons supposé que  $[n]C = C_0$  on en déduit que

$$\deg(C) \geq \frac{n^2}{r}.$$

Le degré de  $C$  étant fixé donne une borne pour  $n$ .

**2) La classe numérique d'une section :**

On sait maintenant qu'il existe une section  $C_0$  et  $n \leq n_0$  tel que  $[n]C = C_0$ .

Fixons  $C_1, \dots, C_r$  générateurs du groupe de Mordell-Weil.

Puisque  $n$  est fixé, la multiplicité d'intersection  $[n]C.C_i$  est fixée aussi, disons égale à  $n_i$ , et ne dépend que de la classe numérique de  $C$ , de même pour l'intersection de  $[n]C$  avec la section neutre et les composantes des fibres. L'ensemble

$$\Sigma_0 = \{C_0 \text{ section} \mid C_0.C_i = n_i; i = 1, \dots, r, (C_0O) = m_0 \text{ et } (C_0\Theta_i) = l_i\}$$

est fini puisqu'il s'agit d'un ensemble de points avec hauteur de Néron-Tate bornée, donc il n'y a qu'un nombre fini de sections  $C_0$  telles que  $C \subset [n]^{-1}C_0$ .  $\square$

**Remarque 2.2.5.** Il suit de la démonstration précédente que, dans l'énoncé du lemme 2.2.4, on peut prendre plus généralement pour  $\mathcal{C}$  une classe numérique d'un diviseur  $D$  non contenu dans une fibre.

Le lemme implique la proposition suivante :

**Proposition 2.2.6.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique définie sur un corps de nombres  $k$  et  $\mathcal{L}$  un pinceau de courbes dans  $\mathcal{E}$  définies sur  $k$ , qui ne sont pas des composantes de fibres ni des sections. Alors pour presque tout  $L \in \mathcal{L}$ , le morphisme  $L \rightarrow \mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B L$  induit une section dans  $\mathcal{E}'$  indépendante des sections de  $\mathcal{E}$ . En particulier, le rang générique de  $\mathcal{E}'$  sur  $k$  est strictement supérieur à celui de  $\mathcal{E}$ .*

**suite de la preuve du théorème :** Cette proposition implique qu'il existe un sous-ensemble fini  $\Phi_i \subset \mathcal{L}'_i$  tel que si  $L_i \in \mathcal{L}_i - \Phi_i$  alors la surface donnée par le changement de base  $\mathcal{E} \times_B L_i$  est de rang strictement supérieur au rang de  $\mathcal{E}$ . Donc pour  $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 - (\Phi_1 \times \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \times \Phi_2)$  les deux nouvelles sections dans  $\mathcal{E} \times_B L'_1 \times_B L'_2$  sont indépendantes des anciennes et indépendantes entre elles.  $\square$

**Démonstration du Corollaire 0.2.10 :** La section 2.6 nous donne une construction de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  telle que le produit fibré  $L'_1 \times_B L'_2$  est une courbe elliptique dont le rang sur  $k$  est strictement positif pour presque tout  $L_i \in \mathcal{L}_i$ .

Le corollaire suit d'une deuxième application du théorème de spécialisation de Silverman.

### 2.3 Action du groupe de Galois sur les points de base

Si un seul des points de base  $p_1$  est  $k$ -rationnel nous ne pouvons pas garantir que le pinceau de droites  $\mathcal{L}_2$  par  $p_2 \neq p_1$  sera défini sur  $k$ . Pour démontrer les théorèmes sans l'hypothèse sur les points de base nous allons

- considérer un seul pinceau de droites comme dans la section précédente (un des points de base est  $k$ -rationnel)
- démontrer (voir lemme 4.2.2) que nous pouvons supposer que la surface est obtenue à partir de l'éclatement d'au moins deux points distincts.
- considérer l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}|k)$  sur les points de base pour construire un pinceau de courbes rationnelles définies sur  $k$  passant par les points de base.

Puisque nous supposons, pour le moment, que le morphisme  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$  est  $k$ -birationnel, les points de base sont invariants par l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ . Nous allons analyser toutes les configurations possibles des orbites et construire, dans chaque cas, un pinceau de courbes rationnelles définies sur  $k$  munies d'un morphisme de degré deux vers  $B$ .

Il y a toujours une orbite  $\mathcal{O}_1$  avec un seul point (le point  $k$ -rationnel). Nous donnerons la classification selon la plus petite orbite  $\mathcal{O}_2$  différente de  $\mathcal{O}_1$ .

Regardons d'abord quelles sont les conditions que nous devons imposer sur nos constructions pour obtenir les courbes des énoncés des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9. La courbe  $C$  sera construite à partir du produit fibré au dessus de  $B$  de deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  dans la surface. Elle doit satisfaire :

- i)  $g(C_1 \times_B C_2) \leq 1$
- ii)  $\#(C_1 \times_B C_2)(k) = \infty$
- iii) Pour garantir que  $C$  induit des sections indépendantes il faut que  $C_1$  et  $C_2$  appartiennent à des pinceaux non constants différents.

Soit  $d_i$  le degré du morphisme  $f_i : C_i \rightarrow B$ . Supposons que  $(d_1, d_2) = 1$  ou que  $d_1 = d_2 = 2$ . Par la formule de Hurwitz, le produit fibré  $C_1 \times_B C_2$  satisfait

$$2g(C_1 \times_B C_2) - 2 = d_i(2g(C_j) - 2) + \deg(R)$$

Nous donnerons maintenant des conditions suffisantes pour que  $g(C_1 \times_B C_2) \leq 1$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  des courbes projectives lisses munies des morphismes vers une courbe  $B$  de genre zéro,  $\varphi_i : C_i \rightarrow B$ . Supposons que les courbes satisfont l'une des conditions suivantes :*

- h1)  $C_1$  et  $C_2$  sont rationnelles et  $d_1 = d_2 = 2$ ,*
- h2)  $C_1$  et  $C_2$  rationnelles avec  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$  et  $R(f_1) \cap R(f_2) \neq \emptyset$ ,*

*Alors  $g(C_1 \times_B C_2) \leq 1$ .*

**Démonstration :** Il s'agit d'une application de la formule de Hurwitz. Voici le cas h1) :

Si  $d_1 = d_2 = 2$ , alors  $\deg(R_1) = \deg(R_2) = 2$ ; la formule de Hurwitz appliquée à la courbe  $C_1 \times_B C_2$  :

$$2g(C_1 \times_B C_2) - 2 \leq 2(2g(C_1) - 2) + 2 \deg(R(f_2))$$

puisque  $g(C_i) = 0$  et  $d_i = 2$  on a  $\deg(R(f_i)) = 2$ ,  $i = 1, 2$  et donc

$$g(C_1 \times_B C_2) \leq 1.$$

□

Considérons maintenant une courbe plane  $D$  de degré  $d$ . Par [17, V. Exemple 3.9.3] nous devons avoir

$$0 = g(D) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_Q \frac{m_Q(m_Q-1)}{2}$$

où  $m_Q$  est la multiplicité de  $Q$  et la somme est faite sur tous les points singuliers  $Q$  de  $D$ .

Si  $C$  est une courbe dans  $\mathcal{E}$  qui n'est pas une section, alors l'image de  $C$  par un morphisme birationnel  $q : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$  est une courbe plane  $D$ . Le degré de  $\varphi : C \rightarrow B$  doit satisfaire :

$$\deg(\varphi : C \rightarrow B) = 3d - \sum m(p_i) = 2$$

où  $d$  est le degré de la courbe plane  $D$ .

Nous montrerons dans la section 2.6 comment construire les courbes de façon à satisfaire ii).

Pour respecter iii) :

Soit  $s \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d))$ . Notons  $m_{p_i}(s) = m_i$  la multiplicité de  $s$  par le point  $p_i$ . alors l'espace  $\mathcal{L} = \{s \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)); m_{p_i}(s) \geq m_i\}$  a pour dimension

$$\dim(\mathcal{L}) \geq \dim H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2}$$

Donc, pour que  $\mathcal{L}$  contienne un pinceau nous devons avoir

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2} \geq 2.$$

Le lemme classique suivant (cf [16, 1.4.15]) sera souvent utilisé le long du texte. Il démontre, en particulier, que si  $\mathcal{L}$  est un pinceau de courbes passant par les points  $p_1, \dots, p_m = \cup_{i \leq m} \mathcal{O}_i$ , où  $\mathcal{O}_i$  sont des orbites par l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}|k)$  alors il existe  $M$  et  $N$  générateurs de  $\mathcal{L}$  définis sur  $k$ . En particulier il y a une infinité de courbes dans  $\mathcal{L}$  définies sur  $k$ . Ceci nous permettra de choisir des courbes définies sur  $k$  pour effectuer le changement de base.

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $X$  une variété lisse définie sur  $k$  et  $D \in \text{Div}(X)$ . Si  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$  et  $\bar{D} \in \text{Div}(\bar{X})$ . Alors*

$$H^0(\bar{X}, \mathcal{O}(\bar{D})) = H^0(X, D) \times_k \bar{k}$$

Nous donnerons la démonstration du théorème dans les deux premiers cas en détail. Les autres cas sont analogues.

**I) La plus petite orbite a deux points :** Soit  $p_1$  le point de base  $k$ -rationnel (on sait qu'il existe au moins un). Soit  $\mathcal{L}_1$  le pinceau de droites passant par ce point. L'ensemble  $\mathcal{M}_2$  des coniques passant par les trois points de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  est un espace projectif de dimension 2. Si  $C$  est une conique de cet espace et  $C'$  est sa transformée stricte dans  $\mathcal{E}$ , alors le morphisme

$\phi'_C : C' \rightarrow B$  est de degré 3. Si  $\phi_{L'_1}$  et  $\phi_{C'}$  n'ont pas de ramification en commun, le produit fibré  $L'_1 \times_B C'$  est une courbe dont le genre satisfait

$$2g(L'_1 \times_B C') - 2 = 3(g(C') - 2) + \deg(R) \Rightarrow g(L'_1 \times_B C') = 2$$

Par contre, si  $\phi_{L'_1}$  et  $\phi_{C'}$  ont de la ramification en commun, alors  $\deg(R) = 3 \cdot 2 = 6$  et le genre  $g(L'_1 \times_B C')$  égale à un.

Soient  $t_0 \in B(k)$  un point de ramification du morphisme  $\phi_{L'_1}$  (on peut choisir  $L_1$  de façon que  $t_0 \in B(k)$ ),  $D$  la cubique du pinceau qui induit  $\mathcal{E}$  au dessus de  $t_0$ . Notons maintenant que le sous-espace  $\mathcal{L}_2 = \{C \in \mathcal{M}_2; (C.D)_{p_1} \geq 2\} \subseteq \mathcal{M}_2$  est un espace projectif de dimension 1, ses éléments constituent donc un pinceau de coniques passant par les points de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En effet, considérons une cubique  $D$  et un point  $p$ , nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $p = (0 : 0 : 1)$ . L'équation (affine) de  $D$  s'écrit sous la forme :

$$f(x, y) = F(x, y, 1) = y^3 f_0(x) + y^2 f_1(x) + y f_2(x) + f_3(x).$$

La droite tangente à  $D$  en  $p$  est donnée par

$$y f_2(0) + x f_3(0) = 0.$$

Soit  $C$  une conique passant par  $p$ . Son équation (affine) est donnée par :

$$g(x, y) = G(x, y, 1) = y^2 g_0(x) + y g_1(x) + x g_2(x).$$

La droite tangente à  $C$  en  $p$  est donnée par

$$y g_1(0) + x g_2(0) = 0.$$

Les deux courbes satisfont  $(C.D)_p \geq 2$  si et seulement si elles ont la même droite tangente en  $p$ , i.e si et seulement si

$$f_2(0)g_2(0) = f_3(0)g_1(0).$$

L'équation précédente représente une condition linéaire sur les coefficients de  $C$ .

De plus, si  $C \in \mathcal{L}_2$ , alors  $\phi_{C'}$  se ramifie au dessus de  $t_0$  ayant donc une ramification en commun avec  $\phi_{L'_1}$ . Ce qui garantit que  $g(C' \times_B L'_1) \leq 1$ .

Le pinceau de transformées strictes  $\mathcal{L}'_2$  satisfait aussi le lemme 2.2.4. Donc il existe deux ensembles finis  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  tels que si  $(L'_1, L'_2)$  appartiennent à  $\mathcal{L}'_1 \times \mathcal{L}'_2 \setminus (\Phi_1 \times \mathcal{L}'_2 \cup \mathcal{L}'_1 \times \Phi_2)$  alors la surface  $\mathcal{E} \times_B L'_1 \times_B L'_2$  a un rang générique supérieur ou égal au rang générique de  $\mathcal{E}$  plus deux.

Pour démontrer le corollaire il faut vérifier que  $\text{rang}(L'_1 \times L'_2) \geq 1$ . Nous vérifierons ceci dans la section 2.6. Dans ce cas  $\phi_{L'_1}$  et  $\phi_{C'}$  ont des points de ramification en commun, mais leurs lieux de ramification ne coïncident pas ( $\deg(R)_{\phi_{L'_1}} = 2$  et  $\deg(R)_{\phi_{C'}} = 4$ ).

**II) La plus petite orbite a trois points :** Considérons  $\mathcal{L}_2$  le pinceau de coniques passant par les quatre points de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Le membre générique de  $\mathcal{L}_2$  est défini sur  $k$  et la transformée stricte de tout membre satisfait les conditions i)–iii).

Le lemme 2.2.4 s'applique pour  $\mathcal{L}'_2$ , le pinceau de transformées strictes. Donc il existe un ensemble fini  $\Phi_2$  tel que pour toute conique  $L_2$  dans  $\mathcal{L}_2 - \Phi_2$  le changement de base donné par  $\mathcal{E} \times_B L'_2$  a une nouvelle section qui induit une augmentation du rang. De même, pour tout couple  $(L'_1, L'_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 - (\Phi_1 \times \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_2 \times \Phi_2)$  le changement de base  $\mathcal{E} \times_B L'_1 \times_B L'_2$  a deux nouvelles sections indépendantes des anciennes et indépendantes entre elles.

**III) La plus petite orbite a quatre points :** Nous allons considérer  $\mathcal{L}_2$  le pinceau de coniques passant par les quatre points de  $\mathcal{O}_2$ , la démonstration est identique à la précédente.

**IV) La plus petite orbite a cinq points :** Soit  $\mathcal{L}_2$  la famille de cubiques passant par les six points de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  avec une singularité dans  $\mathcal{O}_0$ . Les courbes  $L'_2$  dans le pinceau de transformées strictes  $\mathcal{L}'_2$  sont des courbes rationnelles telles que  $\deg(\phi_{L'_2}) = 2$ . Le produit fibré  $L'_1 \times_B L'_2$  satisfait les résultats de 2.6. Le lemme 2.2.4 s'applique aussi.

**V) La plus petite orbite a six points :** Considérons  $\mathcal{L}_2$  les quintiques singulières dans les six points de  $\mathcal{O}_2$  passant par le point  $k$ -rationnel de  $\mathcal{O}_1$ . Puisque  $\dim(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(5))) = 21$ , les quintiques dans  $\mathbb{P}^2$  forment un  $\mathbb{P}^{20}$ . Nous avons imposé 19 conditions donc  $\mathcal{L}_2$  est un pinceau de quintiques. Ces courbes sont rationnelles de genre  $g \leq 6 - 6 = 0$ . Le degré de  $\phi_{L'_2}$  égal à  $5.3 - 6.2 - 1 = 2$ .

**VI) La plus petite orbite a sept points :** Nous prendrons  $\mathcal{L}_2$ , l'espace des quartiques passant par les sept points de  $\mathcal{O}_2$  avec une singularité double en  $P_1$ , le point  $k$ -rationnel de  $\mathcal{O}_1$ . Ceci donne un espace projectif de dimension 1 ( $\dim(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(4))) = 15$  et les conditions sont au nombre de  $7+6=13$ ). Le degré du morphisme  $\phi_{L'_2}$  est égal à  $4.3 - 7 - 3 = 2$ .

**VII) La plus petite orbite a huit points :** Une famille de courbes rationnelles définies sur  $k$  par ces 8 points et telle que le degré de  $\phi_{L'_2}$  égal à 2 sera donnée par des courbes très singulières. Nous allons considérer les courbes de degré 17 satisfaisant les conditions :

- Les huit points de  $\mathcal{O}_2$  sont singuliers avec multiplicité six.
- Le point dans  $\mathcal{O}_1$  appartient aux courbes, mais il est non singulier.

La première condition donne  $8.(6.7)/2 = 168$  conditions, la seconde en donne une seule. Puisque  $\dim(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(17))) = 171$  l'ensemble  $\mathcal{L}_2$  qui satisfait ces conditions est un pinceau. Les courbes dans  $\mathcal{L}_2$  ont pour genre géométrique  $g \leq 120 - 8.(6.5/2) = 0$ . Le degré du morphisme vers  $B$  est  $17.3 - 8.6 - 1 = 2$ .

## 2.4 Pinceaux de courbes rationnelles dans les surfaces de del Pezzo

Si  $\mathbb{P}_k^2$  n'est pas un modèle  $k$ -minimal de  $\mathcal{E}$ , les points du centre du morphisme birationnel  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$  ne sont pas nécessairement invariants par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$ . Nous ne pouvons pas nous servir des constructions données dans la section précédente.

Cette section apporte des constructions similaires dans le modèle minimal de  $\mathcal{E}$  (isomorphe à une surface de del Pezzo ou à un fibré en coniques par la sous-section 1.3.1).

### 2.4.1 Dimension et genre de courbes dans les surfaces de del Pezzo

Soit  $S$  une surface de del Pezzo de degré  $d$ . Si son groupe de Picard sur  $k$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \cdot \omega_S^{-1}$ , il est très naturel considérer  $H^0(S, \omega_S^{\otimes -n})$  pour construire des courbes rationnelles dans  $S$ . Le lemme suivant identifie ces espaces avec des espaces de courbes de degré  $3n$  dans  $\mathbb{P}^2$ .

**Lemme 2.4.1.** *Soient  $p_1, \dots, p_{9-d}$  les centres de l'application  $\bar{k}$ -birationnelle  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Notons  $m_{p_j}(s)$  la multiplicité de  $s$  par le point  $p_j$ . Alors il existe un isomorphisme entre  $H_n = \{s \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3n)); m_{p_j}(s) \geq n, n = 1, \dots, 9-d\}$  et  $H^0(S, \omega_S^{-1 \otimes n})$ . En particulier*

$$\dim H^0(S, \omega_S^{\otimes -n}) \geq \frac{d(n^2 + n)}{2} + 1.$$

**Démonstration :** Notons d'abord que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3n) = \omega_{\mathbb{P}^2}^{\otimes -n}$ . Fixons  $n = 1$  (ce cas est traité dans [26, IV.24]).

Nous avons  $g^*(\omega_{\mathbb{P}^2}^{-1}) = \omega_S^{-1} \otimes \mathcal{O}(\sum_{j=1, \dots, 9-d} D_j)$ , où  $D_i$  est l'image inverse de  $p_i$  en  $S$ . D'ailleurs  $g^*$  donne un plongement de  $L_1$  dans l'espace des sections de  $H^0(S, \omega_S^{-1} \otimes \mathcal{O}(\sum D_j))$  dont les zéros sont contenus dans  $\sum D_j$ . Puisque l'espace de sections de  $\mathcal{O}(\sum D_j)$  est de dimension un, en divisant par un générateur nous pouvons identifier  $L_1$  avec  $H^0(S, \omega_S^{-1})$ . En effet, aucune autre section sauf celles qui proviennent de  $L$  ne sont contenues dans  $H^0(S, \omega_S^{-1})$  : la projection dans  $\mathbb{P}^2$  du diviseur des zéros d'une telle section doit coïncider avec le diviseur des zéros d'une section qui provient de  $L$ , puisque  $(D_i, \omega_S^{-1}) = 1$ , i.e  $(s = 0)$  rencontre tous les  $D_i$ .

Pour  $n \geq 2$ , par la functorialité de l'application  $g^*$ , nous pouvons répéter l'argument en remplaçant la phrase *...donne un plongement de  $L_1$ ... dont les zéros sont contenus dans ...* par *...donne un plongement de  $L_n$  dans l'espace des sections de  $H^0(S, \omega_S^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}^n(\sum D_j))$  dont les points de multiplicité au moins  $n$  sont contenus dans  $\mathcal{O}^n(\sum D_i)$ .*  $\square$

**Remarque 2.4.2.** On peut bien sûr vérifier la formule du lemme 2.4.1 en utilisant la formule de Riemann-Roch et en vérifiant que  $h^i(\omega^{-n}) = 0$  pour  $i = 1, 2$  et  $n \geq 1$ . On obtient alors une égalité.

**Proposition 2.4.3.** *Soient  $p_{10-d}, \dots, p_9$  des points dans  $S$  et  $\mathcal{L} = \{s \in H^0(S, \omega_S^{\otimes -n}); m_{p_i}(s) = n_i, i = 10-d, \dots, 9\}$ , alors :*

- i)  $\dim(\mathcal{L}) \geq \frac{d(n^2+n)}{2} + 1 - \sum_i \frac{n_i^2 + n_i}{2}$ .
- ii) Si  $L \in \mathcal{L}$  alors  $g(L) \leq \frac{d(n^2-n)}{2} + 1 - \sum \frac{n_i^2 - n_i}{2}$ .
- iii) Si  $L'$  est la transformée stricte de  $L$  par  $q$  alors  $\deg(f : L' \rightarrow B) = nd - \sum n_i$ .

**Démonstration :** L'égalité i) découle du lemme précédent. Pour obtenir ii) il suffit d'appliquer la formule d'adjonction : Si  $L \in H^0(S, \omega_S^{\otimes -n})$  alors  $L$  est dans la même classe

numérique que  $\omega_S^{-1 \otimes n}$

$$2p_a(L) - 2 = L(L + \omega_S) = -n\omega_S(-n\omega_S + \omega_S) = (n^2 - n)d \Rightarrow p_a(L) = d \frac{n^2 - n}{2} + 1.$$

donc si  $L$  passe avec multiplicité  $n_i$  par les points  $p_i$ ,  $i = 10 - d, \dots, 9$  alors

$$g(\tilde{L}) \leq p_a(L) - \sum \frac{n_i(n_i - 1)}{2}.$$

Rappelons que  $q : \mathcal{E} \rightarrow S$  est le morphisme  $k$ -birationnel donné par l'éclatement de  $p_{10-d}, \dots, p_9$ . Le degré du morphisme  $f : L' \rightarrow B$  est donné par l'intersection  $L'.F$  où  $F$  est une fibre de  $\pi$ . Cette intersection est donnée par

$$L'.F = L'.(-\omega_{\mathcal{E}}) = (q^*(L) - \sum n_i E_i).(q^*(-\omega_S) - \sum E_i) = dn - \sum n_i.$$

□

Le reste du chapitre est consacré à la recherche de “bons” pinceaux dans les surfaces de del Pezzo.

## 2.4.2 Surfaces del Pezzo de degré cinq

Dans cette sous-section un modèle minimal de  $\mathcal{E}$  sur  $k$  est une surface de del Pezzo de degré cinq. Notons par  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  le  $k$ -morphisme birationnel et  $\{p_1, \dots, p_4\}$  les centres du  $\bar{k}$ -morphisme birationnel  $g : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Le morphisme  $f$  se décompose sur  $\bar{k}$  en cinq transformations monoïdales. Le morphisme  $q = g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$  est la composition de 9 transformations monoïdales. Par [31] (voir la démonstration de la proposition 1.2.2) ces neuf points sont les points de base d'un pinceau de cubiques dans  $\mathbb{P}^2$ .

Ainsi comme dans la section précédente, nous allons considérer les configurations possibles des orbites par l'action de  $Gal(\bar{k}|k)$  sur les points dans le centre du  $k$ -morphisme  $f$ . Avec la méthode utilisée nous donnons des constructions dans le cas où le  $k$ -morphisme  $f$  satisfait l'une des deux hypothèses :

- i) Les cinq points dans le centre sont distincts.
- ii) Au moins deux points dans le centre sont  $k$ -rationnels.

Rappelons que l'existence d'une section définie sur  $k$  entraîne qu'un des  $p_i$  est  $k$ -rationnel. Voici une analyse de chaque cas possible.

**1) Deux points  $k$ -rationnels** Soient  $p_i$  et  $p_j$  les deux points  $k$ -rationnels et  $\mathcal{L}_i = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_i}(s) \geq 1, m_{p_j}(s) \geq 2\}$ . Par les formules de la sous-section précédente nous avons :

$$\dim(\mathcal{L}) \geq 5 \frac{(1+1)}{2} + 1 - 1 - \frac{2(3)}{2} = 2,$$

si  $C_i \in \mathcal{L}$  alors :

$$g(C_i) \leq 5 \frac{(1-1)}{2} + 1 - \frac{2(2-1)}{2} = 0 \text{ et } \deg(f_i : C'_i \rightarrow B) = 5 - 2 - 1 = 2.$$

Les pinceaux  $\mathcal{L}'_i$  des transformées strictes des courbes dans  $\mathcal{L}$  fournissent donc des courbes pour deux changements de base indépendantes dans  $\mathcal{E}$ .

## 2) Deux orbites à deux points

Notons  $p_5$  le point  $k$ -rationnel et supposons que  $\{p_6, p_7\}, \{p_8, p_9\}$  sont les deux autres orbites.

Soient

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-2}); m_{p_i}(s) \geq 3, i = 6, 7; m_{p_8}(s), m_{p_9}(s) \geq 1\}$$

et

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-2}); m_{p_i}(s) \geq 2, i = 8, 9; m_{p_6}(s), m_{p_7}(s) \geq 1\}.$$

En appliquant les formules de la sous-section précédente nous avons :

$$\dim(\mathcal{L}_i) = 16 - 6 - 6 - 2 = 2, \quad g(C_i) = 6 - 3 - 3 = 0, \quad \deg(f : C'_i \rightarrow B) = 10 - 3 - 3 - 1 - 1 = 2.$$

Si les points sont distincts, l'existence d'une orbite avec trois points entraîne celle de deux points  $k$ -rationnels (traité dans 1).

## 3) Une orbite à quatre points

Nous prendrons  $\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-2}); m_{p_5}(s) \geq 4, m_{p_i}(s) \geq 1, i = 6, \dots, 9\}$  et  $\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-10}); m_{p_5}(s) \geq 4, m_{p_i}(s) \geq 11\}$ .

$$\dim(\mathcal{L}_1) = 16 - 10 - 4 = 2, \quad g(C_1) = 6 - 6 = 0, \quad \deg(f : C'_1 \rightarrow D) = 10 - 4 - 4 = 2$$

$$\dim(\mathcal{L}_2) = 5(110)/2 + 1 - 10 - 4(66) = 2$$

Les pinceaux  $\mathcal{L}'_i$  donnés par les transformées strictes des courbes dans  $\mathcal{L}_i$  fournissent deux changements de base indépendants.

### Remarque 2.4.4.

Si les  $p_i$ 's ne sont pas distincts et seulement un parmi eux est  $k$ -rationnel, notre méthode n'aboutit pas. Il n'existe pas un pinceau de courbes rationnelles définies sur  $k$  munies d'un morphisme de degré deux vers la courbe de base  $B$ .

En effet, l'existence d'un tel pinceau est traduite par l'une des paires d'équations suivantes :

$$5n^2 - n_1^2 - 3n_2^2 = 0 \text{ et } 5n - n_1 - 3n_2 = 2$$

ou

$$5n^2 - n_1^2 - 2n_2^2 = 0 \text{ et } 5n - n_1 - 2n_2 = 2$$

Ces systèmes n'ont pas des solutions dans  $\mathbb{Z}$ .

### 2.4.3 Surfaces de del Pezzo de degré six

Dans cette sous-section un modèle minimal de la surface elliptique  $\mathcal{E}$  est une surface de del Pezzo de degré six dont le groupe de Picard sur  $k$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Nous conservons notations de la sous-section précédente. La seule modification concerne les centres du morphisme  $g$  (donné par la composition de trois applications monoïdales) qui sera donné par  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Le centre du  $k$ -morphisme  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  sera donné par  $\{p_4, \dots, p_9\}$ , des points pas nécessairement distincts. La méthode utilisée nous fournira des constructions si le  $k$ -morphisme  $f$  satisfait l'une des deux hypothèses :

- i) Les points dans le centre du  $k$ -morphisme birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  sont différents.
- ii) Au moins trois points dans le centre sont  $k$ -rationnels.

Voici les configurations possibles des orbites des points  $\{p_4, \dots, p_9\}$  dans  $S$  par l'action de  $Gal(\bar{k}|k)$ .

**1) Au moins trois points  $k$ -rationnels :** Notons  $p_4, p_5$  et  $p_6$  les trois points  $k$ -rationnels. Ce cas est similaire au cas où le modèle minimal est une surface de del Pezzo de degré cinq et il y a deux points de base  $k$ -rationnels. Les pincesaux sont les suivants :

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_4}(s), m_{p_5}(s) \geq 1, m_{p_6}(s) \geq 2\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_4}(s), m_{p_6}(s) \geq 1, m_{p_5}(s) \geq 2\}.$$

**2) Six points distincts :**

Nous allons traiter le cas où une orbite a cinq points. Les mêmes constructions peuvent être utilisées dans les autres cas (six points  $k$ -rationnels; deux orbites avec deux points et deux points  $k$ -rationnels; une orbite avec trois points et une avec deux points; une orbite avec quatre points et deux points  $k$ -rationnels). Considérons

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-21}), m_{p_4}(s) \geq 29, m_{p_i}(s) \geq 19, i = 5, \dots, 9\}$$

et

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-41}), m_{p_4}(s) \geq 29, m_{p_i}(s) \geq 43, i = 5, \dots, 9\}.$$

Soit  $\mathcal{L}'_i$  l'espace des transformées strictes des normalisations des courbes dans  $\mathcal{L}_i$ . C'est un pinceau de courbes rationnelles dans  $\mathcal{E}$  telles que le degré du morphisme vers  $B$  est deux.

**Remarque 2.4.5.** Si le centre de  $f$  contient moins de six points distincts dont au plus deux sont  $k$ -rationnels, notre méthode n'aboutit pas parce qu'il n'est pas possible construire un pinceau de courbes satisfaisant les hypothèses nécessaires.

Plusieurs configurations sont possibles dans ce cas. Pourtant, il suffit de traiter les deux suivantes :

- i) Deux points  $k$ -rationnels et une orbite avec trois points.

ii) Un point  $k$ -rationnel et deux orbites avec deux points.

Dans le premier cas l'existence d'un pinceau de courbes satisfaisant les conditions se traduit par le couple d'équations suivant :

$$6n^2 - n_1^2 - n_2^2 - 3n_3^2 = 0, \quad 6n - n_1 - n_2 - 3n_3 = 2$$

Ce système d'équations n'a pas de solutions modulo 3, et donc pas de solutions dans  $\mathbb{Z}$ . De même pour le deuxième cas qui s'exprime via les équations :

$$6n^2 - n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 = 0, \quad 6n - n_1 - 2n_2 - 2n_3 = 2.$$

#### 2.4.4 Surfaces de degré huit

Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle, définie sur un corps de nombres  $k$ , dont un modèle  $k$ -minimal  $S$  est une surface de degré huit. Par [27, Theorem 3.1.1] nous savons que  $Pic(S) \simeq \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Ainsi comme dans la sous section précédente, nous conservons les notations de 2.4.2. Le  $k$ -morphisme birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  est la composition de huit transformations monoïdales ; son centre sera noté  $\{p_2, \dots, p_9\}$ .

La méthode utilisée fournira des constructions si le  $k$ -morphisme  $f$  satisfait l'une des hypothèses suivantes :

- i) Les points  $p_2, \dots, p_9$  sont distincts.
- ii) Au moins cinq points distincts dans  $\{p_2, \dots, p_9\}$  dont au moins deux sont  $k$ -rationnels.
- iii)  $p_2 = p_3$  et les paires  $\{p_4, p_5\}$ ,  $\{p_6, p_7\}$  et  $\{p_8, p_9\}$  sont stables par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$ .

**1) Huit points distincts :** Nous allons donner les constructions dans le cas d'une orbite, par l'action de  $Gal(\bar{k}|k)$ , à sept points. La même construction peut être utilisée dans les autres cas (il y a, probablement, des constructions plus simple dans les autres cas). Nous rappelons que, puisque la fibration elliptique dans  $\mathcal{E}$  est munie d'au moins une section définie sur  $k$ , nous pouvons supposer qu'au moins un des  $p_i$ 's est  $k$ -rationnel,  $p_2$  par exemple.

Les équations fournies dans la proposition 2.4.3 (et qui sont valables aussi pour les fibrés en coniques comme nous verrons dans la sous-section 2.5.1) nous donnent les pinceaux suivants :

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-8}); m_{p_2}(s) \geq 13, m_{p_i}(s) \geq 7, i = 3, \dots, 9\}$$

et

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-22}); m_{p_2}(s) \geq 13, m_{p_i}(s) \geq 23, i = 3, \dots, 9\}.$$

#### **2) Au moins cinq points distincts dont deux sont $k$ -rationnels :**

Supposons que  $p_2$  et  $p_6$  sont  $k$ -rationnels et que  $p_2, \dots, p_6$  sont différents. Les pinceaux considérés sont les suivants :

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_2}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 1, i = 3, 4, 5, 6\}$$

et

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_6}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 1, i = 2, 3, 4, 5\}.$$

### 3) Un point $k$ -rationnel et trois orbites à deux points :

Supposons que  $p_2$  est  $k$ -rationnel et notons  $O_3, O_4$  et  $O_5$  les trois orbites à deux points. Les pincesaux qui satisfont les conditions sont :

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_2}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 1, p_i \in O_2 \text{ ou } O_3\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_{p_2}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 1, p_i \in O_2 \text{ ou } O_4\}.$$

**Remarque 2.4.6.** Si les points  $p_2, \dots, p_5$  sont distincts, mais  $p_6, p_7, p_8 \in \{p_2, \dots, p_5\}$  notre méthode n'aboutit pas. On peut vérifier qu'il n'existe pas un pinceau de courbes rationnelles  $\mathcal{L}$  satisfaisant les conditions souhaitées. En effet, soit  $n_i$  la multiplicité d'une courbe de  $\mathcal{L}$  dans le point  $p_i$ , l'existence d'un tel pinceau se traduit par les équations suivantes :

$$8n^2 - n_2^2 - n_3^2 - n_4^2 - n_5^2 = 0,$$

$$8n - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 = 2.$$

En considérant les équations modulo 4, les  $(n_2, n_3, n_4, n_5)$  doivent être dans l'une des classes de congruence suivantes :

*i)*  $(2, 0, 0, 0)$ ,

*ii)*  $(2, 2, 2, 0)$ ,

*iii)*  $(-1, -1, -1, 1)$  ou

*iv)*  $(1, 1, 1, -1)$ .

En substituant chacune des possibilités dans les équations en haut nous obtenons une contradiction. Voici celle qui correspond à *i*) :

En substituant dans la première équation :

$$8n^2 - (4k_2 + 2)^2 - (4k_3)^2 - (4k_4)^2 - (4k_5)^2 = 0,$$

en divisant par 4 :

$$2n^2 - 4k_2^2 - 4k_2 - 1 - 4k_3^2 - 4k_4^2 - 4k_5^2 = 0.$$

Cette dernière équation n'a pas de solution modulo 2.

Le même type d'argument s'applique aux autres cas.

La méthode n'aboutit non plus si le centre de  $f$  contient moins de huit points dont un seul est  $k$ -rationnel et il y a moins de quatre orbites distinctes par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$ .

Dans ce cas, il existe plusieurs configurations possibles  $(n_2, n_3, n_4)$ , où  $n_i$  est la multiplicité des points dans l'orbite  $O_i$ , mais il suffit d'en analyser trois.

- i)*  $(1, 3, 3)$ ,
- ii)*  $(1, 2, 2)$  et
- iii)*  $(1, 2, 3)$ .

Le même type de raisonnement utilisé dans les deux cas précédents montre qu'il n'existe pas deux pincesaux de courbes rationnelles dans  $S$  satisfaisant les propriétés souhaitées.

### 2.4.5 Démonstration du théorème 0.2.3

Nous donnerons ici la démonstration du théorème 0.2.3 dans le cas des surfaces  $k$ -rationnelles. La suite sera donnée dans la sous-section 2.5.2. Pour cela, nous réaliserons des constructions de pincesaux de courbes rationnelles dans un modèle  $k$ -minimal  $S$  de la surface, qui dans ce cas peut être une surface de del Pezzo de degré cinq, six ou huit,  $\mathbb{P}^2$  ou un fibré en coniques de degré huit. Le cas où un modèle  $k$ -minimal de la surface est  $\mathbb{P}^2$  a déjà été traité, ainsi que certains cas où un modèle est une surface de del Pezzo.

Les constructions sont plus simples que celles nécessaires pour la démonstration des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 parce que le degré du morphisme d'une courbe du pinceau vers la courbe de base  $B$  de la fibration n'est pas une contrainte pour nous.

Si  $S$  est un fibré en coniques, alors la famille de coniques dans  $S$  induit une famille de courbes rationnelles dans la surface elliptique  $\mathcal{E}$ . Une application de la proposition 2.2.6 à cette dernière famille garantit que presque toute courbe induit une nouvelle section indépendante des anciennes.

Supposons maintenant que  $S$  est une surface de del Pezzo.

Nous rappelons que l'existence d'une section définie sur  $k$  nous garantit que l'un des points éclatés, dans tout modèle  $k$ -minimal, est  $k$ -rationnel. Notons  $p$  ce point.

Les diviseurs des sections dans  $H^0(S, \omega_S^{-1})$  sont des courbes de genre arithmétique un. Cet espace a dimension six si  $S$  est une surface de del Pezzo de degré cinq, sept si  $S$  a degré six, et neuf si le degré est huit. Donc, dans ces trois cas, le sous-espace donné par

$$\mathcal{M} = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-1}); m_p(s) \geq 2\}$$

est de dimension au moins trois.

Il est composé de courbes rationnelles. Il contient donc une infinité de pincesaux de courbes rationnelles. Soit  $\mathcal{L}$  un de ces pincesaux et  $\mathcal{L}'$  le pinceau de transformées strictes, dans  $\mathcal{E}$ , des normalisations de courbes dans  $\mathcal{L}$ .

Par la proposition 2.2.6 presque toute courbe  $C$  dans  $\mathcal{L}'$  induit une nouvelle section dans  $\mathcal{E} \times_B C \rightarrow C$  indépendante des sections provenant de  $\mathcal{E} \rightarrow B$ . Ceci suffit pour démontrer le théorème pour les surfaces  $k$ -rationnelles.  $\square$

## 2.4.6 Démonstration du théorème 0.2.19

Soient  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique satisfaisant les hypothèses du théorème 0.2.8 ou 0.2.9 et  $D$  une courbe rationnelle définie sur  $k$  munie d'un morphisme de degré deux

$$\varphi_D : D \rightarrow B.$$

Notons  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B D$ . Puisque les sections de  $\mathcal{E} \rightarrow B$  induisent naturellement des sections dans le pull back  $\mathcal{E}'$ , nous avons :

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(D))) = \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + r_D$$

où  $r_D$  est un entier positif.

**Proposition 2.4.7.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  comme dans le paragraphe précédent. Alors il existe un pinceau de courbes rationnelles  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{E}$  dont le membre générique est défini sur  $k$  et presque toute courbe  $i : C \hookrightarrow \mathcal{E}$  est munie du morphisme fini  $\varphi_C = \pi \circ i : C \rightarrow B$  tel que*

$$\#(C \times_B D)(k) = \infty.$$

**Démonstration :** Puisque  $\mathcal{E}$  satisfait les hypothèses d'un des théorèmes 0.2.8 ou 0.2.9, il existe deux pinceaux distincts  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , de courbes rationnelles définies sur  $k$  dans  $\mathcal{E}$  tels que si  $C \in \mathcal{L}_i$ , pour  $i = 1$  ou  $2$ , la composition de l'inclusion  $i : C \hookrightarrow B$  et la fibration  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  est de degré deux (sauf un cas particulier décrit ci-dessus où elle est de degré trois).

Puisque les pinceaux sont distincts la courbe  $D$  n'est pas dans l'un des  $\mathcal{L}_i$ , disons  $\mathcal{L}_1$ . Alors le pinceau  $\mathcal{L}_1 = \{C_u\}$  induit une fibration en courbes elliptiques  $\mathcal{L}'_1$  (de la forme  $C_u \times_B D$ ) dans surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B D$ , transverse aux fibres de  $\mathcal{E}' \rightarrow D$ .

Il nous reste montrer que  $\#(C_u \times_B D)(k) = \infty$  pour une infinité de  $u$ .

Si la courbe  $D$  est dans la surface alors ceci suit des constructions dans la sous-section 2.6. Sinon, pour chaque  $u \in \mathbb{P}^1$  on a une extension quadratique  $L_u|k(u)$  telle que  $C_u \times_B D$  a au moins deux couples de points  $L_u$ -rationnels conjugués par l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(L_u|k(u))$ . Soit  $Q_1(u), Q_2(u)$  un des deux couples, alors  $Q(u) = Q_1(u) + Q_2(u)$  est un point  $k(u)$ -rationnel dans  $C_u \times_B D$ . Si c'est un point d'ordre infini nous n'avons rien de plus à démontrer. Sinon, considérons les deux cas suivants :

- i)  $r + r_D = 0$ ,
- ii)  $r + r_D > 0$ .

Dans le premier cas on sait, par les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9, qu'il existe une infinité de fibres de  $\mathcal{E} \rightarrow B$  dont le rang du groupe de Mordell-Weil est au moins deux. Puisque  $\mathcal{E} \times_B D$  domine  $\mathcal{E}$ , le même est valable pour les fibres de  $\mathcal{E} \times_B D \rightarrow D$ . Le lemme 1.3.15 implique que l'ensemble de points  $k$ -rationnels de  $\mathcal{E} \times_B D$  est Zariski dense. Une deuxième application de ce lemme implique que

$$\#\{u; \text{rang}((C_u \times_B D)(k)) > 0\} = \infty.$$

Dans le cas ii) les courbes  $C_t \times_B D$  donnent une fibration elliptique dans  $\mathcal{E} \times_B D$ . Puisque  $r + r_D > 0$ , les points  $k$ -rationnels dans  $\mathcal{E} \times_B D$  constitue un ensemble Zariski dense. Le lemme 1.3.15 implique que

$$\#\{t; \text{rang}((C_t \times_B D)(k)) > 0\} = \infty.$$

□

Soit  $\mathcal{L}' = \{C' = C \times_B D; C \in \mathcal{L}\}$  le pinceau induit par  $\mathcal{L}$  dans le pull back  $\mathcal{E}'$ . La proposition 2.2.6 appliquée à la surface  $\mathcal{E}'$  et au pinceau  $\mathcal{L}'$  implique qu'il y a une infinité de courbes  $C' \in \mathcal{L}'$  qui induisent une nouvelle section dans  $\mathcal{E}' \times_D C'$  indépendante des anciennes sections de  $\mathcal{E}'$ . Nous avons donc

$$\text{rang}(\mathcal{E}' \times_D C'(k(C'))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}'(k(D))) + 1 = \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + r_D + 1.$$

□

## 2.5 Surfaces elliptiques rationnelles avec $k(\mathcal{E}) \neq k(\mathbb{P}^2)$

Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle définie sur un corps de nombres  $k$ . Alors  $\bar{k}(\mathbb{P}^2) \simeq \bar{k}(\mathcal{E})$ , mais nous n'avons pas forcément  $k(\mathbb{P}^2) \simeq k(\mathcal{E})$ . Les surfaces qui ne satisfont pas le dernier isomorphisme sont appelées surfaces  $k$ -irrationnelles ou non  $k$ -birationnellement triviales. Ses modèles minimaux possibles ont été décrits dans la sous-section 1.3.1. Ils sont :

- Les surfaces de del Pezzo  $X$  de degré  $\leq 4$  avec  $\text{Pic}X \simeq \mathbb{Z}$ .
- Les fibrés en coniques  $X \rightarrow C$  de degré  $d < 4$  tels que  $\text{Pic}X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Si un modèle  $k$ -minimal est un fibré en coniques  $X \rightarrow C$  avec  $(\omega_X, \omega_X) = d$  alors  $1 \leq d \leq 4$ . En effet,  $d \geq 1$  puisque  $10 - d = \text{rang}(\text{Pic}(X|\bar{k})) < \text{rang}(\text{Pic}(\mathcal{E})) = 10$ . De l'autre côté si  $X$  est  $k$ -minimale il suit du [27, Thm. 3.1.1] que  $d \leq 4$ .

Puisque dans ce cas  $\Omega_X$  n'est pas ample nous n'avons pas la même formule pour calculer  $\dim H^0(X, \omega_X^{-n})$  que pour les surfaces de del Pezzo.

Nous allons montrer que si le modèle minimal n'est pas de degré  $\omega_X^2 = 1$  alors l'ensemble  $\{t \in B(k); \text{rang}(E_t(k)) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1\}$  est infini. Pour cela il suffit de démontrer que la surface a un pinceau de courbes rationnelles génériquement défini sur  $k$ .

Finalement nous allons montrer que si, de plus, le morphisme  $k$ -birationnel  $\mathcal{E} \rightarrow X$  est donné par l'éclatement de neuf points distincts, ou si le modèle minimal est une surface de del Pezzo de degré quatre, alors

$$\{t \in B(k); \text{rang}(E_t(k)) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 2\}.$$

Ce dernier résultat suivra de la possibilité de construire deux pinceaux distincts de courbes rationnelles génériquement définis sur  $k$  munies d'un morphisme de degré deux vers la courbe de base  $B$ .

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique  $k$ -irrationnelle telle que son modèle minimal sur  $k$  n'est pas une surface de del Pezzo de degré un. Alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$ , avec  $C$  une courbe rationnelle, tel que si  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  alors*

$$\text{rang}(\mathcal{E}'(k(C))) \geq \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1.$$

Nous allons considérer les modèles minimaux possibles et, dans chaque cas, nous allons construire une famille non constante de revêtements finis  $C_t \rightarrow B$ . Le lemme 2.2.4 appliqué à ces constructions impliquera le théorème ci-dessus.

### 2.5.1 Dimension et genre de courbes dans les fibrés en coniques

Dans cette sous-section nous présentons, pour les fibrés en coniques, des résultats similaires à ceux présentés dans la sous-section 2.4.3 pour les surfaces de del Pezzo. Puisque dans une surface  $k$ -minimale munie d'un fibration en coniques,  $f : X \rightarrow C$ , le groupe de Picard est  $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot \omega_X \oplus f^* \text{Pic}(C)$ , nous avons a priori plus de liberté pour construire des courbes de genre fixé définies sur  $k$  dans ces surfaces que dans les surfaces de del Pezzo minimales (leur groupe de Picard a rang un).

Le résultat suivant a été démontré par Tsfasman dans [52] (voir aussi [27]).

**Théorème 2.5.2** (Tsfasman). *Soit  $X$  une surface de degré  $d$  munie d'un fibration en coniques  $f : X \rightarrow C$  sur un corps algébriquement clos. Fixons  $r = 8 - d$ . Alors  $N = \text{Pic}(\bar{X})$  a une base libre  $(l_{-1}, l_0, \dots, l_r)$  telle que*

$$\begin{aligned} (l_{-1}, l_{-1}) &= (l_0, l_0) = 0, \quad (l_{-1}, l_0) = 1, \\ (l_{-1}, l_i) &= (l_0, l_i) = 0 \text{ pour } i \geq 1, \quad (l_i, l_i) = -1 \text{ et } (l_i, l_j) = 0, \quad i, j \geq 1, i \neq j \text{ et} \end{aligned}$$

$$K_X = -2l_{-1} - 2l_0 + \sum_{i=1}^r l_i.$$

Par le théorème précédent, si  $D$  est une fibre de  $f : X \rightarrow C$  alors

$$(2.1) \quad -K_X \cdot D = 2.$$

Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique dont  $X$  est un modèle  $k$ -minimal. Soient  $D$  comme dans le paragraphe précédent,  $D'$  sa transformée stricte dans  $\mathcal{E}$  et  $F$  une fibre de  $\mathcal{E} \rightarrow B = \mathbb{P}^1$ . Par 2.1

$$D' \cdot F = 2,$$

ce qui implique que la fibration en coniques de  $X$  induit un pinceau de courbes rationnelles  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{E}$  tel que, pour chaque courbe  $C$  de  $\mathcal{L}$ , le morphisme  $C \hookrightarrow \mathcal{E} \rightarrow B \simeq \mathbb{P}^1$  est de degré deux. Ces courbes seront utilisées pour démontrer les théorèmes 0.2.3, 0.2.8 et 0.2.9.

Pour démontrer les théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 nous avons besoin d'un deuxième pinceau de courbes rationnelles munies d'un morphisme de degré deux vers  $B$ . Nous avons déjà considéré le pinceau qui provient de la fibration en coniques. Le prochain pas naturel est de chercher dans  $|-nK_X| = \mathbb{P}(H^0(X, \omega_X^{-n}))$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Puisque  $-K_X \cdot D = 2$  pour  $D$  une fibre lisse de  $f$ ,  $K_X \neq 0$  et aucun multiple  $nK_X$  ne peut être effectif, d'où

$$h^0(mK_X) = 0 \text{ pour } m \geq 1 \text{ et, par dualité, } h^2((1-m)K_X) = 0 \text{ pour } m \geq 1.$$

Puisque  $\chi(X) = 1$ , par Riemann-Roch on a

$$h^0(X, \omega_X^{-n}) = 1 + h^1(X, \omega_X^{-n}) + \frac{1}{2}(\omega_X^{-n} \cdot \omega_X^{-n} - \omega_X^{-n} \omega_X) \geq 1 + \frac{d(n^2 + n)}{2}.$$

Le lemme 2.4.3 reste valable puisque le diviseur canonique a la même auto-intersection et nous considérons que de courbes dans  $|-nK_X|$  dans l'énoncé du lemme. Ceci garantit que les mêmes constructions réalisées dans  $|-nK_X|$  pour les surfaces de del Pezzo de degré  $d$  restent encore valables pour les fibrés en coniques de degré  $d$ .

## 2.5.2 Constructions

Soient  $X$  un modèle minimal de  $\mathcal{E}$  sur  $k$  et  $\omega_X$  le fibré canonique. Soit  $d = \omega_X^2$  le degré de  $X$ . Si  $X$  est un fibré en coniques  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  alors l'image réciproque du pinceau de coniques  $f^{-1}(t)$ ,  $t \in \mathbb{P}^1(k)$  est un pinceau de courbes rationnelles définies sur  $k$  dans  $\mathcal{E}$ . Pour démontrer le théorème 0.2.3, il nous reste à traiter le cas où la surface  $X$  n'est pas munie d'un pinceau de coniques défini sur  $k$ .

**Cas 1)  $d = 4$  :** Dans ce cas nous avons un  $k$ -morphisme birationnel  $\mathcal{E} \rightarrow X$  donné par l'éclatement de quatre points éventuellement infiniment proches. Puisque le morphisme est défini sur  $k$ , ces points sont invariants par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$ . Puisque  $\mathcal{E}$  a une section définie sur  $k$  au moins un des points éclatés est  $k$ -rationnel. Notons  $p$  ce point.

Ici, nous n'aurons pas besoin de fournir une construction pour chaque configuration de points. Il suffit de prendre l'espace suivant

$$\mathcal{L} = \{s \in H^0(X, \omega_X^{-1}); m_p(s) \geq 2\}$$

Alors  $\dim(\mathcal{L}) \geq 2$  et tout  $s \in \mathcal{L}$  satisfait  $p_a(s) = 0$ .

Soit  $\mathcal{L}'$  le pinceau induit par  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{E}$ . Toute courbe de  $D \in \mathcal{L}'$  est munie d'un morphisme de degré inférieur ou égal à trois vers  $B$ . Le pinceau  $\mathcal{L}'$  satisfait les hypothèses du lemme 2.2.4.

**Cas 2)  $d = 3$  :** Ici le  $k$ -morphisme  $\mathcal{E} \rightarrow X$  est donné par l'éclatement de trois points. L'espace

$$\mathcal{L} = \{s \in H^0(X, \omega_X^{\otimes -3}); m_p(s) \geq 5\}$$

satisfait

$$\dim(\mathcal{L}) \geq 3 \frac{(9+3)}{2} + 1 - \frac{5(5+1)}{2} = 4$$

et si  $s \in \mathcal{L}$  alors

$$p_a(s) \leq 3 \frac{9-3}{2} + 1 - \frac{5(5-1)}{2} = 0.$$

Donc  $\mathcal{L}$  contient une infinité de pincesaux dont l'image réciproque dans  $\mathcal{E}$  satisfait le lemme 2.2.4.

**Cas 3)**  $d = 2$  : Ici le  $k$ -morphisme  $\mathcal{E} \rightarrow X$  est donné par l'éclatement de deux points. L'espace

$$\mathcal{L} = \{s \in H^0(X, \omega_X^{-1 \otimes 5}); m_p(s) \geq 7\}$$

satisfait

$$\dim(\mathcal{L}) \geq 2 \frac{(25+5)}{2} + 1 - \frac{7(7+1)}{2} = 3$$

et si  $s \in \mathcal{L}$  alors

$$p_a(s) \leq 2 \frac{25-5}{2} + 1 - \frac{7(7-1)}{2} = 0.$$

Donc  $\mathcal{L}$  contient une infinité de pincesaux dont l'image réciproque dans  $\mathcal{E}$  satisfait le lemme 2.2.4.

### 2.5.3 Surfaces de degré deux ou trois

Nous donnons ici la démonstration du théorème 0.2.8 dans le cas où un modèle  $k$ -minimal,  $S$ , de la surface elliptique est une surface de degré deux ou une surface de del Pezzo de degré trois. Il s'agit de constructions de pincesaux de courbes rationnelles telles que, ainsi comme dans les sections précédentes, le morphisme de la transformée stricte vers la courbe de base  $B$ , donné par la composition de l'inclusion avec la projection, soit de degré deux. Voici les constructions :

**Surfaces de degré deux** : Par hypothèse, le centre du morphisme  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  contient deux points  $k$ -rationnels distincts  $p_1$  et  $p_2$ . Les pincesaux considérés seront de la forme :

$$\mathcal{L}_i = \{s \in H^0(S, \omega_S^{-5}); m_{p_i}(s) > 0 \text{ et } m_{p_j}(s) \geq 7, \text{ pour } i \neq j\}.$$

Si  $C$  est une courbe dans un de ces pincesaux et  $C'$  est sa transformée stricte dans la surface  $\mathcal{E}$  alors par la proposition 2.4.3 :

$$p_a(C) \leq \frac{2(25-5)}{2} + 1 - \frac{(1-1)}{2} - \frac{(49-7)}{2} = 0,$$

$$\deg(\varphi : C \rightarrow B) = 10 - 1 - 7 = 2.$$

On conclut que les pinceaux  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  satisfont les conditions suffisantes pour démontrer le théorème 0.2.8 dans le cas où un modèle  $k$ -minimal de  $\mathcal{E}$  est une surface de degré deux.

**Surfaces de degré trois :** Par le théorème 1.3.1,  $S$  est une surface de del Pezzo de degré trois. Le centre du morphisme  $f : \mathcal{E} \rightarrow S$  contient trois points distincts parmi lesquels au moins un, disons  $p_1$ , est  $k$ -rationnel et les deux autres,  $p_2$  et  $p_3$ , sont rationnels ou conjugués sur une extension quadratique. Les pinceaux suivants satisfont les conditions suffisantes pour démontrer le théorème 0.2.8.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \{s \in H^0(S, \omega_S^{-3}); m_{p_1}(s) \geq 5 \text{ et } m_{p_2}(s) = m_{p_3}(s) > 0\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \{s \in H^0(S, \omega_S^{-11}); m_{p_1}(s) \geq 5 \text{ et } m_{p_2}(s) = m_{p_3}(s) \geq 13\}.\end{aligned}$$

#### 2.5.4 Surfaces de degré quatre

Nous démontrons ici le théorème 0.2.9. Jusqu'à la fin de cette sous-section un modèle  $k$ -minimal  $X$  de la surface elliptique  $\mathcal{E}$  sera une surface de degré quatre. Il existe donc un  $k$ -morphisme birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow X$  donné par l'éclatement de quatre points invariants par l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ .

Pour démontrer le résultat nous construirons deux pinceaux de courbes rationnelles dans  $\mathcal{E}$  définies sur  $k$  telles que le produit fibré au dessus de  $B$  de deux courbes dans des pinceaux distincts soit une courbe rationnelle ou elliptique avec un rang positif. Puisque nous voulons construire des courbes définies sur  $k$ , nous devons considérer les configurations des orbites des points éclatés par l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ . L'existence d'une section définie sur  $k$  implique qu'au moins un des points éclatés est  $k$ -rationnel. Puisque  $\mathcal{E}$  est donnée (sur  $\bar{k}$ ) par l'éclatement d'au moins sept points distincts, le morphisme  $k$ -birationnel  $f : \mathcal{E} \rightarrow X$  a au moins deux et au plus quatre points distincts dans son centre. Voici les configurations possibles :

- i) Au moins deux points éclatés sont  $k$ -rationnels.

Notons par  $p_1, p_2$  ces deux points. Dans ce cas, les pinceaux

$$\mathcal{L}_i = \{s \in H^0(X, \omega_X^{-1}); m_{p_i}(s) \geq 2\}$$

sont tels que pour toute courbe  $C_i \in \mathcal{L}_i$ , si  $C'_i$  est sa transformée stricte dans  $\mathcal{E}$  nous avons

$$(2.2) \quad p_a(C'_i) = 0 \text{ et } \text{deg}(\varphi_i : C_i \rightarrow B) = 2$$

Le raisonnement de la section 2.6 s'appliquera en démontrant que presque tout produit fibré au dessus de  $B$  de deux telles courbes a un rang positif.

- ii) La plus petite orbite a deux points.

Notons  $p_1$  le point  $k$ -rationnel et  $p_2, p_3$  les deux points dans la même orbite. Nous allons considérer les pinceaux suivants :

$$\mathcal{L}_1 = \{s \in H^0(X, \omega_X^{-1}); m_{p_1}(s) \geq 2\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(X, \omega_X^{\otimes -3}); m_{p_1}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 4, i = 2, 3\}.$$

Les courbes de ces deux pinceaux satisfont l'équation 2.2.

iii) Une orbite avec trois points.

Dans ce cas nous prendrons  $\mathcal{L}_1$  comme avant et  $\mathcal{L}_2 = \{s \in H^0(X, \omega_X^{\otimes -7}); m_{p_1}(s) \geq 2, m_{p_i}(s) \geq 8, i = 2, 3, 4\}$ . Ces deux pinceaux satisfont les hypothèses nécessaires pour démontrer le théorème, i.e l'équation 2.2.

### 2.5.5 Surfaces de del Pezzo de degré un

Il n'est pas surprenant que le cas où les uniques modèles  $k$ -minimaux d'une surface elliptique sont des surfaces de del Pezzo de degré un soit le plus difficile à traiter. Beaucoup moins a été montré sur l'arithmétique de ces surfaces. Par exemple, montrer que  $\overline{S(k)} = S$  est un problème ouvert pour ces surfaces.

La difficulté de construire des pinceaux de courbes rationnelles définies sur le corps de base dans les surfaces de del Pezzo de degré un est l'unique obstacle pour démontrer les théorèmes 0.2.3, 0.2.8 et 0.2.9.

Soit  $S$  une surface de del Pezzo de degré un  $k$ -minimale munie d'un point  $k$ -rationnel  $p$ , à savoir l'unique point de base du pinceau  $|\omega_S|$ . Soit  $\mathcal{E}$  la surface elliptique obtenue à partir de l'éclatement de  $S$  dans ce point. Puisque  $\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}$ , on a

$$\text{Pic}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

Par la formule de Shioda-Tate (voir sous-section 1.3.4) le rang du groupe de Mordell-Weil  $\mathcal{E}(k(B))$  est nul. Puisqu'une surface de del Pezzo de degré un est obtenue, sur  $\bar{k}$ , à partir de l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  dans huit points distincts et en position générale, le rang du groupe de Mordell-Weil sur la clôture algébrique est huit.

Nous allons montrer que la réciproque est aussi vraie.

**Lemme 2.5.3.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle définie sur un corps de nombres  $k$ . Alors  $\mathcal{E}$  a un modèle  $k$ -minimal isomorphe à une surface de del Pezzo de degré un si et seulement si le rang du groupe de Mordell-Weil de  $\mathcal{E}$  est huit sur  $\bar{k}$  et nul sur  $k$ .*

**Démonstration :** Si le rang du groupe de Mordell-Weil de  $\mathcal{E}$  sur  $\bar{k}$  est huit alors la surface n'admet pas de fibres réductibles donc, par la formule de Shioda-Tate, seulement les sections et une fibre lisse contribuent au groupe de Picard. Puisque le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $k$  est zéro et il n'y a pas de fibres réductibles, une autre application de la formule de Shioda-Tate nous garantit que le rang du groupe de Picard de  $\mathcal{E}$  sur  $k$  est deux (seulement la section neutre et une fibre lisse contribuent). En contractant la section neutre nous obtenons une surface de del Pezzo de degré un dont le groupe de Picard sur  $k$  a rang un. Cette surface de del Pezzo est donc minimale.  $\square$

Par la sous-section 1.3.6, pour montrer

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(k); r_t \geq r + 1\} = \infty,$$

il suffit de montrer que  $\overline{\mathcal{E}(k)} = \mathcal{E}$  i.e que  $\overline{S(k)} = S$ . Comme on déjà mentionné, ceci est un problème ouvert pour les surfaces de del Pezzo de degré un.

On sait néanmoins prouver la densité dans quelques cas intéressants (voir [53]), notamment pour les exemples cités en exergue de l'article de Colliot-Thélène [8] :

$$(2.3) \quad \alpha = \beta X^2 + \gamma Y^3 + \delta Z^5$$

Supposons maintenant  $k = \mathbb{Q}$ . Dans [53] M. Ulas récrit l'équation 2.3 sous la forme :

$$(2.4) \quad X^2 - Y^3 - f(Z) = 0,$$

où  $f(Z) = Z^5 + aZ^3 + bZ^2 + cZ + d$ . Il montre la densité de Zariski des points  $\mathbb{Q}$ -rationnels pour les surfaces  $S_f$  décrites par l'équation 2.3 et même pour les surfaces données par 2.4 avec une condition sur  $(a, b)$  vérifiée par  $a = b = 0$ .

Sa méthode consiste à chercher des courbes rationnelles (dans l'espace affine) rencontrant en un seul point la surface : si  $F(X, Y, Z)$  est l'équation de la surface et  $(X(T), Y(T), Z(T)) = (T^3 + pT^2 + qT + r, T^2 + sT + u, T)$  alors  $F(X(T), Y(T), Z(T)) = f_0 + \dots + f_5 T^5$  avec  $f_i = f_i(p, q, r, s, u)$ . Les équations  $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$  déterminent une courbe elliptique  $G(u, s) = 0$  (on exprime  $p, q, r$  en termes de  $s, u$ ) et pour chaque solution rationnelle  $(s, u)$  on obtient une courbe  $\mathbb{Q}$ -rationnelle telle que  $F(X(T), Y(T), Z(T)) = f_0(s, u) + T f_1(s, u)$ . En choisissant  $T = -\frac{f_0(s, u)}{f_1(s, u)}$  on obtient un point  $\mathbb{Q}$ -rationnel sur  $S$ ; si la courbe  $G(s, u)$  possède une infinité de points  $\mathbb{Q}$ -rationnels on en déduit que  $S_f(\mathbb{Q})$  est Zariski-dense. C'est notamment le cas si  $f(Z) = Z^5 + cZ + d$ .

Dans [53, Thm 2.1] il donne des conditions suffisantes pour que l'ensemble des points rationnels dans  $S_f$  soit Zariski-dense. Ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante :

**Proposition 2.5.4.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle définie sur  $\mathbb{Q}$  dont un modèle  $\mathbb{Q}$ -minimal est une surface de del Pezzo  $S$  de degré un. Supposons que  $S = S_f$  (où  $S_f$  est décrite par l'équation 2.4) et  $f$  satisfait l'une de deux hypothèses suivantes :*

- i)  $f$  a des racines multiples sur  $\mathbb{C}$ ,*
- ii)  $f$  n'a pas des racines multiples et l'ensemble des points rationnels de la courbe  $E_{a,b} : Y^2 = X^3 + 135(2a - 15)X - 1350(5a + 2b - 26)$  est infini.*

Alors

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); r_t \geq r + 1\} = \infty.$$

**Démonstration :** Il s'agit d'un corollaire de [53, Thm. 2.1] et de la sous-section 1.3.6.  $\square$

## 2.6 Points rationnels dans le produit fibré de deux courbes

Après un seul changement de base donné par un revêtement fini  $\varphi_C : C \rightarrow B$ , nous pouvons garantir que le rang de la surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  est supérieur ou égal au rang générique de  $\mathcal{E}$  plus un. Pour arriver à produire une surface telle que son rang est supérieur

à celui de  $\mathcal{E}$  plus deux unités nous aurons besoin d'un deuxième changement de base  $D \rightarrow B$ . Nous construirons ainsi une surface

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times_B C \times_B D \rightarrow C'' = C \times_B D.$$

Cependant, si le genre de  $C''$  est supérieur ou égal à deux on aura  $C(k)$  fini et nous ne pourrons pas démontrer les corollaires sur le rang des fibres. Nous souhaitons donc construire  $C''$  telle que  $g(C'') \leq 1$  et, si  $g(C'') = 1$ , alors  $\#C''(k) = \infty$ . Nous allons maintenant démontrer que c'est possible.

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle définie sur un corps de nombres  $k$ . Soient  $C$  une courbe rationnelle lisse définie sur  $k$  dans  $\mathcal{E}$  munie d'un morphisme  $C \rightarrow B$  de degré deux, et  $\{D_u\}_{u \in \mathbb{P}^1}$  une famille de courbes rationnelles dans  $\mathcal{E}$ , lisses et définies sur  $k$ , munies d'un morphisme de degré deux vers  $B$ . Si  $C \cap D_u$  a un point  $k$ -rationnel, alors pour presque tout  $u \in \mathbb{P}^1(k)$  la courbe  $C \times_B D_u$  a une infinité de points  $k$ -rationnels.*

Nous traiterons d'abord un cas particulier, celui où  $C$  et  $D_u$  sont des transformées strictes des droites dans  $\mathbb{P}^2$ .

Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique  $k$ -rationnelle et soient  $P_1, P_2$  deux points de base d'un pinceau de cubiques  $\Gamma := \{tF(x, y) + G(x, y); t \in \mathbb{P}^1\}$  qui engendre  $\mathcal{E}$ . Si  $L_i, i = 1, 2$  est une droite dans  $\mathbb{P}^2$  passant par  $P_i$ , on notera  $L'_i$  sa transformée stricte dans  $\mathcal{E}$ .

La composition de l'inclusion  $L'_i \rightarrow \mathcal{E}$  et de la projection  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  donne un morphisme  $\phi_i : L'_i \rightarrow B$  de degré deux. Il se ramifie en deux points  $a_i$  et  $b_i$ .

Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ont un point de ramification en commun alors le produit fibré  $L'_1 \times_B L'_2$  est une courbe rationnelle donnée par une équation du type

$$z^2 = y^2 - a.$$

Si les points de ramification de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont distincts nous avons une courbe de genre un d'équation

$$z^2 = (y^2 - a)(y^2 - b).$$

Elle a au moins quatre points  $k$ -rationnels. Si l'on prend une famille de droites  $L_{2,u}$  passant par le point  $P_2$ , le produit fibré  $L'_1 \times_B L'_{2,u}$  est une courbe de genre un sur  $k(u)$ . Elle a au moins quatre points  $k(u)$ -rationnels. On les construira maintenant :

Soit  $Q(u) = L_1 \cap L_{2,u}$ . Pour chaque  $u$  il existe une unique cubique passant par  $Q(u)$ , noton-la  $\Gamma_{t(u)}$ , dans le pinceau qui induit  $\mathcal{E}$ . Cette cubique intersecte chaque  $L_i$  en un autre point  $k(u)$ -rationnel  $R_i(u)$ . Les points  $(Q(u), Q(u)), (Q(u), R_2(u)), (R_1(u), Q(u))$  et  $(R_1(u), R_2(u))$  sont des points  $k(u)$ -rationnels distincts dans le produit fibré. Nous allons fixer  $(Q(u), Q(u))$  comme origine de la courbe.

L'objectif de cette partie est de démontrer que la courbe elliptique  $L'_1 \times_B L'_{2,u}$  a une infinité

de points rationnels. Pour cela il suffit de démontrer que l'un des quatre points rationnels en haut est d'ordre infini.

**Théorème 2.6.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  la surface elliptique donnée par la courbe  $L'_1 \times_B L'_{2,u}$  de genre 1 sur  $k(u)$  en fixant  $(Q(u), Q(u))$  comme origine. Alors l'une des sections induites par  $(R_1(u), R_2(u))$ ,  $(R_1(u), Q(u))$ ,  $(Q(u), R_2(u))$  dans  $\mathcal{A}$  n'est pas de torsion.*

### étapes de la démonstration :

L'idée principale est de démontrer que deux sections induites par deux des quatre points  $k(u)$ -rationnels en haut se coupent en un point non singulier d'une fibre de  $\mathcal{A}$ . Ceci suffit pour démontrer le théorème selon le :

**Lemme 2.6.3.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique lisse alors deux sections de torsion n'ont pas d'intersection.*

Ce lemme a été démontré dans la sous-section 1.2.4. Une conséquence de la démonstration est le

**Corollaire 2.6.4.** *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique quelconque, alors deux sections de torsion ne se rencontrent jamais en un point non singulier.*

Le corollaire garantit donc qu'une des sections sera d'ordre infini.

Il nous faut :

- a) démontrer qu'elles se coupent.
- b) démontrer que le point d'intersection est non singulier.

La partie a) sera traitée dans les deux sous-sections suivantes.

Pour la partie b) nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 2.6.5.** *Soit  $B$  une courbe lisse et soient  $L_i$  deux courbes lisses munies de morphismes  $f_i : L_i \rightarrow B, i = 1, 2$  de degré deux. Alors  $x = (x_1, x_2) \in L_1 \times_B L_2$  est non singulier si  $f_i(x_i) \notin R(f_1) \cap R(f_2)$ .*

### Une construction spéciale :

Choisissons  $L_1$  une droite passant par  $P_1$ . Soit  $\Gamma_{u_0} \in \Gamma$  telle que  $L_1$  est tangente à  $\Gamma_{u_0}$  en un point  $Q(u_0) \neq P_1$  (il n'y a qu'un nombre fini de cubiques dans  $\Gamma$  telles que  $P_1$  est un point d'inflexion, nous allons exclure ce nombre fini de possibilités).

Soit  $\mathcal{L}_2 = \{L_{2,u}; u \in \mathbb{P}^1\}$  une famille de droites dans  $\mathbb{P}^2$  passant par le point  $P_2$ . Puisque  $P_2$  est un point  $k$ -rationnel le membre générique de  $\mathcal{L}_2$  est défini sur  $k$ . Notons  $L_{2,u_0}$  la droite qui relie  $P_2$  à  $Q(u_0)$ . Nous pouvons supposer que  $L_{2,u_0}$  n'est pas tangente à  $\Gamma_{u_0}$  (ceci exclut aussi un nombre fini de droites).

Pour chaque  $u \in \mathbb{P}^1(\bar{k})$  la droite  $L_{2,u}$  rencontre  $L_1$  en un point  $k(u)$ -rationnel  $Q(u)$ . Il existe une unique cubique  $\Gamma_u \in \Gamma$  passant par le point  $Q(u)$ .

La droite  $L_1$  coupe chaque  $\Gamma_u$  en un troisième point  $R_1(u)$ . De même,  $L_{2,u}$  la coupe aussi en un troisième point que nous noterons par  $R_2(u)$ .

$\Gamma_u$  comme courbe elliptique :

En fixant  $P_1$  comme origine de  $\Gamma_u$ , les points  $Q(u)$  et  $R_1(u)$  satisfont :

$$(2.5) \quad Q(u) = -R_1(u)$$

Par construction, pour  $u = u_0$  nous avons :

$$(2.6) \quad Q(u_0) = R_1(u_0)$$

Le point  $(Q(u_0), R_2(u_0))$  appartient à l'intersection de  $(R_1(u), R_2(u))$  et  $(Q(u), R_2(u))$ . Nous allons maintenant donner la démonstration du Lemme 2.6.5.

**Démonstration du lemme 2.6.5 :** Soit  $x = (x_1, x_2) \in L_1 \times_B L_2$  tel que  $f_i(x_i) \notin R(f_1) \cap R(f_2)$ . Nous allons montrer que  $x$  est non singulier.

Nous avons les possibilités suivantes :

- a)  $x_i$  n'est pas un point de ramification de  $f_i$  ou
- b) un seul des deux  $x_i$  est point de ramification de  $f_i$ .

Dans le cas a) Il existe un ouvert  $U \subseteq B$  ne contenant pas les points de ramification de  $R(f_i), i = 1, 2$  tel que  $p_i \in U_i = f_i^{-1}(U)$ . Les applications

$$f_i : U_i \rightarrow U$$

sont toutes les deux étales d'après le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times_U U_2 & \xrightarrow{\pi_i} & U_i \\ \downarrow \pi_j & & \downarrow f_i \\ U_j & \xrightarrow{f_j} & U \end{array}$$

Nous voyons que  $U_1 \times_U U_2 \rightarrow U_j$  est étale.

Pour le cas b) supposons que  $p_2$  soit un point de ramification de  $f_2$ . Prenons  $V = B - R(f_1)$  ouvert tel que  $p_i \in V_i = f_i^{-1}(V)$ . L'application

$$V_1 \rightarrow V$$

est étale. Nous avons un seul diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times_V V_2 & \xrightarrow{\pi_1} & V_1 \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow f_1 \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & V \end{array}$$

Ce qui implique que  $V_1 \times_V V_2 \rightarrow V_2$  est étale.

De même, si  $p_1$  est un point de ramification de  $f_1$ , nous pouvons construire  $W = B - R(f_2)$ ,

nous avons  $p_i \in W_i = f_i^{-1}(W)$ . Les ouverts  $U, V$  et  $W$  constituent un recouvrement de  $B - (R(f_1) \cap R(f_2))$ , de même  $U_1 \times_U U_2, V_1 \times_V V_2$  et  $W_1 \times_W W_2$  recouvrent  $L_1 \times_B L_2 - (f_1(R(f_1) \cap R(f_2)))$  puisque pour tout ouvert  $A$  dans  $B$ ,  $A_1 \times_A A_2 \simeq f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2)$  [15, Cor. 3.2.7, pp 108]. Donc  $L_1 \times_B L_2 \simeq f_1^{-1}(L_1) \cap f_2^{-1}(L_2)$ . Et  $f_i^{-1}(L_i)$  est recouvert par  $f_i^{-1}(U_i) \cup f_i^{-1}(V_i) \cup f_i^{-1}(W_i)$ .  $\square$

**Conclusion :** Nous avons :

- 1)  $L_{2,u_0}$  intersecte  $\Gamma_{u_0}$  en  $P_2, R_2(u_0)$  et  $Q(u_0)$ . Donc  $R_2(u_0)$  n'est pas un point de ramification de  $\phi_{2,u_0}$ .
- 2)  $L_1$  est tangente à  $\Gamma_{u_0}$ , l'intersectant seulement en  $P_1$  et  $Q(u_0)$ . Donc  $Q(u_0)$  est un point de ramification de  $\phi_1$

Le lemme précédent implique que le point  $(Q(u_0), R_2(u_0))$  est un point non singulier de  $L'_1 \times_B L'_{2,u_0}$ .

Le lemme sur l'intersection des sections de torsion s'applique. Nous pouvons conclure qu'un des deux points  $(R_1(u), R_2(u)), (Q(u), R_2(u))$  est d'ordre infini.  $\square$

**Remarque 2.6.6.** Les fibres mauvaises de la surface donnée par  $L'_1 \times_B L'_{2,u} \rightarrow \mathbb{P}^1$  correspondent exactement aux  $u \in \mathbb{P}^1$  tels que  $\phi_1$  et  $\phi_{2,u}$  ont de la ramification en commun.

## Le cas général

### i) Les deux morphismes sont de degré deux :

Supposons que  $C$  et  $D_u$  s'intersectent en un point  $k$ -rationnel  $Q(u)$ . Il existe une unique fibre de  $\pi$ , que nous noterons par  $F_u$ , passant par ce point.

Puisque les morphismes  $\varphi_C : C \rightarrow B$  et  $\varphi_{D_u} : D_u \rightarrow B$  sont de degré deux,  $C$  et  $D_u$  intersectent  $F_u$  en deux points conjugués par l'action du groupe  $Gal(\bar{k}|k)$ . Par le paragraphe précédent, un de ces points est le point  $Q(u)$ . Nous noterons  $R_C(u)$  l'autre point dans l'intersection avec  $C$  et  $R_D(u)$  le point dans  $F_u \cap D_u$ . Ces points sont  $k$ -rationnels, car  $Q(u)$  est  $k$ -rationnel et conjugué, par l'action du groupe de Galois absolu, à  $R_C(u)$  et  $R_D(u)$ .

Soit  $u_0 \in B(\bar{k})$  tel que  $\varphi_C$  se ramifie au dessus de  $u_0$ . Alors il n'y a qu'un nombre fini de  $u \in B(k)$  tels que  $\varphi_{D_u}$  se ramifie au dessus de  $u_0$ . Si c'est le cas, la formule de Hurwitz implique que  $C \times_B D_u$  est une courbe rationnelle singulière, et a donc une infinité de points  $k$ -rationnels.

Il nous reste à traiter le cas où  $\varphi_{D_u}$  ne se ramifie pas au dessus de  $u_0$ . Dans ce cas, pour chaque  $u \in B(k)$  le produit fibré  $C \times_B D_u$  est une courbe elliptique. Nous avons ainsi une famille de courbes elliptiques indexée par  $\mathbb{P}^1$ , i.e, une surface elliptique fibrée au dessus de  $\mathbb{P}^1$ . Nous avons au moins quatre sections définies sur  $k$  données par

$$\sigma_1 = (Q(u), Q(u)), \sigma_2 = (Q(u), R_D(u)), \sigma_3 = (R_C(u), Q(u)), \sigma_4 = (R_C(u), R_D(u)).$$

Puisque  $\varphi_C$  se ramifie au dessus de  $u_0$  nous avons  $Q(u_0) = R_C(u_0)$ . Par ailleurs  $\varphi_{D_u}$  ne ramifie pas au dessus de  $u_0$  et donc  $Q(u_0) \neq R_D(u_0)$ .

Les sections  $\sigma_2$  et  $\sigma_4$  se croisent en un point non singulier (par le lemme 2.6.5). Le lemme 2.6.3 (ou son corollaire) implique qu'au moins une de ces deux sections n'est pas de torsion.

**ii) Un des morphismes est de degré trois :**

Soit  $\varphi_{D_u} : D_u \rightarrow B$  de degré trois et  $\varphi_C : C \rightarrow B$  de degré deux. Supposons que ces deux morphismes ont un point de ramification en commun  $u_0$ , et que pour chaque  $u$  les courbes  $C$  et  $D_u$  s'intersectent en un point  $k$ -rationnel  $Q(u)$ .

Le produit fibré  $C \times_B D_u$  est une courbe singulière de genre un dans  $k(u)$ . Il décrit donc une surface elliptique  $\mathcal{E}_{C,D_u}$  sur  $k$ .

Il existe une unique courbe  $\Gamma_u$  dans le pinceau qui induit  $\mathcal{E}$  passant par  $Q(u)$ . Puisque le morphisme  $\varphi_C$  est de degré deux,  $\Gamma_u$  intersecte  $C$  en un deuxième point  $R_1(u)$  aussi  $k$ -rationnel.

Soit  $u_1 \in B(k)$  l'autre point de ramification de  $\varphi_C$ . Alors  $Q(u_1) = R_1(u_1)$ . Les points  $(Q(u), Q(u))$  et  $(R_1(u), Q(u))$  sont des points  $k(u)$ -rationnels dans le produit fibré  $C \times_B D_u$ . Ils fournissent donc deux sections dans la surface elliptique  $\mathcal{E}_{C,D_u}$ . Ces sections s'intersectent en un point non singulier  $(Q(u_1), Q(u_1))$ , ce qui implique que l'une d'entre elles n'est pas de torsion.

## Chapitre 3

# Surfaces elliptiques de type K3

Dans ce chapitre nous traitons le problème de comparaison du rang générique avec le rang des fibres spéciales dans le cas des surfaces elliptiques de type K3. Le théorème 0.2.18 est obtenu en appliquant de nouveau la proposition 2.2.6, cependant la construction d'un pinceau de courbes sur les surfaces K3 nous oblige à faire des hypothèses géométriques sur celles-ci. Ces hypothèses seront retrouvés dans le théorème 3.2.2 ainsi que dans les exemples dans la sous-section 3.2.2. Le premier exemple traite une surface de Kummer considérée par Piatetski-Shapiro et Shafarevich dans [39], cette surface provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle, mais ne satisfait pas, à priori, les hypothèses du théorème 3.2.2. Le fait que le rang de cette surface K3 soit zéro facilitera les constructions. L'exemple suivant traite les constructions de familles de courbes elliptiques avec un rang élevé faites par Mestre et Nagao. Leur constructions produisent des surfaces elliptiques de type K3 qui proviennent quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle. Nos arguments nous permettront d'exhiber une surface elliptique rationnelle avec une infinité de fibres de rang supérieur ou égal au rang générique plus sept. Finalement nous considérons les surfaces K3 munies de plusieurs fibrations jacobiniennes, dont au moins une a un rang positif, abordées par Nishiyama.

### 3.1 Surfaces de dimension de Kodaira zéro

Les surfaces avec dimension de Kodaira  $\kappa = 0$  se divisent en quatre groupes selon leur classe canonique  $K_X$  et leur irrégularité  $q$ . La classification est la suivante :

**Théorème 3.1.1.** (voir [3]) *Soit  $X$  une surface projective complexe algébrique, lisse et minimale avec  $\kappa_X = 0$ . Alors*

- a) *Si  $K_X = 0$  et  $q = 0$ , alors  $X$  est une surface de type K3.*
- b) *Si  $K_X = 0$  et  $q = 2$ , alors  $X$  est une surface abélienne.*
- c) *Si  $K_X \neq 0$  et  $q = 0$ , alors  $X$  est une surface d'Enriques.*
- d) *Si  $K_X \neq 0$  et  $q = 1$ , alors  $X$  est une surface bielliptique.*

*Dans les deux derniers cas nous avons l'une des possibilités :  $2K_X = 0$ ,  $3K_X = 0$ ,  $4K_X = 0$  ou  $6K_X = 0$ .*

Nous nous intéressons aux surfaces munies d'une fibration elliptique avec une section. Les surfaces avec  $\kappa = 1$  sont toujours munies d'une fibration elliptique (pas forcément munie d'une section); ceci n'est pas toujours le cas pour les surfaces avec  $\kappa = 0$ . En fait, une surface K3 générique ne possède pas une telle fibration. Une surface abélienne qui n'est pas un produit de deux courbes elliptiques n'a pas non plus de fibration elliptique. Par contre, toute surface d'Enriques a au moins une fibration elliptique, mais n'a pas de section (il existe des fibres multiples) et toute surface bielliptique (comme son nom l'indique) est munie de deux fibrations elliptiques.

Dans le cas où la surface est munie de plus d'une fibration jacobienne nous pouvons appliquer le lemme 2.2.4 et montrer que le changement de base fourni par une des fibrations fait augmenter le rang. Plus précisément :

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $X$  une surface définie sur un corps de nombres  $k$  munie de deux fibrations elliptiques jacobiniennes  $\pi_i : X \rightarrow B_i$ ,  $i = 1, 2$  avec une section  $\sigma_i$ . Si le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $k$  de la fibre générique  $X_{\eta_1}$  est positif, alors presque toute fibre  $F_1$  de  $\pi_1$  satisfait*

$$\text{rang}((X \times_{B_2} F_1)(k(F_1))) \geq \text{rang}(X(k(B_2))) + 1$$

L'hypothèse sur le rang générique positif garantit le suivant

**Corollaire 3.1.3.** *Soit  $X \rightarrow B_i$  comme dans le théorème avec un rang générique  $r_i$ , alors il existe une infinité de  $t \in B_2(k)$  tels que*

$$r_{2,t} \geq r_2 + 1.$$

## 3.2 Surfaces K3

### 3.2.1 Augmentation du rang

Une surface projective de type K3 a toujours une courbe rationnelle définie sur une extension  $k'|k$  et une famille de dimension un de courbes elliptiques (généralement singulières et aussi définies sur une extension) [2, Theorem 23.1]. Par contre on ne peut pas trouver une famille de dimension un de courbes rationnelles dans une surface K3. Pour démontrer des résultats comme [4, Theorem C] en utilisant le lemme 2.2.4 nous avons besoin d'une famille de dimension un de courbes de genre 0 ou 1. Ce premier cas étant exclu, nous allons nous intéresser aux familles de courbes elliptiques transverses aux fibres.

**Question 3.2.1.** *Quelles sont les surfaces K3 qui sont munies de deux fibrations elliptiques ?*

Les démonstrations des théorèmes des chapitres précédents nous ont fourni une classe de surfaces K3 munies de deux fibrations elliptiques. À savoir, celles qui proviennent quadratiquement d'une surface rationnelle (cf définition 0.2.12) et satisfont certaines hypothèses. Voici le résultat les concernant.

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $X$  une surface K3 qui provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle  $X_0$  via le changement de base donné par  $\varphi : B \rightarrow B_0$ . Supposons que  $X_0$  satisfait les hypothèses du théorème 0.2.8 ou 0.2.9. Alors il existe un revêtement fini  $C \rightarrow B$  avec  $\#C(k) = \infty$  tel que*

$$\text{rang}(X'(k(C))) \geq \text{rang}(X(k(B))) + 1,$$

où  $X' = X \times_B C$ .

**Démonstration :** Il suit de la démonstration des théorèmes 0.2.8 et 0.2.9 qu'il existe une famille de courbes rationnelles  $\{C_t \hookrightarrow X_0; t \in \mathbb{P}^1\}$  telles que  $\varphi_t : C_t \rightarrow B_0$  est un morphisme de degré deux et  $B$  n'est pas un membre de cette famille. La famille induite dans  $X$  donnée par  $\{B_t = C_t \times_{B_0} B; t \in \mathbb{P}^1\}$  fournit une fibration elliptique transverse à  $\pi : X \rightarrow B$ . Une application du lemme 2.2.4 montre que, pour presque tout  $t$ , la courbe  $B_t$  induit une nouvelle section dans  $X \times_B B_t$  indépendante des sections de  $\pi : X \rightarrow B$ .

Il nous reste montrer que les courbes  $D_t$  ont une infinité de points  $k$ -rationnels. Ceci suit des constructions dans la sous-section 2.6.  $\square$

Nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.3.** *Soit  $X \rightarrow B$  une surface K3 qui provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle  $X_0$  via le changement de base donné par  $\varphi : B \rightarrow B_0$ . Supposons que  $X_0$  satisfait l'une des hypothèses suivantes :*

*H1)  $\varphi : B \rightarrow B_0$  se factorise par  $B \rightarrow X_0 \rightarrow B_0$  et un modèle  $k$ -minimal de  $X_0$  est une surface de del Pezzo de degré  $d > 1$ .*

*H2) Il existe un morphisme  $k$ -rationnel  $f : X_0 \rightarrow S_0$  où  $S_0$  est une surface de degré  $d > 1$  et  $\bar{f} : X_0 \times_k \bar{k} \rightarrow S_0 \times_k \bar{k}$  a  $d$  points distincts dans le centre.*

*H3) Son modèle minimal sur  $k$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^2$ .*

*Soit  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil  $X(k(B))$  et  $r_t$  le rang d'une fibre. Alors*

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 1\} = \infty$$

**Démonstration :** Si  $X_0$  satisfait H2) ou H3) alors le corollaire suit directement du théorème puisque nous savons construire les familles mentionnées dans la preuve du théorème, dont la fibre générique est de rang non nul.

Si  $X_0$  vérifie H1) alors pour presque toute possibilité de modèle  $k$ -minimal de  $X_0$  nous savons construire deux pincesaux distincts de courbes qui vérifient les conditions souhaités pour produire une courbe de elliptique de rang positif dans  $X$ . Dans les cas où nous n'arrivons pas à construire deux pincesaux différents nous pouvons montrer, via un étude de possibles configurations des fibres et des application successives de la formule de Shioda-Tate, que le rang du groupe de Mordell-Weil de  $X_0$  sur  $k$  est nul et que les points  $k$ -rationnels sont Zariski-denses. Si  $r_{0,t}$  est le rang d'une fibre  $\pi_0^{-1}(t)$  de  $X_0$  et  $r_0$  son rang générique alors par la sous-section 1.3.6

$$\#\{t \in B(k); r_{0,t} \geq r_0 + 1\} = \infty,$$

de même, donc, pour la surface K3 :

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 1\} = \infty.$$

□

### 3.2.2 Exemples

#### Exemple 3.2.4. Une surface de Kummer

Nous prenons la surface  $X$  de type  $K3$  considérée par Piatetski–Shapiro et Shafarevich dans [39]. Ils ont considéré une quartique dans  $\mathbb{P}^3$  donnée par l'équation :

$$x_0^4 - x_1^4 = x_2^4 - x_3^4.$$

Cette surface est exceptionnelle ( $\rho = \text{rang}(NS(X)) = 20$ , le maximum) et est Kummer. Elle a un pinceau évident donné par les équations :

$$x_0^2 + x_1^2 = t(x_2^2 - x_3^2); t(x_0^2 - x_1^2) = x_2^2 + x_3^2.$$

Les fibres dégénérées sont au-dessus de  $t = 0, \infty, 1, -1, i, -i$ , elles sont toutes de type de Kodaira  $I_4$ .

La fibration jacobienne associée est isomorphe à la courbe (cf. [39]) :

$$y^2 = x(x+1)(x+c^2), c = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Cette surface provient d'une surface elliptique rationnelle  $X'$  après un changement de base quadratique ( $r = t^2$ )– voir sous-section 1.2.3. Voici l'équation qui décrit  $X'$  :

$$y^2 = x^3 + 2x^2(r^2 + 1) + x(r - 1)^2(r + 1)^2.$$

Les fibres mauvaises de  $X'$  sont de type  $(2I_2, 2I_4)$ , elles sont toutes définies sur  $k = \mathbb{Q}$ . Si  $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ , la formule de Shioda-Tate (cf sous-section 1.3.4) nous donne :

$$NS(X'|\mathbb{Q}) \simeq MW(X'|\mathbb{Q}) \oplus (O, F) \oplus \left( \sum_{v, i \neq 0} \Theta_{v, i} \right)^G.$$

Comme toutes les fibres mauvaises sont définies sur  $\mathbb{Q}$ , chaque composante des fibres de type  $I_2$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ . Si  $\Theta$  est de type  $I_4$ , notons  $\Theta_i$  pour  $i = 0, \dots, 4$  ses composantes. Si  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ , alors  $\sigma(\Theta_2) = \Theta_2$  et  $\sigma(\Theta_1 + \Theta_3) = \Theta_1 + \Theta_3$ , donc  $\Theta$  contribue avec au moins deux unités au rang de  $NS(X'|\mathbb{Q})$ . Nous avons :

$$\text{rang}(NS(X'|\mathbb{Q})) \geq 2 + 1 + 1 + 2 + 2 = 8.$$

Il découle de cela qu'il existe un morphisme  $\mathbb{Q}$ -birationnel  $X' \rightarrow S'$ , où  $S'$  est une surface de del Pezzo de degré au moins sept.

Les surfaces de del Pezzo de degré sept ne sont pas minimales sur  $\mathbb{Q}$  et celles de degré huit sont isomorphes soit à  $\mathbb{P}^2$  éclaté en un point  $k$ -rationnel ou à une surface de degré huit isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou à  $F_2$  sur la clôture algébrique.

Ceci implique que le modèle minimal de  $X'$  sur  $\mathbb{Q}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$  ou à une surface de degré huit telle que  $\bar{X} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou  $F_2$ .

Il suit du théorème 0.2.3 qu'il existe une famille de courbes  $C_t$  dans  $X'$  munies d'un morphisme de degré deux vers la courbe de base  $B$  de  $X'$  et que presque toute courbe  $C_t$  induit une nouvelle section dans  $X' \times_B C_t$  indépendante des sections induites par celles de  $X'$ . Pour chaque  $C$  de ce type nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & & X' \times_B C & \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & X' & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 D \simeq \mathbb{P}^1 & & B & & C \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

où  $\text{rang}(X|\mathbb{Q}) = \text{rang}(X'|\mathbb{Q}) = 0$  et  $\text{rang}(X' \times_B C|\mathbb{Q}) \geq 1$ .

Ceci implique que  $X'$  a une infinité de fibres dont le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $\mathbb{Q}$  est au moins un. Puisque  $X$  domine  $X'$ , le même énoncé est vrai pour les fibres de  $X$ .

### Exemple 3.2.5. *Les constructions de Mestre et Nagao*

Avec l'intention de produire des familles de courbes elliptiques de rang générique grand, Mestre (cf [29] et [30]) et Nagao (cf [34]) ont fourni des constructions de surfaces elliptiques de type K3 qui peuvent être obtenues via un changement de base quadratique d'une surface elliptique rationnelle de rang générique (sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ) égal au rang générique de la surface rationnelle plus cinq.

Nous allons montrer que ces surfaces proviennent quadratiquement des surfaces elliptiques rationnelles pour lesquelles nous savons construire un deuxième pinceau de courbes rationnelles responsable pour une nouvelle section indépendante des précédentes. Ce deuxième pinceau induit un pinceau de courbes elliptiques dans la surface K3 transverse à la fibration elliptique héritée de la surface rationnelle. Nous l'utiliserons pour, grâce à un changement de base, augmenter le rang d'encore une unité.

Voici la construction de Mestre :

Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle ou impaire. Soient  $a_1, \dots, a_6$  dans  $K$ ,  $p(x) = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$  et  $P(x, t) = p(x - t)p(x + t)$ . Le polynôme  $P(x, t)$  s'écrit

$$P(x, t) = G_t(x)^2 - R_t(x)$$

où  $\deg(G_t) = 6$  et  $\deg(R_t) \leq 5$ . Supposons que le coefficient du terme de degré cinq de  $R_t(x)$  est nul. Dans ce cas, la courbe

$$E : y^2 = R_t(x)$$

est une courbe de genre un.

Pour  $x = a_i \pm t$  on a  $G_t(x)^2 = R_t(x)$  et  $R_t(x) = t^2 R_0(t, x)$ . Les points  $q_i^\pm = (a_i \pm t, G_t(a_i \pm t))$  appartiennent à  $E(\mathbb{Q}(t))$  et les points  $p_i^\pm = (a_i \pm t, \frac{G_t(a_i \pm t)}{t})$  appartiennent à  $E_0(\mathbb{Q}(t))$ , où

$$E_0 : y^2 = R_0(t, x)$$

Mestre observe que  $R_0(t, x)$  est un polynôme en  $t^2$  et en  $x$ . Il existe donc une courbe  $E_1$  donnée par

$$y^2 = R_1(s, x)$$

où  $R_1(s, x)$  est tel que  $R_1(t^2, x) = R_0(t, x)$ .

La surface elliptique minimale dont la fibre générique est isomorphe à  $E_0$  est une surface de type  $K3$ ; celle dont la fibre générique est isomorphe à  $E_1$  est rationnelle.

Mestre et Nagao fournissent des exemples où, en choisissant l'un des  $p_i^\pm$  comme section neutre, les autres 11 points  $p_i^\pm$  de la construction sont indépendants. Donc la construction de Mestre donne, génériquement, une surface  $K3$  munie d'une fibration elliptique de rang au moins 11 qui provient quadratiquement d'une surface elliptique rationnelle. Si cette dernière surface satisfait les hypothèses du théorème 0.2.8 ou 0.2.9 nous arrivons à produire un changement de base qui induira une section indépendante des sections. Ceci impliquera l'existence d'une infinité de fibres dans la surface  $K3$  de rang supérieur au rang générique plus 1 et, dans la surface rationnelle, de rang supérieur au rang générique plus six.

L'exemple considéré par Mestre est le suivant :

$$a_1 = -17, a_2 = -16, a_3 = 10, a_4 = 11, a_5 = 14 \text{ et } a_6 = 17.$$

Il obtient ainsi une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}(t)$  de rang générique égal à 11 (voir [29]). En faisant un changement de base quadratique, il rend  $\mathbb{Q}(t')$ -rationnels les deux points à l'infini (voir [30]). Il obtient ainsi une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}(t')$  de rang au moins 12.

En utilisant la même méthode Nagao construit une famille de courbes elliptiques de rang 12 sur  $\mathbb{Q}(t)$  et 13 sur  $\mathbb{Q}(z)$  où  $t = \frac{23550-z^2}{2z}$ . Cette courbe fait partie d'une famille de courbes de rang au moins 12 trouvé par Mestre. L'équation de la courbe générique est la suivante :

$$\begin{aligned} E : y^2 = & x^4(330112972800 + 14017536t^2) + x^3(-4205260800t^2 - 99527168431840) + \\ & (10445363957523456 + 617005209600t^2 - 28035072t^4)x^2 + \\ & (-443009190070886400 - 46063725926400t^2 + 4205260800t^4)x \\ & + 6473450277365760000 + 1388825681338368t^2 - 247954636800t^4 + 14017536t^6. \end{aligned}$$

Cette courbe provient de la courbe suivante via le changement de base quadratique  $s = t^2$   
 $E_1 : y^2 = x^4(330112972800 + 14017536s) + x^3(-4205260800s - 99527168431840) +$   
 $(10445363957523456 + 617005209600s - 28035072s^2)x^2 +$

$$(-443009190070886400 - 46063725926400s + 4205260800s^2)x + 6473450277365760000 + 1388825681338368s - 247954636800s^2 + 14017536s^3.$$

Cette courbe est  $\mathbb{Q}$ -isomorphe à

$$\begin{aligned} E_1 : y^2 = x^3 &+ (10445363957523456 + 617005209600s - 28035072s^2)x^2 + \\ &((-4205260800s - 99527168431840)(-443009190070886400 - 46063725926400s + 4205260800s^2) - \\ &4(330112972800 + 14017536s)(6473450277365760000 + 1388825681338368s - 247954636800s^2 + \\ &14017536s^3))x \\ &+ (6473450277365760000 + 1388825681338368s - 247954636800s^2 + 14017536s^3)((-4205260800s - \\ &99527168431840)^2 - 4 \\ &(330112972800 + 14017536s)(10445363957523456 + 617005209600s - 28035072s^2) + (330112972800 + \\ &14017536s)(-443009190070886400 - 46063725926400s + 4205260800s^2)^2). \end{aligned}$$

Cette dernière courbe est écrite sous la forme de Weierstrass. Puisque  $\deg(a_i) \leq i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4, 6$  et  $\deg(\Delta) = 12$ , le critère de rationalité énoncé dans la sous-section 1.2.3 permet de vérifier que la surface  $\mathcal{E}_1$  dont la fibre générique est isomorphe à cette courbe est une surface elliptique rationnelle. L'unique fibre réductible est de type  $I_2$ .

La courbe  $E$ , qui est donnée par le changement de base quadratique  $t = s^2$ , détermine une surface  $\mathcal{E}$  de type K3, qui provient donc quadratiquement de  $\mathcal{E}_1$ .

Soit  $\Lambda$  un pinceau de cubiques qui induit  $\mathcal{E}_1 \times \overline{\mathbb{Q}}$ . Puisque l'unique fibre réductible est de type  $I_2$ , le pinceau  $\Lambda$  a au moins huit points de base.

Scholten [45, Chapter 2 pp. 34] montre que la surface  $\mathcal{E}_1$  est de rang six sur  $\mathbb{Q}(s)$ .

La fibre de type  $I_2$  est unique, ceci implique qu'elle est définie sur  $\mathbb{Q}$ . On conclut que le groupe de Picard de  $\mathcal{E}_1$  sur  $\mathbb{Q}$  est de rang au moins huit.

Puisqu'il n'existe pas de surface minimale de degré sept (voir sous-section 1.3.2) et le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  est strictement supérieur à celui sur  $\mathbb{Q}$ , on déduit que le rang du groupe de Picard sur  $\mathbb{Q}$  est exactement égal à neuf. Ce qui implique que le modèle minimal de  $\mathcal{E}_1$  sur  $\mathbb{Q}$  est isomorphe à une surface de degré huit telle que  $\overline{X} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou  $F_2$ . De plus, puisque le rang du groupe de Mordell-Weil est égal à sept sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et six, sur  $\mathbb{Q}$ , il existe au moins sept points distincts dans le centre de  $\mathcal{E}_1 \rightarrow X$ , parmi lesquels au moins cinq sont  $k$ -rationnels. Nous pouvons donc, par la sous-section 2.4.4, construire un pinceau de courbes rationnelles dans  $\mathcal{E}_1$  munies d'un morphisme de degré deux vers sa courbe de base  $B_1$ . Ce pinceau induira un pinceau de courbes elliptiques  $\{L_u\}$  dans  $\mathcal{E}$  différent de la fibration elliptique. La proposition 2.2.6 s'applique pour démontrer que la surface donnée par le changement de base  $\mathcal{E} \times_B L$ , pour une infinité de  $L = L_u$ , a un rang générique sur  $\mathbb{Q}$  strictement supérieur à celui de  $\mathcal{E}$ .

Le même argument que celui donné dans la démonstration du théorème 0.2.19 démontre qu'une infinité de courbes dans  $\{L_u\}$  ont un rang positif.

Ceci nous donne un exemple d'une surface elliptique rationnelle définie sur  $\mathbb{Q}$  avec une infinité de fibres définies sur  $\mathbb{Q}$  de rang supérieur ou égal au rang générique plus sept et aussi un exemple de surface K3 de rang 12 sur  $\mathbb{Q}$  avec une infinité de fibres de rang 13 sur  $\mathbb{Q}$ .

**Remarque 3.2.6.** Cet exemple a été étudié par Jasper Scholten dans sa thèse [45]. Il

construit un 14ème point dans la surface K3 défini sur une extension quadratique de  $\mathbb{Q}$  ce qui implique l'existence d'une infinité de fibres dont le rang est au moins 14 sur une extension quadratique. Notre méthode ne fournit pas un 14ème point dans la surface (en fait le rang sur  $\mathbb{Q}$  est exactement 12).

**Exemple 3.2.7. Plusieurs fibrations jacobiniennes**

Nous présentons un exemple d'une surface K3 munie de plusieurs fibrations elliptiques dont au moins une a un rang générique positif et ne provient pas quadratiquement d'une surface rationnelle. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème 3.1.2, mais ne satisfait pas celles du théorème 3.2.2.

Dans [36] Nishiyama décrit toutes les fibrations jacobiniennes associées à certaines surfaces de type K3. Nous reprenons ici l'une des surfaces considérées.

Soient  $E_{\zeta_3} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \zeta_3\mathbb{Z})$  et  $X = X_3$ , définie sur  $k = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ , la résolution minimale de la surface

$$E_{\zeta_3} \times E_{\zeta_3} / \langle \sigma : (z_1, z_2) \mapsto (\zeta_3 z_1, \zeta_3^{-1} z_2) \rangle, \quad (\zeta_3 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}).$$

La surface  $X$  est de type K3 munie de six fibrations jacobiniennes distinctes [36, Theorem 3.1] dont deux ont rang générique un.

Les fibres de ces deux fibrations sont comme suit :

$$\pi_1 : X \rightarrow B_1; \text{ avec fibres mauvaises de type } 2III^*, I_6^*$$

et

$$\pi_2 : X \rightarrow B_2; \text{ avec fibres mauvaises de type } III^*, I_{18}.$$

La fibration  $\pi_1$  ne peut pas provenir quadratiquement d'une surface rationnelle puisqu'une telle surface n'a pas des fibres de type  $I_6^*$  et une fibre de type  $I_3^*$  induit soit deux fibres de type  $I_3^*$ , soit une fibre de type  $I_6$  après un changement de base quadratique. De même pour la fibration  $\pi_2$  puisqu'aucune fibre ne devient de type  $III^*$  après un changement de base quadratique.

Le pinceau de courbes elliptiques

$$\mathcal{L} = \{C_t = \pi_2^{-1}(t); t \in \mathbb{P}^1(k)\}$$

est transverse à la fibration  $\pi_1$  et satisfait  $\#C_t(k) = \infty$  pour presque tout  $t \in \mathbb{P}^1(k)$ . Il suit du lemme 2.2.4 que presque toute  $C_t \in \mathcal{L}$  induit une section indépendante dans  $X \times_{B_1} C_t$ . On a donc

$$\text{rang}(X \times_{B_1} C_t(k(C_t))) \geq \text{rang}(X(k(B_1))) + 1$$

et

$$\#\{t \in B_1(k); r_t \geq r_1 + 1\} = \infty,$$

où  $r_1 = 1$  est le rang générique de  $\pi_1$  et  $r_t$  est le rang du groupe de Mordell-Weil  $\pi_1^{-1}(t)(k)$ .

# Chapitre 4

## Mauvaises fibres

### 4.1 Monodromie et changements de base

Les mauvaises fibres ont joué un rôle très important dans les démonstrations des théorèmes principaux de cette thèse. Leur connaissance nous permet, dans le cas d'une surface rationnelle, de connaître le rang de la surface sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , ainsi que des détails sur la stabilité du pinceau qui induit la surface ou même de "combiner" des résultats des domaines distincts comme la théorie analytique des nombres et la géométrie algébrique.

Il est naturel de se demander quelles transformations une fibre mauvaise peut subir après un changement de base.

Le contenu de ce chapitre est connu des spécialistes ; nous avons cependant décidé d'en fournir une présentation dans le cas où la surface fibre sur la droite projective. Les résultats de ce chapitre sont la plupart géométriques. Nous nous plaçons sur un corps algébriquement clos  $\bar{k}$ .

Soit  $t_0 \in \mathbb{P}^1$  au dessus duquel la fibre est mauvaise. Nous allons supposer que le changement de base est quadratique (comme ceux faits précédemment) et que le modèle de la surface en question est minimal.

Nous analyserons le discriminant après changement de base. Il ne détermine pas toujours le type de la fibre mais aide à exclure des nombreuses possibilités. Pour déterminer le type de la fibre nous aurons besoin des valeurs  $v(c_4)$  et  $v(c_6)$ , où au-dessus de chaque place  $t_0$  on a  $v(f) = ord_{t_0}(f)$  et  $c_4, c_6$  sont les coefficients de l'équation de Weierstrass de la surface

$$Y^2 = X^3 - 27c_4(t)X - 54c_6(t).$$

1) Les fibres de type  $I_n$  : c'est le cas plus simple. Une fibre multiplicative ne devient jamais additive ou bonne après un changement de base. Nous avons deux possibilités selon le changement :

a) Changement non ramifié en  $t_0$  : On aura deux fibres de même type  $I_n$  au dessus de

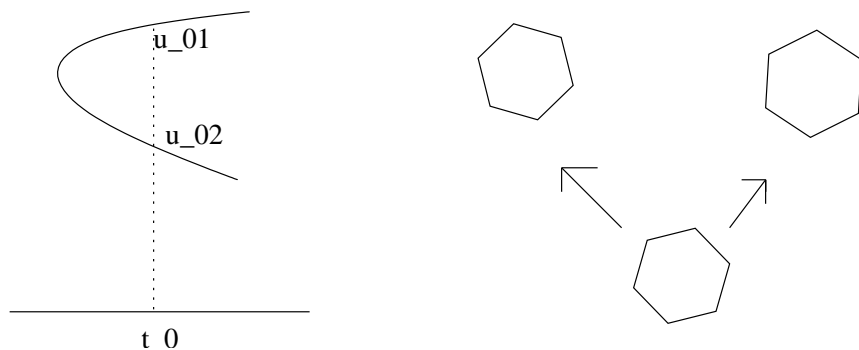


FIG. 4.1 – Changement Non ramifié- Fibre  $I_n$

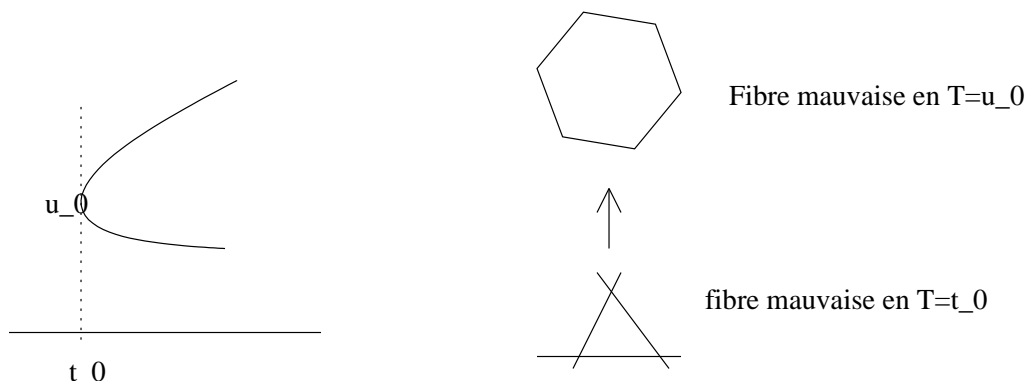


FIG. 4.2 – Changement Ramifié- Fibre  $I_n$

$I_n$ .

b) Changement de base ramifié en  $t_0$  : On aura une seule fibre de type  $I_{2n}$  au dessus de  $I_n$ .

2) Les fibres additives  $II, III$  et  $IV$  : Ces fibres peuvent soit rester additives, soit devenir bonnes. Mais pour devenir bonnes le changement doit être de degré au moins trois. Or si  $Q$  est un point au-dessus de  $P$  dans une extension ramifiée, nous avons  $v_Q(\Delta) = [k(Q) : k]v_P(\Delta)$ . La fibre deviendra bonne si  $v_Q(\Delta) = 12n$  (par exemple si  $[k(Q) : k] = 3$  et  $v_P(\Delta) = 4$ ). Voici ce qui arrive à chacune de ces trois fibres après un changement de base quadratique :

IIa) Changement de base non ramifié en  $t_0$  : La fibre ne change pas de type. Nous aurons deux fibres de même type  $II$  au-dessus de la fibre de départ.

IIb) Changement ramifié en  $t_0$  et  $v(\Delta) = 2$  : Dans ce cas après le changement de base la fibre restera additive mais  $v(\Delta) = 4$ , donc la fibre de type  $II$  deviendra une fibre de type  $IV$ .

III et IVa) Changement non ramifié : Analogue aux autres cas.

IIIb) Changement ramifié : Ici nous avons  $v(\Delta) = 6$ , comme elle reste additive nous aurons une fibre de type  $I_0^*$ .

IVb) Changement ramifié : Si  $Q$  est le point au dessus de  $P$ ,  $v_Q(\Delta) = 8$ . Nous avons deux possibilités :  $IV^*$  ou  $I_2^*$ . Le dernier cas n'est pas possible parce que la fibre  $I_2^*$  est potentiellement multiplicative et qu'une fibre de type  $IV$  est potentiellement bonne.

3) Les fibres de type  $I_n^*$  : ce sont les seules qui peuvent devenir multiplicatives après un changement de base.

a) Changement non ramifié : comme dans les autres cas, nous aurons deux fibres de même type  $I_n^*$ .

b) Changement ramifié : Les fibres de type  $I_0^*$  auront  $v_Q(\Delta) = 12$  et deviendront bonnes. Les autres :  $I_1^*, I_2^*, I_3^*$  deviennent des fibres de type  $I_{2n}$  dans le modèle minimal, parce que  $v_Q(\Delta) = 2v_P(\Delta) = 2(n+6) = 12 + 2n$ , comme nous avons minimalité si et seulement si  $v(\Delta) < 12$ , dans le modèle minimal  $v_Q(\Delta) = 2n \leq 6$ .

Le cas  $I_4^*$  est plus délicat parce que  $v(\Delta) = 12 + 8$ . Nous pouvons avoir soit une fibre de type  $I_8$ , soit une fibre de type  $I_2^*$ . Nous montrerons que le cas  $I_2^*$  n'est pas possible. Observons que si, au-dessus de la place  $v$ , on a une fibre de type  $I_4^*$ , alors  $v(\Delta) = 10$  et donc  $v(c_4) = 4$ ,  $v(c_6) = 5$ . Après un changement de base quadratique nous aurons  $v(\Delta) = 20$ ,  $v(c_4) = 8$  et  $v(c_6) = 10$ , nous pouvons faire un changement de variables et obtenir  $v(\Delta) = 8$ ,  $v(c_4) = 0$ ,  $v(c_6) = 4$ . La fibre au-dessus est donc de type multiplicatif  $I_8$ .

Plus généralement, après un changement de base d'ordre  $M$  [32] décrit ce qui peut arriver :

Avant	M	Après	Avant	M	Après
$I_n$	$M \geq 1$	$I_{Mn}$			
$I_n^*$	$\begin{cases} 0 \pmod{2} \\ 1 \pmod{2} \end{cases}$	$\begin{cases} I_{Mn} \\ I_{Mn}^* \end{cases}$			
$II$	$\begin{cases} 0 \pmod{6} \\ 1 \pmod{6} \\ 2 \pmod{6} \\ 3 \pmod{6} \\ 4 \pmod{6} \\ 5 \pmod{6} \end{cases}$	$\begin{cases} I_0 \\ II \\ IV \\ I_0^* \\ IV^* \\ II^* \end{cases}$	$II^*$	$\begin{cases} 0 \pmod{6} \\ 1 \pmod{6} \\ 2 \pmod{6} \\ 3 \pmod{6} \\ 4 \pmod{6} \\ 5 \pmod{6} \end{cases}$	$\begin{cases} I_0 \\ II^* \\ IV^* \\ I_0^* \\ IV \\ II \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc}
III & \left\{ \begin{array}{l} 0 \bmod 4 \\ 1 \bmod 4 \\ 2 \bmod 4 \\ 3 \bmod 4 \end{array} \right. & \begin{array}{l} I_0 \\ III \\ I_0^* \\ III^* \end{array} & III^* & \left\{ \begin{array}{l} 0 \bmod 4 \\ 1 \bmod 4 \\ 2 \bmod 4 \\ 3 \bmod 4 \end{array} \right. & \begin{array}{l} I_0 \\ III^* \\ I_0^* \\ III \end{array} \\
IV & \left\{ \begin{array}{l} 0 \bmod 3 \\ 1 \bmod 3 \\ 2 \bmod 3 \end{array} \right. & \begin{array}{l} I_0 \\ IV \\ IV^* \end{array} & IV^* & \left\{ \begin{array}{l} 0 \bmod 3 \\ 1 \bmod 3 \\ 2 \bmod 3 \end{array} \right. & \begin{array}{l} I_0 \\ IV^* \\ IV \end{array}
\end{array}$$

En particulier les fibres de type  $II, III, IV, I_0^*, II^*, III^*$  et  $IV^*$  peuvent devenir lisses après un changement de base d'ordre  $\leq 6$ .

## 4.2 Configuration des points de base et configuration des fibres

Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle avec une section. Il existe un  $\bar{k}$ -morphisme birationnel  $q : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^2$  donné par l'éclatement de neuf points  $p_0, \dots, p_8$  dans  $\mathbb{P}^2$  éventuellement infiniment voisins. Si ces points sont tous distincts et en position générale (pas trois dans une droite ni six dans une conique) alors toutes les fibres sont réduites et la surface a un rang générique égal à 8. Nous allons étudier comment la position de ces points influence la configuration des fibres dans les autres cas (points pas forcément distincts et/ou pas forcément en position générale).

Commençons par un résultat important pour la démonstration du théorème 0.2.8.

**Lemme 4.2.1.** *Une surface elliptique rationnelle  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $II^*$  si et seulement si elle est obtenue à partir de 9 éclatements centrés au-dessus d'un unique point.*

**Démonstration :**

Supposons que  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $II^*$ . Si  $\Lambda$  est un pinceau qui induit  $\mathcal{E}$ , alors il est instable [31]. Il a donc un membre donné par une droite triple ou une droite double unie à une droite simple. Pour obtenir une configuration  $II^*$  il faut forcément réaliser 9 éclatements centrés au-dessus d'un seul point appartenant à l'une de ces deux courbes neuf fois.

Supposons que  $\mathcal{E}$  a été obtenue à partir d'un seul point  $P$  (éclaté neuf fois). Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cubiques lisses dans  $\Lambda$ . Puisqu'elles s'intersectent avec multiplicité neuf en  $P$ , ce point est un point d'inflexion. Puisque le pinceau a un seul point de base, la mauvaise fibre est induite par l'éclatement de la singularité d'une cubique singulière à une seule composante, possiblement avec multiplicité trois, donc soit par une cubique cuspidale, soit par une cubique nodale, soit par une droite triple. Les deux premiers cas ne se produisent car si l'intersection d'une cubique irréductible singulière avec une cubique lisse contient la singularité, alors elle contient un deuxième point différent. La mauvaise fibre est donc induite par la droite triple.

La figure 4.3 montre l'éclatement d'un seul point avec multiplicité neuf dans une droite triple.  $\square$

Nous supposons pendant ce paragraphe que  $\mathcal{E}$  est définie sur un corps de nombres  $k$ .

Si  $\mathcal{E} \rightarrow B$  est une surface avec une fibre de type  $II^*$ , par les résultats de la section précédente, si on considère un changement de base quadratique  $D \rightarrow B$  ramifié au-dessus

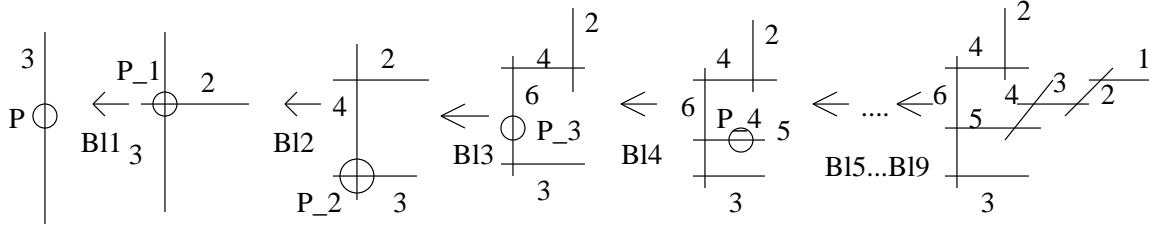


FIG. 4.3 –

de cette fibre et au-dessus d'une fibre non singulière  $\pi^{-1}(t_1)$  avec  $t_1 \in \mathbb{P}^1(k)$ , la nouvelle surface  $\mathcal{E}'$  est encore une surface rationnelle :

Soit  $t \in B = \mathbb{P}^1$  tel que la fibre  $II^*$  est au-dessus de  $t$ . Puisque toutes les fibres différentes de  $II^*$  sont transformées en deux fibres de même type après le changement de base, un calcul de caractéristique d'Euler nous donne

$$12(p_g(\mathcal{E}') + 1) = 8 + 2 \sum_{v \neq t \in \mathbb{P}^1} (m_v - 1).$$

Comme les autres fibres mauvaises sont soit deux fibres de type  $I_1$ , soit une de type  $II$  (pour la table avec les possibles configurations des fibres dans une surface elliptique rationnelle voir [38]), on a  $p_g(\mathcal{E}') = 0$  ce qui implique que  $\mathcal{E}'$  est aussi rationnelle.

Il existe une infinité de  $t_1 \in B(k)$  tels que le changement de base ramifié au dessus de la fibre  $II^*$  et de  $\pi^{-1}(t_1)$  est défini sur  $k$  (une surface rationnelle a au plus une fibre de type  $II^*$ , elle est donc toujours définie sur  $k$ , le corps de définition de  $\mathcal{E}'$ .)

Le lemme 4.2.1 garantit qu'un pinceau qui l'induit a au moins deux points de base.

Elle satisfait, sur  $k$  :

$$(4.1) \quad \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) \leq \text{rang}(\mathcal{E}'(k(D))).$$

et sur  $\bar{k}$  :

$$(4.2) \quad \text{rang}(\mathcal{E}(\bar{k}(B))) + 2 = \text{rang}(\mathcal{E}'(\bar{k}(D))).$$

La surface  $\mathcal{E}'$  a une fibre de type  $IV^*$  et rang générique égal à deux sur  $\bar{k}$  (ceci est une simple application de la formule de Shioda-Tate, voir sous-section 1.3.4).

Puisque  $\mathcal{E}$  est définie sur  $k$  et le changement de base l'est aussi, les deux nouvelles sections indépendantes  $C_1$  et  $C_2$  dans la surface  $\mathcal{E}'$  sont conjugués par l'action du groupe de Galois  $Gal(\bar{k}|k)$ . Leur somme  $C_1 + C_2$  est donc une section définie sur  $k$  qui n'est pas de torsion. Ceci améliore la borne donnée dans l'équation 4.1 :

$$(4.3) \quad \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) + 1 \leq \text{rang}(\mathcal{E}'(k(D))).$$

Nous avons démontré :

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle obtenue à partir d'un éclatement de  $\mathbb{P}^2$  centré en un unique point. Alors il existe une courbe rationnelle  $B'$  munie d'un morphisme de degré deux  $B' \rightarrow B$ , telle que la surface elliptique  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B B' \rightarrow B'$  est rationnelle et obtenue à partir d'un éclatement de  $\mathbb{P}^2$  centré en au moins deux points distincts et telle que*

$$1 + \text{rang}(\mathcal{E}(k(B))) \leq \text{rang}(\mathcal{E}'(k(B'))).$$

Le théorème 0.2.3 s'applique à cette surface : son modèle minimal sur  $k$  ne peut pas être isomorphe à une surface de del Pezzo de degré un puisque, sur  $\bar{k}$  elle est obtenue à partir de l'éclatement de au plus quatre points distincts et une surface de del Pezzo de degré un est isomorphe, sur  $\bar{k}$ , au plan projectif  $\mathbb{P}^2$  éclaté en huit points en position général. Donc, il existe une courbe rationnelle  $C \hookrightarrow \mathcal{E}'$  telle que :

$$\text{rang}(\mathcal{E}' \times_{B'} C) \geq \text{rang}(\mathcal{E}') + 1$$

Par l'équation 4.3 nous avons :

$$\text{rang}(\mathcal{E}' \times'_B C) \geq \text{rang}(\mathcal{E}') + 2.$$

Notons  $r_t$  le rang d'une fibre de  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ . Un corollaire, qui suit du théorème de Spécialisation de Silverman [50], puisque  $C$  est une courbe rationnelle :

$$\#\{t \in B(k); r_t \geq r + 2\} = \infty.$$

**Remarque 4.2.3.** Comme nous avons déjà remarqué, la formule de Shioda-Tate nous garantit que le rang générique de la surface  $\mathcal{E}$  traité dans ce paragraphe est zero parce qu'elle a une fibre de type  $II^*$ . Nous venons de montrer que toute surface avec une telle fibre a une infinité de fibres dont le rang du groupe de Mordell-Weil est au moins deux.

#### 4.2.1 Obtention des fibres singulières

Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle munie d'une section. Soit  $\Lambda$  un pinceau de cubiques dans  $\mathbb{P}^2$  qui induit  $\mathcal{E}$ . Puisque  $\Lambda$  est un pinceau dont le membre générique est lisse, il n'y a qu'un nombre fini de cubiques singulières  $C_t \in \Lambda$ . Chacune de ces cubiques singulières induit une fibre dégénérée de la fibration  $\pi$ . Etant donnée une fibre singulière  $F_t = \pi^{-1}(t)$ , nous allons analyser quelles sont les cubiques singulières possibles dans  $\Lambda$ . La proposition suivante est un corollaire des résultats de Miranda sur la stabilité des pincesaux de cubiques et les surfaces rationnelles associés (c.f [31]).

**Proposition 4.2.4.** *(Miranda) Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle et  $\Lambda$  un pinceau qui induit  $\mathcal{E}$ . Alors*

- i)  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $II^*$ ,  $III^*$  ou  $IV^*$   $\Rightarrow \Lambda$  contient soit une droite triple soit une droite double unie à une droite.*

- ii)  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $I_n^* \Rightarrow \Lambda$  contient soit une droite double unie à une droite dont le point d'intersection des deux droites est un point de base de multiplicité au plus trois; soit une cubique cuspidale; soit une conique unie à une droite tangente; soit trois droites concourantes dont le point d'intersection est un point de base de  $\Lambda$ .
- iii)  $\mathcal{E}$  n'a que des fibres réduites  $\Rightarrow$  les cubiques singulières de  $\Lambda$  sont parmi les suivantes : une cubique nodale (resp. cuspidale) dont la singularité peut être un point de base de  $\Lambda$  (resp. un point de base avec multiplicité inférieur ou égal à trois); une conique unie à une droite non tangente (resp. tangente) dont au plus une des singularités peut être point de base (resp. dont la singularité peut être point de base avec multiplicité au plus deux); trois droites concourantes dont la singularité n'est pas un point de base de  $\Lambda$  ou trois droites non concourantes.

## 4.2.2 Conclusions

Voyons maintenant quelles sont les autres conclusions sur la configuration qu'on peut obtenir. Notons par  $m$  le nombre de points éclatés.

**Proposition 4.2.5.** *Si  $m = 2$  alors la surface a soit une fibre de type  $III^*$ , soit une fibre de type  $I_4^*$ .*

### Démonstration :

Soit  $\Gamma$  un pinceau de cubiques dans  $\mathbb{P}^2$  qui induit  $\mathcal{E}$ . Nous allons montrer que  $\Gamma$  contient forcément une droite triple ou l'union d'une droite double avec une autre droite. Les étapes seront les suivantes :

- i)  $\Gamma$  contient au moins une cubique singulière dont la singularité est un des points de base.
- ii)  $\Gamma$  ne contient pas une cubique donnée par l'union de trois droites distinctes.
- iii)  $\Gamma$  ne contient pas une cubique donnée par l'union d'une conique et une droite.
- iv)  $\Gamma$  ne contient pas une cubique irréductible singulière dont la singularité est un point de base.

Pour montrer i) notons que puisque  $m = 2$ , le rang générique de la surface est inférieur ou égal à un. Ceci implique que la surface a une fibre avec au moins trois composantes. Si cette fibre a au moins quatre composantes, alors un point singulier a été éclaté. Sinon, la surface a une des deux configurations suivantes :  $(3I_3, I_2, I_1)$  ou  $(IV, 2I_3, I_2)$ . Dans les deux cas si un point singulier n'a pas été éclaté alors  $\Gamma$  contient une cubique donnée par l'union de trois droites.

Si le pinceau contient une cubique donnée par l'union de trois droites distinctes, alors deux des droites passent par seulement un point de base, mais il n'y a qu'une seule qui peut passer avec multiplicité par ce point, donc l'autre appartient à un pinceau et est donc composante de toutes les cubiques du pinceau. Cet absurde démontre ii).

La troisième affirmation suit du fait que si une conique lisse intersecte une cubique singulière dans le point singulier alors l'intersection contient au moins deux autres points.

Supposons que  $p = (0 : 0 : 1)$  est le point de base singulier. Soit  $F$  une cubique lisse du pinceau et  $F'$  une cubique donnée par l'union d'une conique  $Q$  et une droite  $l$ . Supposons

$(Q.F)_p \geq 2$  e que la droite tangente commune est la droite  $x = 0$ . Les équations de  $F$  et  $Q$  sont de la forme :

$$F : y^3 + y^2 f_1(x) + y x f_2(x) + x f_3(x) = 0, \text{ où } f_3(x) \neq 0$$

et

$$Q : y^2 + y x q_1(x) + x q_2(x) = 0, \text{ où } q_2(x) \neq 0.$$

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $F : x = y^3$ . Dans ce cas la coordonnée  $y$  des points dans l'intersection différents de  $p$  satisfait une équation de degré 4. Cette équation a au moins deux racines. Ce qui implique qu'il y a au moins deux autres points dans l'intersection de  $F$  et  $Q$ .

Le même style d'argument montre iv).

Puisque  $\Gamma$  contient forcément une cubique singulière, les uniques possibilités qui nous restent sont une droite triple ou une droite double unie à une autre droite. Dans le premier éclatement des points dans la cubique singulière induit une fibre de type  $III^*$  et dans le deuxième nous avons soit une fibre de type  $III^*$ , soit une fibre de type  $I_4^*$  selon la position des deux points.  $\square$

**Proposition 4.2.6.** *Si  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $IV^*$  alors  $m = 3$  ou  $4$ .*

**Démonstration :** Le pinceau qui induit  $\mathcal{E}$  contient soit une droite triple, soit une droite double unie avec une autre droite [31]. Dans le premier cas, puisque la somme de la multiplicité des points de base est neuf on a forcément  $m \leq 3$ . Si  $m = 1$  le lemme 4.2.1 implique que la surface a une fibre de type  $II^*$ , par la formule de Shioda-Tate elle ne peut pas avoir une fibre de type  $IV^*$ . Si  $m = 2$  la proposition précédente implique qu'il y a une fibre de type  $III^*$  ou  $I_4^*$ , la même raison implique qu'il n'y a pas de fibres de type  $IV^*$ , donc  $m = 3$ .

Si le pinceau contient une droite double unie à une droite simple  $m$  est forcément plus petit que six (chaque droite intersecte une cubique en au plus trois points!). Il nous reste vérifier que  $m$  ne peut pas être ni cinq ni six.

Si  $m = 6$  la fibre mauvaise n'a que des composantes de multiplicité un et deux, donc n'est pas de type  $IV^*$ . Si  $m = 5$  un des deux points est dans l'intersection des deux droites. L'éclatement des deux autres points dans la droite double donne deux composantes de multiplicité un intersectant une composante de multiplicité deux. Ceci n'est pas possible pour une fibre de type  $IV^*$ .  $\square$

**Proposition 4.2.7.** *Si  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $I_n$  avec  $n \geq 4$  alors  $m \leq 8$ .*

**Démonstration :** Une fibre multiplicative de type  $I_n$  est donnée par un polygone à  $n$  côtés. Une cubique qui induit une telle fibre est soit un noeud, soit une conique avec une droite non tangente, soit trois droites non concourantes (formant un triangle). Si  $n \geq 4$  nous devons éclater au moins un point dans l'intersection de deux côtés d'un triangle. Ce point est de multiplicité au moins deux.  $\square$

**Proposition 4.2.8.** *Si  $\mathcal{E}$  a une fibre de type  $I_n^*$  avec  $0 \leq n \leq 3$ , alors  $3 \leq m \leq 6 - n$ .*

**Démonstration :** La proposition suit du fait que une fibre de type  $I_n^*$  a  $5 + n$  composantes. Une cubique a au plus trois composantes. Pour obtenir une telle fibre il faut éclater un point avec multiplicité au moins  $3 + n$  -un point avec multiplicité  $2 + n$  contribuera à  $n$  composantes- mais pas supérieure à 7.  $\square$

Les propositions en haut impliquent que les uniques surfaces rationnelles obtenues à partir de l'éclatement de neuf points distincts dans  $\mathbb{P}^2$  sont celles dont les fibres mauvaises sont de type  $I_1, II, I_2, III, I_3$  ou  $IV$ .

Nous donnerons maintenant un exemple de surface rationnelle de rang zéro obtenue à partir de neuf points distincts. Puisque son rang est zéro, ces points sont en position très spéciale.

**Exemple 4.2.9.** *Cet exemple m'a été communiqué oralement par Masato Kuwata. Il s'appelle cubique de Hurwitz.*

Nous donnerons une construction d'une surface elliptique, dont le rang du groupe de Mordell-Weil de la fibre générique est égal à zéro, obtenue à partir de l'éclatement de neuf points distincts dans  $\mathbb{P}^2(k)$ , où  $k = \mathbb{Q}[e^{\frac{2i\pi}{6}}]$ .

Soient  $F : x^3 + y^3 + z^3 = 0$  et  $G : 3xyz = 0$ . L'intersection de  $F$  et  $G$  est donnée par les points  $\{P_1, \dots, P_9\}$  où  $P_1 = (1 : -1 : 0), P_2 = (e^{\frac{2i\pi}{6}} : e^{\frac{4i\pi}{6}} : 0), P_3 = (1 : e^{\frac{2i\pi}{6}} : 0)$  et  $P_4, \dots, P_9$  sont donnés par des permutations des coordonnées des  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

La surface elliptique obtenue à partir de l'éclatement de ces neuf points a pour fibre générique

$$\mathcal{E}_\eta : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyzt = 0 \text{ sur } k(t).$$

Ses fibres mauvaises sont toutes de type  $I_3$ , dont deux sont définies sur  $\mathbb{Q}$  et les deux autres sur un corps quadratique. Une application simple de la formule de Shioda-Tate montre que le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $\bar{k}$ , et donc sur  $k$ , est nul. Il suit de la classification des fibres possibles, dans une surface elliptique rationnelle faite par Persson dans [38], que le groupe de Mordell-Weil sur  $\bar{k}$  est isomorphe à  $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ .

### 4.3 Configuration des fibres

Les possibles configurations des fibres spéciales dans le modèle minimal d'une courbe elliptique ont été étudiés d'abord par Kodaira et par Néron qui les ont classifiées.

Supposons  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  surface elliptique minimale définie sur le corps de nombres  $k$ . Le groupe de Galois  $G = Gal(\bar{k}|k)$  agit sur l'ensemble de fibres de  $\pi$  en préservant, bien sûr, le type de fibre. Ceci nous permet de conclure, par exemple, que si les mauvaises fibres sont chacune d'un type différent, alors elles sont forcément globalement définies sur le corps  $k$ .

Le tableau ci-dessus exhibe les possibles configurations et leurs dessins. Pour un traitement plus détaillé voir [51].

# Configuration des fibres

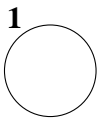
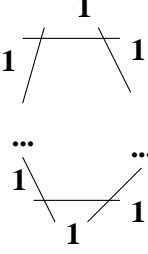
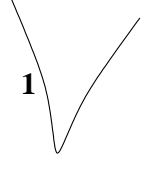
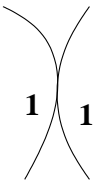
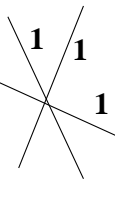
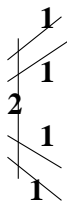
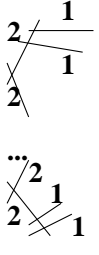
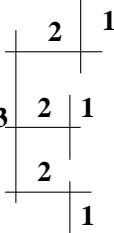
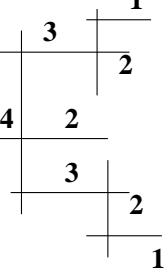
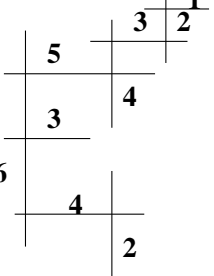
Symb. de Kodaira	$I_0$	$I_n$	II	III	IV	$I_0^*$
Dessin (les chiffres indiquent la multiplicité des composantes)						
ord (Discrim.)	0	n	2	3	4	6
n= nombre de composantes irred.	1	n	1	2	3	5
Symb. de Kodaira	$I_n^*$	IV*	III*	II*		
Dessin (les chiffres indiquent la multiplicité des composantes)						
ord (Discrim.)	6+n	8	9	10		
nomb. de comp. irréductibles	5+n	7	8	9		

FIG. 4.4 – Tableau 1- Configurations possibles

## Chapitre 5

# Construction des pinceaux de cubiques de rang de Mordell-Weil cinq

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous travaillerons sur un corps algébriquement clos.

Nous construirons des pinceaux de cubiques tels que la surface elliptique rationnelle induite est de rang générique cinq. Nous montrerons que 1) ces constructions donnent toutes les surfaces rationnelles dont le rang du groupe de Mordell-Weil est égal à cinq ; 2) un sous-ensemble des points de base suffit pour "engendrer" tout le groupe de Mordell-Weil (si  $r = 8$ , Manin [26] a montré que les courbes exceptionnelles obtenues via l'éclatement des points de base engendrent un sous-groupe d'indice trois dans le groupe de Mordell-Weil).

Les cas où le rang est  $\geq 6$  ont déjà été traités ( $r=8$  a été considéré par Shioda [48] et  $r=6,7$  par Fusi dans [13]). À partir de  $r \leq 4$  la torsion peut être non triviale. Plus petit est le rang, plus grand est le nombre de constructions possibles. Le cas  $r = 5$  a été choisi ici car c'est le plus grand rang non encore traité.

Nous énonçons maintenant la partie  $r = 5$  du théorème sur les configurations possibles du réseau de Mordell-Weil d'une surface elliptique rationnelle démontré dans [37].

**Théorème 5.1.1** (Oguiso-Shioda). *Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique rationnelle dont le rang du groupe de Mordell-Weil est égal à cinq. Alors le réseau de Mordell-Weil  $E(k)$ , le réseau "étroit"  $E_0(k)$  et le réseau trivial  $T$  figurent dans la liste suivante :*

- a)  $E(k) = D_5^*$ ,  $E^0(k) = D_5$  et  $T = A_3$ .
- b)  $E(k) = A_5^*$ ,  $E^0(k) = A_5$  et  $T = A_1 \oplus A_2$ .
- c)  $E(k) = D_4^* \oplus A_1^*$ ,  $E^0(k) = D_4 \oplus A_1$  et  $T = A_1^{\otimes 3}$ .

où  $A_n$  et  $D_n$  désignent les réseaux de racines (cf. [6, Chap. 6])

Nous rappelons que le réseau "étroit"  $E^0(K)$  est le sous-réseau du réseau de Mordell-Weil donné par les éléments qui intersectent la composante neutre  $\Theta_{v,0}$  (celle qui intersecte

la section neutre) des fibres, et le réseau trivial est un sous-réseau du réseau de Néron-Severi qui décrit la contribution des composantes (qui n'intersectent pas la section neutre) des fibres.

Par la formule de Shioda-Tate (voir sous-section 1.3.4), une surface elliptique rationnelle de rang cinq peut avoir :

- i) une seule fibre réductible forcément de type  $I_4$  (cas a)),
- ii) deux fibres réductibles une de type  $III$  ou  $I_2$  et l'autre de type  $IV$  ou  $I_3$  (cas b)), ou
- iii) trois fibres réductibles de type  $III$  ou  $I_2$  (cas c)).

Nous déterminons quels sont les pinceaux qui induisent chaque type de configuration en haut.

## 5.2 Constructions

### 5.2.1 Une seule fibre réductible

Nous traitons dans cette sous-section le cas a) du théorème 5.1.1. Nous construirons des surfaces elliptiques rationnelles de rang cinq dont le réseau de Mordell-Weil est isomorphe à  $D_5^*$ .

Pour avoir une fibre de type  $I_4$  à partir d'un pinceau de cubiques  $\Lambda_a$  dans  $\mathbb{P}^2$ , nous devons éclater un point de  $\mathbb{P}^2$  qui est point singulier d'une unique cubique du pinceau. Puisque la mauvaise fibre est de type multiplicatif le membre singulier du pinceau est donné par l'une des cubiques singulières suivantes :

- a1) une cubique nodale telle que le noeud est un point de base avec multiplicité 4.
- a2) une conique avec une droite non tangente telle que chaque point d'intersection est un point de base avec multiplicité 2.
- a3) une conique avec une droite telle qu'un point d'intersection est point de base avec multiplicité 3 et l'autre point d'intersection n'est pas un point de base.
- a4) Trois droites non concourantes telles qu'un des points d'intersection est un point de base avec multiplicité 2 et les autres ne sont pas des points de base.

#### Construction a4)

Soient  $C_1$  une cubique non singulière et  $l_1$  une droite qu'intersecte  $C_1$  en trois points distincts  $p_0, p_1, p_2$ . Prenons une droite  $l_2$  passant par  $p_0$  qui intersecte  $C_1$  en deux autres points distincts  $p_3, p_4$ , et une droite  $l_3$  qui intersecte  $C_1$  dans trois autres points  $p_5, p_6, p_7$  tels qu'il n'y a pas d'autre triplet de points colinéaires parmi les points  $p_0, \dots, p_7$ .

Considérons le pinceau de cubiques  $\Lambda_a$  engendré par  $C_1$  et  $C_2 = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ . La cubique  $C_2$  est le seul membre réductible d'après les hypothèses sur la configuration des points. Le point  $p_0$  est l'unique point de base de multiplicité supérieure à un du pinceau. L'éclatement de ce point produit une fibre de type  $I_4$ .

Soient  $P_i$  la courbe exceptionnelle de l'éclatement de  $p_i$  et  $\tilde{P}_i$  son image dans  $E(k)$ .

Nous calculons maintenant l'accouplement de la hauteur des  $\tilde{P}_i$ . Pour cela nous utiliserons les formules fournies dans la sous-section 1.2.5.

L'unique fibre mauvaise est de type  $I_4$ , sa contribution à  $\langle P, P \rangle$  est donc :

$$\text{contr}(P) = \frac{3}{4}, \text{ si } P \text{ rencontre la composante } \Theta_1 \text{ ou } \Theta_3$$

ou

$$\text{contr}(P) = 1, \text{ si } P \text{ rencontre la composante } \Theta_2.$$

Pour  $\langle P, Q \rangle$  tels que  $P$  rencontre  $\Theta_i$  et  $Q$  rencontre  $\Theta_j$  avec  $i \leq j$ , la contribution est donnée par

$$\frac{i(4-j)}{4}.$$

Calculons  $\langle P_1, P_1 \rangle$  : le point  $p_1$  appartient à  $l_1$ . Puisque  $p_0$ , le point correspondant à la section neutre, appartient à cette droite aussi la section induite par  $P_1$  intersectera soit  $\Theta_1$ , soit  $\Theta_3$ , donc

$$\text{contr}(P_1) = \frac{3}{4}.$$

La caractéristique d'Euler,  $\chi$ , d'une surface rationnelle est 1, l'auto-intersection d'une section est  $-1$  nous avons donc :

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \chi - (P_1.P_1) - \text{contr}(P_1) = 1 - (-1) - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Le même type de calcul pour les autres  $P_i$  nous donne :

(5.1)

$$\langle P_i, P_i \rangle = \begin{cases} 5/4 & \text{si } i = 1, 2, 3, 4 \\ 1 & \text{si } i = 5, 6, 7 \end{cases} \quad \langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1/4 & \text{si } i = 1, j = 2 \text{ ou } i \neq j = 3, 4 \\ 3/4 & \text{si } i = 1, 2, j = 3, 4 \\ 1/2 & i = 1, 2, j = 5, 6, 7 \text{ ou} \\ & i = 5, 6, 7, j = 3, 4 \\ 0 & i \neq j = 5, 6, 7 \end{cases}$$

Le sous-réseau du réseau de Mordell-Weil  $E(K)$  engendré par  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  est d'indice fini. Sa matrice d'intersection est la suivante :

$$(5.2) \quad A = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 & 3/4 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 5/4 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 5/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est égal à  $1/4 = \det(D_5^*)$ . Ce qui implique que l'indice de  $\langle P_2, \dots, P_6 \rangle$  dans  $E(K) = D_5^*$  est un, il engendre donc tout le réseau de Mordell-Weil.

**Remarque 5.2.1.** Des transformations birationnelles ramènent le cas ai) au cas aj) pour  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Montrons comment passer de a3) à a4) et vice-versa :

Soient  $Q$  la conique et  $l$  la droite en a3). Soit  $p_0$  le point de base dans  $l \cap Q$  avec multiplicité trois. Supposons que la conique  $Q$  est tangente aux cubiques du pinceau en  $p_0$  et que la droite  $l$  les coupe transversalement en ce point. Soient  $p_1, p_2$  les autres points de base dans la droite  $l$  et  $p_3, \dots, p_6$  les points de base dans  $Q$ . Soit  $P_7$  la transformée propre en  $S$  (par l'éclatement des  $p_i$ 's avec ses multiplicités dans  $\mathbb{P}^2$ ) de la droite qui relie  $p_3$  et  $p_4$ . Soit  $E_0$  la  $(-2)$ -courbe au dessus de  $p_0$ ; en contractant  $P_0$ ,  $E_0$  devient une  $(-1)$ -courbe qui l'on contractera pour obtenir une surface  $S'$ . Les images des courbes  $P_1, \dots, P_7$  ne s'intersectent pas, en les contractant nous obtenons  $\mathbb{P}^2$  et les images des fibres de la fibration dans  $S$  forment un pinceau comme en a4).

Réciproquement, si l'on considère la construction a4) le point  $p_0$  est un point de base double. Ceci implique qu'il y a deux courbes au dessus de ce point après son éclatement, une  $(-1)$ -courbe  $P_0$  et une  $(-2)$ -courbe  $P'_0$ . On prendra  $S'$  obtenue à partir de  $S$  en contractant  $P_0$  et en suite  $P'_0$  (qui devient une  $(-1)$ -courbe après la contraction de  $P_0$ ). Soit  $E_i$  la transformée propre dans  $S'$  de la droite qui relie  $p_i$  à  $p_5$ . Soit  $L$  la transformée propre de la droite  $l_1$  dans  $S'$ . L'ensemble  $\{E_1, E_2, P_3, P_4, P_6, P_7, L\}$  est constituée de courbes exceptionnelles qui ne s'intersectent pas. En les contractant on obtient  $\mathbb{P}^2$  et les images des fibres forment un pinceau de cubiques comme celui en a3).

Nous démontrons maintenant que toute surface qui satisfait a) dans le théorème 5.1.1 est obtenue par la construction a4).

**Théorème 5.2.2.** *Soit  $S$  une surface elliptique rationnelle de rang 5 et  $E(K) \simeq D_5^*$ . Alors  $S$  est induite par un pinceau  $\Lambda_a$  comme dans la construction a4).*

**Démonstration :** Puisque  $S$  peut être vue comme l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en neuf points et chaque éclatement d'un point différent engendre une section dans le groupe de Mordell-Weil, nous avons les possibilités suivantes pour  $S$  :

- a)  $\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points distincts.
- b)  $\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points, dont deux sont infiniment proches.
- c)  $\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points, dont deux sont infiniment proches de deux autres.
- d)  $\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points, dont trois sont infiniment proches d'un autre.

Nous vérifierons que le cas a) ne se produit pas. Tous les membres de  $\Lambda$  sont irréductibles, sauf celui qui détermine la fibre de type  $I_4$ . Pour obtenir ce type de fibre nous devons soit éclater une singularité nodale quatre fois, soit éclater une intersection non tangente d'une conique et une cubique trois fois, soit un point singulier, placé dans le sommet d'un triangle, deux fois. Puisque les neuf points sont tous distincts chacun est éclaté une seule fois, mais on a vu ici qu'un point devra être éclaté au moins deux fois pour produire la fibre  $I_4$ .

Dans le cas b) le pinceau a huit points distincts, dont un est un point double, disons  $p_0$ . Par le paragraphe précédent  $\Lambda$  a un seul membre réductible qui est donné par trois droites non concourantes. Puisque  $\Lambda$  n'a pas d'autres membres réductibles, il n'y a pas une autre configuration où les points de base sont colinéaires (trois points sont colinéaires seulement

s'ils sont dans la même composante d'une fibre). Donc  $\Lambda$  est comme en construction a4).

Dans le cas c) le pinceau a sept points de base, dont deux sont des points doubles. L'unique membre irréductible  $\Lambda$  est donné donc par l'union d'une droite et une conique. Une transformation de Cremona change ce pinceau en un pinceau comme en b), donc il peut être obtenu à partir de la construction a4).

Finalement, le cas d). Le pinceau a six points de base, dont un est un point où ses membres s'intersectent avec multiplicité quatre. Tous les membres du pinceau sont irréductibles, sauf celui qui détermine la fibre de type  $I_4$ . Puisque la fibre est de type multiplicatif le premier paragraphe de la démonstration implique que ce membre est une cubique nodale. Donc, le pinceau  $\Lambda$  provient, après une transformation de Cremona, d'un pinceau comme dans la construction a4).

## 5.2.2 Deux fibres réductibles

Dans cette sous-section nous traitons le cas b) du théorème 5.1.1 en construisant des surfaces rationnelles dont le rang du groupe de Mordell-Weil est cinq et la fibration a deux fibres mauvaises réductibles. Il suit du théorème 5.1.1 que le réseau de Mordell-Weil d'une telle surface est isomorphe à  $A_5^*$ .

Une fibre réductible aura deux composantes irréductibles (type  $I_2$  ou  $III$ ), et l'autre en aura trois (type  $I_3$  ou  $IV$ ).

Nous donnerons la construction de  $(III, IV)$ .

Construction 2a) Soit  $Q$  une conique irréductible et  $l$  une droite tangente à  $Q$  en  $p$ . Soit  $l_1$  une droite intersectant  $l$  en un point  $p_0 \neq p$  telle que  $Q \cap l_1 = \{p_1, p_2\}$ . Prenons  $l_2$  une droite telle que  $l_2 \cap l = \{p_3 \neq p\}$  et  $l_2 \cap Q = \{p_4, p_5\}$ . Finalement prenons  $l_3$  une droite concourante à  $l_1$  et  $l_2$  telle que  $l_3 \cap l = \{p_6 \neq p\}$  et  $l_3 \cap Q = \{p_7, p_8\}$ . Puisque  $Q$  est irréductible il n'existe pas d'autre droite contenant trois des points  $\{p_0, \dots, p_8\}$ , de plus aucune autre conique ne contient six parmi les huit points, puisque ceci impliquerait qu'elle contient toute une droite. Le pinceau de cubiques passant par  $p_0, \dots, p_8$  a seulement deux membres réductibles, donnés par  $C_1 = l \cup Q$  et  $C_2 = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ . Les neuf points de base sont distincts donc la multiplicité d'intersection de deux cubiques distinctes du pinceau dans un de ces points est un –aucun de ces points est point de base multiple.

La surface elliptique rationnelle obtenue par l'éclatement de ces neuf points a deux fibres réductibles données par  $C_1$  (type  $III$ ) et  $C_2$  (type  $IV$ ).

Notons  $\tilde{P}_i$  l'image dans le groupe de Mordell-Weil de la courbe exceptionnelle obtenue par l'éclatement de  $p_i$ . Nous allons montrer que  $\{\tilde{P}_2, \tilde{P}_4, \tilde{P}_6, \tilde{P}_7, \tilde{P}_8\}$  engendre le groupe de Mordell-Weil entier et pas seulement un sous-réseau d'indice fini. L'accouplement de la hau-

teur et la matrice des générateurs sont donnés ci par :

$$\langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_i \rangle = \begin{cases} 3/2 & \text{si } i = 1 \\ 5/6 & \text{si } i = 3, 6 \\ 2 & \text{si } i = 2 \\ 4/3 & \text{si } i = 4, 5, 7, 8 \end{cases} \quad \langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_j \rangle_{i \neq j} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = 1, j = 3, 6 \\ 1 & \text{si } i = 1, j \neq 3, 6; i = 2 \\ 1/3 & \text{si } i = 3, 4, 5, \\ & j = 4, 5; i = 6, 7, 8, j = 7, 8 \\ 2/3 & \text{si } i = 3, j = 7; i = 6, \\ & j = 4, 5; i = 5, j = 7 \\ 1/6 & \text{si } i = 3, j = 6 \end{cases}$$

Voici en détail le calcul de  $\langle \tilde{P}_4, \tilde{P}_4 \rangle$  :

Soient  $\Theta_v$  la fibre de type *III* et  $\Theta_w$  celle de type *IV*. Puisque  $P_4$  n'intersecte pas la composante neutre d'aucune de ces fibres, les contributions des fibres en  $\tilde{P}_4$  sont :

$$\text{contr}_v(P_4) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \text{contr}_w(P_4) = \frac{2}{3}.$$

La caractéristique d'Euler de  $S$  est égal à un, et  $(P_4.P_4) = -1$ . L'équation 1.1 pour  $P = Q = \tilde{P}_4$  nous donne :

$$\langle \tilde{P}_4, \tilde{P}_4 \rangle = 1 + 0 + 0 - (-1) - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Voici la matrice d'intersection :

$$(5.3) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 5/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\det(B) = 1/6 = \det(A_5^*)$ , l'ensemble  $\{\tilde{P}_2, \tilde{P}_4, \tilde{P}_6, \tilde{P}_7, \tilde{P}_8\}$  constitue une base pour le réseau de Mordell-Weil  $E(K) \simeq A_5^*$ .

Construction 2b) ( $I_2, IV$ ) : Pour construire une fibre de type  $I_2$  on peut prendre  $l$  non tangente à la conique  $Q$ .

Construction 2c) ( $III, I_3$ ) : Pour une fibre de type  $I_3$  il suffit de prendre les droites  $l_i$  non concourantes.

Construction 2d) ( $I_2, I_3$ ) : Prenons les droites  $l_i$  non concourantes et la droite  $l$  non tangente à la conique  $Q$ .

Il y a d'autres configurations qui induisent les mêmes types de fibres, mais elles peuvent toutes être ramenées à l'une des constructions  $2a - d$  après une transformation de Cremona :

i) Nous pouvons remplacer les trois droites concourantes par une conique  $R$  et une droite  $m$  tangente à  $R$  de façon que  $R \cap Q$  ait quatre points (dont l'un est un point dans l'intersection  $l \cap Q$  et le point de tangence  $R \cap m$  n'est pas un point de base i.e n'appartient pas à  $l$  ou à  $Q$ ).

ii) Nous pourrions aussi remplacer les trois droites concourantes par une cubique cuspidale à laquelle  $l$  est tangente en son point singulier. Dans ce cas il y a deux point infiniment proches du même point.

**Théorème 5.2.3.** *Soit  $S$  une surface elliptique rationnelle dont le groupe de Mordell-Weil est de rang cinq et  $S(K) \simeq A_5^*$ . Alors  $S$  peut être obtenue par l'une des constructions 2a), 2b), 2c) or 2d).*

**Démonstration :** La surface  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  éclaté en neuf points dont la configuration est l'une des suivantes :

- a) Les neuf points sont distincts,
- b) L'un des points est infiniment proche d'un autre.
- c) Il y a deux couples de points infiniment proches.
- d) Trois points sont infiniment proches d'un même point.

Dans le cas a) puisque les points sont distincts et il existe deux fibres réductibles, les points ne sont pas en position générale. Les fibres réductibles sont de type  $I_2, I_3, III$  ou  $IV$ , l'une de deux ayant deux composantes et l'autre trois. Ceci implique que six points appartiennent à une conique et il existe quatre droites différentes, chacune passant par trois points et aucune autre droite ou conique contenant trois, respectivement six points. Le pinceau qui induit  $\mathcal{E}$  peut être obtenu via l'une des constructions 2a),..., 2d).

Dans le cas b) les points ne sont pas en position générale non plus ; ceci impliquerait un rang plus élevé. Puisqu'on a deux mauvaises fibres, au moins l'une des cubiques du pinceau est réductible, en étant soit une conique unie à une droite, soit trois droites. Le point double est soit le point singulier d'une cubique nodale (ce qui donne une fibre de type  $I_2$ ) ou cuspidale (ce qui donne une fibre de type  $III$ ), soit le point d'intersection d'une conique et d'une droite (en donnant une fibre de type  $IV$  si elles sont tangentes, ou de type  $I_3$  sinon). Donc il est possible, via des transformations de Cremona, d'obtenir une des constructions 2a),...,2d).

Dans le cas c) nous avons deux points doubles ; l'un est forcément la singularité d'une cubique nodale ou cuspidale, et l'autre est dans l'intersection d'une conique et une droite. Une transformation de Cremona nous ramène au cas précédent, donc les constructions 2a),..., 2d) sont suffisantes pour traiter ce cas.

Finalement, dans le cas d) le point triple est forcément le point singulier d'une cubique. Après les trois éclatements nous obtenons une fibre de type  $I_3$  (si la cubique est nodale) ou  $IV$  (si elle est cuspidale). Le pinceau a un unique membre réductible qui est donc à l'origine

de la fibre à deux composantes. Deux transformations de Cremona nous ramènent au cas b).

### 5.2.3 Trois fibres réductibles

Dans ce cas chaque fibre réductible a deux composantes. Toutes les combinaisons de  $I_2$  et  $III$  sont possibles.

Construction 3a) : Soient  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  trois coniques irréductibles dans  $\mathbb{P}^2$  telles que  $Q_i \cap Q_j$  a quatre points distincts et  $Q_i \cap Q_j \cap Q_k$  a trois points distincts :  $Q_1 \cap Q_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ,  $Q_1 \cap Q_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_5\}$ ,  $Q_2 \cap Q_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$  et donc  $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$ . Considérons le pinceau de droites  $l_{2,u}$  passant par le point  $p_5$ . Chaque droite  $l_{2,u}$  coupe  $Q_1$  en  $p_5$  et en un deuxième point  $p_{9,u}$  et  $Q_3$  en  $p_5$  et en un deuxième point  $p_{8,u}$ . Soient  $l_{1,u}$  la droite passant par  $p_6$  et  $p_{8,u}$  et  $l_{3,u}$  la droite passant par  $p_4$  et  $p_{9,u}$ . Posons  $l_{1,u} \cap Q_2 = \{p_6, p_{7,u}\}$  et prenons  $u_0$  tel que  $p_{7,u_0} \in l_{3,u_0}$ . Notons  $p_{i,u_0} = p_i$ ,  $i = 7, 8, 9$ .

Les cubiques  $C_j = Q_j \cup l_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  passent par  $p_1, \dots, p_9$  et sont les uniques cubiques singulières dans le pinceau de cubiques par ces neuf points. La surface elliptique obtenue à partir de l'éclatement de ces points a trois fibres réductibles de type  $I_2$  ou  $III$  selon l'intersection de  $l_j$  et  $Q_j$ .

Notons  $P_i$  la courbe exceptionnelle au dessus du point  $p_i$ . Prenons  $P_1$  pour élément neutre du groupe de Mordell-Weil. Les courbes  $P_2, P_3, P_4, P_7, P_8$  engendrent un sous-réseau du réseau de Mordell-Weil dont le déterminant est égal à celui de  $D_4^* \oplus A_1^*$ ; elles engendrent donc tout le groupe de Mordell-Weil. Voici les calculs des hauteurs associées à ces points :

Soient  $\Theta_u$  la fibre donnée par  $Q_1 \cup l_1$ ,  $\Theta_v$  celle donnée par  $Q_2 \cup l_2$  et  $\Theta_w$  donnée par  $Q_3 \cup l_3$ . Pour  $i = 4$  et  $j = 7$ , les sections données par  $P_4$  et  $P_7$  intersectent la même composante de  $\Theta_v$  et des composantes distinctes de  $\Theta_u$  et  $\Theta_w$ . La table de la sous-section 1.2.5 donne :

$$\text{contr}_u(P_4, P_7) = \text{contr}_w(P_4, P_7) = 0 \text{ et } \text{contr}_v(P_4, P_7) = \frac{1}{2}.$$

La formule 1.1 pour  $P_4$  et  $P_7$  :

$$\langle P_4, P_7 \rangle = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

La matrice associée :

$$\langle P_i, P_i \rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 2, 3 \\ 3/2 & \text{si } i = 4 \\ 1 & \text{si } i = 7, 8 \end{cases} \quad \langle \tilde{P}_i, \tilde{P}_j \rangle_{i \neq j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, 3, j = 2, 3, 4, 7, 8 \\ 1/2 & \text{si } i, j = 4, 7, 8 \end{cases}$$

La matrice des générateurs est donnée par  $C$ , son déterminant est  $1/8$  et donc égal à  $\det(D_4^* \oplus$

$$A_1^* = (1/4)(1/2).$$

$$(5.4) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 5.2.4.** *Soit  $S$  une surface elliptique rationnelle dont le rang du groupe de Mordell-Weil est égal à cinq et  $E(K) \simeq D_4^* \oplus A_1^*$ . Alors  $S$  provient d'un pinceau comme dans les constructions 3a), 3b), 3c) ou 3d).*

**Démonstration :** Comme on a fait dans les démonstrations précédentes, nous considérerons les configurations possibles des points de base d'un pinceau qui induit la surface  $\mathcal{E}$ . Elles sont les suivantes :

- a) les neuf points sont distincts,
- b) l'un des points est infiniment proche d'un autre.
- c) deux des points sont infiniment proche d'un troisième,
- d) il y a deux couples de points infiniment proches,
- e) trois points sont infiniment proches d'un quatrième,
- f) deux des points sont infiniment proches d'un même point et un quatrième point est infiniment proche d'un cinquième,
- g) il y a trois couples de points infiniment proches.

Dans le cas a), les neuf points étant distincts, leur éclatement ne contribue pas à des composantes dans les fibres. Ceci implique que le pinceau de cubiques qui induit  $\mathcal{E}$  a forcément trois cubiques à deux composantes, l'une étant une droite et l'autre une conique. Puisque ce sont les seules mauvaises fibres, l'union des droites ne contient pas tous les neuf points, ni l'union d'une conique  $Q_j$  et d'une droite  $l_i$  avec  $i \neq j$ . De l'autre côté, nous avons  $\#(l_i \cap Q_j) = 1$  ou 2. S'il y a un seul point dans l'intersection alors puisque chaque droite contient trois points de base, l'intersection  $l_i \cap l_j$  contiendra forcément deux points, ce qui implique  $l_i = l_j$ . Donc  $l_i \cap Q_j$  contient deux points de base ce qui implique que  $Q_i$  intersecte  $Q_j$  en quatre points de base. Ceci nous permet de conclure que ce pinceau est donnée par une construction comme celle faite en 3a).

Dans le cas b) nous avons huit points distincts. Le pinceau a forcément un membre irréductible singulier, dont la singularité est un des points de base. Il n'y a pas d'autres cubiques singulières comme celle-là (puisque ceci impliquerait un deuxième point de base multiple). Les deux autres mauvaises fibres proviennent donc des cubiques réductibles (l'union d'une droite et une conique). Une transformation de Cremona nous ramène au cas précédent.

Maintenant nous traiterons les cas c) et d) simultanément puisque les deux impliquent que le pinceau a sept points de base distincts. Vu que les mauvaises fibres n'ont pas plus de deux composantes, le cas c) ne se produit pas parce que l'éclatement d'un point triple

contribue à deux composantes de plus. Dans le cas d), les deux points multiples doivent être des singularités de cubiques. Une transformation de Cremona nous ramène au cas b).

Les cas e) et f) ne sont pas possibles pour les mêmes raisons que le cas c) ne l'est pas. Dans le cas g) le pinceau n'a aucun membre réductible. Les trois points multiples sont des singularités de cubiques. Deux transformations de Cremona nous ramènent au cas b) qui est traité par la construction 3a).  $\square$

**Remarque 5.2.5.** Comme dans l'article [13], les courbes exceptionnelles obtenues à partir de l'éclatement des points de base vont engendrer le groupe de Mordell-Weil entier et pas seulement un sous-groupe d'indice trois comme dans le cas où le rang générique est huit.

# Chapitre 6

## Le signe de l'équation fonctionnelle

### Introduction

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$ . On peut lui associer un signe  $W(E|K)$  de façon intrinsèque (voir par exemple [41]), indépendamment des conjectures, via le produit des signes locaux  $W_v(E|K) = \pm 1$ .

Une version de la conjecture de parité peut s'énoncer ainsi

**Conjecture 6.0.6.** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$ . Soit  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil  $E(K)$ . Alors*

$$W(E|K) = (-1)^r.$$

Quand  $E$  est définie sur  $\mathbb{Q}$  on sait depuis A. Wiles qu'elle est modulaire et que  $W(E|K)$  est le signe de l'équation fonctionnelle de la fonction  $L(E, s)$ ; en particulier

$$W(E|\mathbb{Q}) = (-1)^{\text{ord}_{s=1}L(E,s)}.$$

La conjecture de parité équivaut dans ce cas à la congruence

$$\text{ord}_{s=1}L(E, s) \equiv \text{rang}E(\mathbb{Q}) \pmod{2}$$

qui est une forme affaiblie de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

Puisque la plupart des énoncés est encore conjecturale sur un corps de nombres quelconque, nous nous placerons sur  $\mathbb{Q}$  pendant la première section de ce chapitre. Pour une exposition plus détaillée sur les propriétés du signe  $W$  sur  $\mathbb{Q}$ , notamment pour les familles de courbes elliptiques définies sur  $\mathbb{Q}$ , le lecteur pourra consulter le travail de Rohrlich [41]. La théorie sur un corps de nombres quelconque est abordée par Helfgott dans [19] et [18].

Soit maintenant  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$  et  $U \subseteq B$  un ouvert au-dessus duquel  $\mathcal{E}_U$  est un schéma abélien. Notons

$$U_+(\mathbb{Q}) = \{t \in U(\mathbb{Q}); W(\mathcal{E}_t) = 1\}$$

$$U_-(\mathbb{Q}) = \{t \in U(\mathbb{Q}); W(\mathcal{E}_t) = -1\}.$$

modulo la conjecture de parité on a aussi

$$U_+(\mathbb{Q}) = \{t \in U(\mathbb{Q}); \text{rang}E(\mathbb{Q}) \text{ est pair}\}$$

$$U_-(\mathbb{Q}) = \{t \in U(\mathbb{Q}); \text{rang}E(\mathbb{Q}) \text{ est impair}\}.$$

Ainsi, toujours modulo la conjecture de parité, on sait que si  $\text{rang}E(\mathbb{Q}(B))$  est pair (resp. impair) et  $U_-(\mathbb{Q})$  est infini (resp.  $U_+(\mathbb{Q})$  est infini) alors il existe une infinité de  $t \in U(\mathbb{Q})$  tels que

$$\text{rang}\mathcal{E}_t(\mathbb{Q}) \geq \text{rang}\mathcal{E}(\mathbb{Q}(B)) + 1.$$

Divers auteurs ont établi des résultats sur  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  sous diverses conditions ou en admettant des conjectures classiques.

Les deux sections suivantes exposent ces résultats selon le genre de la courbe  $B$  et les combinent avec les résultats obtenus dans les chapitres précédents afin d'obtenir des meilleures bornes inférieures pour le rang d'une infinité de fibres d'une surface elliptique.

## 6.1 Base rationnelle

Les hypothèses nécessaires pour démontrer des résultats sur la variation du signe dépendent des types des fibres singulières.

### 6.1.1 Fibration sans fibres multiplicatives

Si la surface n'a pas de fibres multiplicatives alors [23] et [18] démontrent, en particulier, que les ensembles  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  sont infinis en supposant la conjecture sur le *square free sieve*. Nous l'énonçons pour le confort du lecteur.

**Conjecture 6.1.1.** *Soit  $f \in \mathbb{Z}[X]$  un polynôme en une variable sans facteur carré et  $A \geq 1$ . Alors*

$$\#\{n \in [1, A] | f(n) \text{ est sans facteur carré}\} = C_f A + o(A)$$

où

$$C_f = \prod_p \left(1 - \frac{r_f(p)}{p^2}\right) \text{ avec } r_f(p) = \#\{x \pmod{p^2} | f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}\}.$$

Une formulation équivalente et souvent utilisée est la suivante :

**Conjecture 6.1.2.** *Soit  $f \in \mathbb{Z}[X]$  sans facteurs carrés, alors*

$$\#\{x \in [1, A]; \exists p > \sqrt{A}, p^2 | f(x)\} = o(A).$$

Nous devons mentionner aussi la conjecture homogène.

**Conjecture 6.1.3.** Soit  $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$  un polynôme homogène sans facteur carré. Alors

$$\#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x|, |y| \leq A; f(x, y) \text{ est sans facteur carré}\} = C_f(2A^2) + o(A^2).$$

où

$$C_f = \prod_p \left(1 - \frac{r_f(p)}{p^4}\right) \text{ avec } r_f(p) = \#\{(x, y) \pmod{p^2} \mid f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^2}\}.$$

et sa formulation équivalente

**Conjecture 6.1.4.** Sous les mêmes hypothèses

$$\#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x|, |y| \leq A; \exists p \text{ tel que } p > A, p^2 \mid f(x, y)\} = o(A^2).$$

La conjecture 6.1.3 a été démontrée par Greaves pour  $\deg_{irr}(P) \leq 6$  où  $\deg_{irr}$  représente le maximum des degrés des facteurs irréductibles.

En supposant la conjecture 6.1.3 le résultat [19, Theorem 6.3] décrit la valeur moyenne du signe associé à  $\mathcal{E}$  comme un produit compris strictement entre  $-1$  et  $1$ . Un corollaire immédiat de son résultat est donc le suivant :

**Théorème 6.1.5** (modulo la conjecture Square free sieve). Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B \simeq \mathbb{P}^1$  une surface elliptique non isotriviale définie sur  $\mathbb{Q}$  sans fibres multiplicatives. Alors  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  sont infinis.

Un résultat inconditionnel dans ce contexte a été démontré par Manduchi dans [23].

**Théorème M [23, Theorem 1]** : Soit  $\mathcal{E}$  une surface elliptique sur  $\mathbb{Q}$  fibrée sur  $\mathbb{P}^1$  et d'invariant  $j(t) \in \mathbb{Q}(t)$  non constant. Soient  $c_4(t), c_6(t) \in \mathbb{Q}[t]$ . Supposons que les assertions suivantes sont vérifiées :

(1) Les facteurs irréductibles sur  $\mathbb{Z}$  du numérateur et du dénominateur de  $j(t)$  et  $j(t) - 1728$  sont de degré inférieur ou égal à 6.

(2) Si  $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est pôle de  $j(t)$ , alors  $\text{ord}_x c_4(t) \neq \text{ord}_x c_6(t) \pmod{2}$ .

Alors,  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 6.1.6.** L'hypothèse  $j(t) \notin \mathbb{Q}$  est indispensable comme l'ont montré Cassels et Schinzel sur des exemples dans [7].

## 6.1.2 Fibrations avec fibres multiplicatives

Dans [18] Helfgott admet l'existence de places où la réduction est multiplicative. Pour obtenir des résultats similaires sur  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  il a dû supposer la validité d'une conjecture de Chowla sur la fonction  $\lambda$  de Liouville.

**Conjecture 6.1.7.** Soit  $P \in \mathbb{Z}[x, y]$  polynôme homogène différent de  $cQ^2(x, y)$ , pour  $c \in \mathbb{Z}$  et  $Q \in \mathbb{Z}[x, y]$ . Alors  $f(x, y) = \lambda(P(x, y))$  satisfait :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{(S \cap L \cap [-N, N]^2)\}} \sum_{(x, y) \in S \cap L \cap [-N, N]^2} f(x, y) = 0,$$

pour tout choix de secteur  $S \subset \mathbb{R}^2$  et de réseau  $L$  dans  $\mathbb{Z}^2$ . La fonction  $\lambda$  est celle de Liouville donnée par  $\lambda(0) = 0$  et  $\lambda(n) = \prod_{p|n} (-1)^{v_p(n)}$  si  $n \neq 0$ .

La conjecture 6.1.7 est connue dans le cas  $\deg(P) \leq 2$  (de la Vallée- Poussin) et a été démontré, récemment, pour  $\deg(P) = 3$  par Helfgott dans sa thèse de doctorat.

Ainsi comme dans la sous-section précédente il y a des résultats conditionnels et inconditionnels. Puisque nous ne nous intéressons qu'au nombre de points dans  $U_-(K)$  et  $U_+(K)$ , nous n'énoncerons pas les résultats, mais ses corollaires.

**Théorème 6.1.8.** (Helfgott- modulo les conjectures 6.1.3 et 6.1.7) Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B \simeq \mathbb{P}^1$  une surface elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$ , avec au moins une fibre multiplicative. Alors  $U_+(\mathbb{Q})$  et  $U_-(\mathbb{Q})$  sont infinis.

Dans [18, Chap. 1 ] Helfgott définit les polynômes suivants :

$B'_\mathcal{E}$  le polynôme donné par les places de réduction potentiellement multiplicative

$$B'_\mathcal{E}(x, y) = \prod_{\mathcal{E} \text{ a red. pot. mult. en } v} P_v(x, y),$$

et  $M_\mathcal{E}$  est celui donné par les places de réduction multiplicative

$$M_\mathcal{E}(x, y) = \prod_{\mathcal{E} \text{ a red. mult. en } v} P_v(x, y),$$

où  $P_v = x$  si  $v$  est la place  $\deg(\text{den}) - \deg(\text{num})$  et  $P_v(x, y) = x^{\deg(Q)} Q(\frac{y}{x})$  si  $v$  est la place donnée par le polynôme irréductible primitif  $Q \in \mathbb{Z}[t]$ .

En considérant les cas où les conjectures ont été démontrées il a obtenu l'énoncé inconditionnel suivant :

**Théorème H [18, Theorem 1.4'] :** Soit  $\mathcal{E}$  une famille non constante de courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$  en une variable. Supposons  $\deg_{\text{irr}} B'_\mathcal{E} \leq 6$  et  $1 \leq \deg M_\mathcal{E} \leq 3$ . Alors  $W(\mathcal{E}(t))$  est de moyenne nulle sur  $\mathbb{Q}$ .

Le terme moyenne nulle ne sera pas expliqué ici parce que nous avons seulement besoin que le signe varie une infinité de fois.

Ces résultats combinés avec le théorème 0.2.3 et avec les résultats de la prochaine sous-section nous permettent de formuler une version conjecturale mais plus complète du théorème 0.2.8.

**Théorème 6.1.9** (modulo les conjectures 6.0.6, 6.1.3 et 6.1.7). Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle non isotriviale définie sur  $\mathbb{Q}$  telle que son modèle minimal sur  $\mathbb{Q}$  n'est pas une surface de del Pezzo de degré un. Alors

$$\#\{t \in B(K); r_t \geq r + 2\} = \infty.$$

**Remarque 6.1.10.** Dans certains cas la combinaison des résultats nous permet de donner une meilleure borne inférieure pour le rang d'une infinité de fibres. Ceci sera observé dans les exemples.

### 6.1.3 Exemples

Nous aurons toujours besoin de la conjecture 6.0.6 pour les exemples qui suivent.

#### Exemple 6.1.11. *Une combinaison des théorèmes 0.2.3 et M*

Nous considérons l'exemple traité par Manduchi dans [23, Sec. 4]. Soit  $\mathcal{E}$  la surface elliptique minimale dont l'équation de la fibre générique est :

$$E : -Y^2 = 4X^3 - 3t(t-1)^2X - t(t-1)^3.$$

Par la sous-section 1.2.3 cette surface est rationnelle. Une base pour le groupe de Mordell-Weil  $\mathcal{E}(\mathbb{C}(t))$  est :

$$P_1 = (t-1, 2(t-1)^2); P_2 = \left(-\frac{1}{2}(t-1), \frac{i}{\sqrt{2}}(t-1)^2\right).$$

Le rang de ce groupe est égal à deux. Sur  $\mathbb{Q}$  on a  $\mathcal{E}(\mathbb{Q}(t)) = \langle P_1 \rangle$ . Donc le rang du groupe de Mordell-Weil sur  $\mathbb{Q}$  est égal à un.

Les mauvaises fibres de cette surface sont de type  $I_1^*$ ,  $III$  et  $II$ .

Puisqu'elle a une fibre de type  $I_1^*$ , le modèle  $\mathbb{Q}$ -minimal ne peut pas être une surface de del Pezzo de degré un (une surface avec une telle fibre est obtenue à partir de l'éclatement de moins de sept points distincts). Elle satisfait donc les hypothèses du théorème 0.2.3.

Soit  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  la courbe rationnelle de l'énoncé de ce théorème et  $d$  le degré du  $\mathbb{Q}$ -morphisme  $\varphi : C \rightarrow B = \mathbb{P}^1$ , où  $B$  est la base de la fibration en question.

Nous pouvons choisir  $C$  telle que

- 1) Le degré  $d$  soit inférieur à six (pour chaque modèle minimal nous avons donné des constructions telle que le degré du morphisme obtenu était inférieur ou égal à cinq).
- 2)  $\varphi$  ne soit pas ramifié au dessus d'une mauvaise fibre, i.e  $\varphi$  ne soit pas ramifié au-dessus de  $t = 0, 1$  et  $\infty$ .

La deuxième hypothèse exclut seulement un nombre fini de morphismes.

La surface  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B C$  a rang générique sur  $\mathbb{Q}$  au moins deux. Soit  $\varphi(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$ , l'équation de la fibre générique est donnée par :

$$E_C : -Y^2 = 4X^3 - 3X \frac{u(t)(u(t)-v(t))^2}{v(t)^3} - \frac{u(t)(u(t)-v(t))^3}{v(t)^4}.$$

Par l'hypothèse sur la ramification de  $\varphi$  la surface a  $d$  fibres de type  $I_1^*$ ,  $d$  de type  $III$  et  $d$  de type  $II$ .

Par l'hypothèse 1) on a  $\max(\deg(u), \deg(v)) \leq 5$ .

L'invariant  $j$  satisfait :

$$j(E_C(t)) = \frac{1728u(t)}{u(t) - v(t)}.$$

Les pôles de  $j(E_C(t))$  sont donc les racines  $\beta_i$  de  $u(t) - v(t)$ .

Les coefficients  $c_4$  et  $c_6$  satisfont :

$$c_4(E_C(t)) = c \frac{u(t)(u(t) - v(t))^2}{v(t)^3} \text{ et } c_6(E_C(t)) = d \frac{u(t)(u(t) - v(t))^3}{v(t)^4},$$

où  $c, d \in \mathbb{Q}$ .

Puisque, par hypothèse,  $\varphi$  ne se ramifie pas au dessus de 1, les racines de  $u(t) - v(t)$  sont toutes simples.

Soit  $\beta$  est une racine de  $u(t) - v(t)$  alors

$$\text{ord}_\beta(c_4) = 2 \text{ et } \text{ord}_\beta(c_6) = 3.$$

Puisque  $d \leq 6$  la surface  $\mathcal{E}'$  satisfait les hypothèses du théorème  $M$ . Notons  $r'$  son rang générique sur  $\mathbb{Q}$  et  $r$  le rang générique de  $\mathcal{E}$ . Donc en supposant la conjecture de parité on a

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); r'_t \geq r' + 1\} = \infty.$$

Ce qui implique

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); r_t \geq r + 2\} = \infty.$$

Bien sûr que si nous ne supposons pas la conjecture de parité les bornes en haut restent valables pour le rang analytique.

Nous n'avons pas appliqué le théorème 0.2.8 ni le théorème 0.2.9 parce que nous ne connaissons pas le modèle  $\mathbb{Q}$ -minimal de  $\mathcal{E}$ .

**Exemple 6.1.12. Rang plus sept sur une extension finie  $k'|\mathbb{Q}$ , rang plus deux sur  $\mathbb{Q}$  - une fibre multiplicative**

Soit  $E_0 \rightarrow B_0$  une surface elliptique rationnelle définie sur  $\mathbb{Q}$  avec fibres mauvaises de type  $III^*, I_1, II$  (forcément définies sur  $\mathbb{Q}$  puisqu'elles sont uniques- l'équation :  $y^2 = x^3 - 27tx - 54t$  donne un exemple de surface avec une telle configuration sur  $\mathbb{Q}$ ). Cette surface est de rang générique un sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  par la formule de Shioda-Tate (sous-section 1.3.4). Considérons un changement de base, défini sur  $\mathbb{Q}$ , de degré trois totalement ramifié au dessus de la fibre  $III^*$  (qui dans l'exemple est à l'infini) et au dessus d'une fibre lisse définie sur  $\mathbb{Q}$  (si la fibre  $III^*$  est au dessus de  $\infty$  et la fibre lisse au dessus d'un certain  $a$  alors le changement considéré est donné par une équation du type  $s^3 = (t - a)$ ).

Nous obtenons une surface  $E_1$  dont les mauvaises fibres sont de type  $III, 3II, 3I_1$  (voir la sous-section 4.1). Cette configuration nous permet de déduire  $\text{ord}(\Delta_{E_1}) = 12$  ce qui nous garantit que la surface est rationnelle par 1.2.5. Par la formule de Shioda-Tate (voir 1.3.4) son rang sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  égal à 7 et donc sur une extension finie  $k'|\mathbb{Q}$ .

La configuration des mauvaises fibres se traduit en termes des polynômes  $B'_\mathcal{E}$  et  $M_\mathcal{E}$  de la façon suivante :

i)  $\deg M_{\mathcal{E}} = 3$ , puisque on a trois fibres multiplicatives de type  $I_1$  et

ii)  $\deg_{\text{irr}} B'_{\mathcal{E}} \leq \deg B'_{\mathcal{E}} = \deg M_{\mathcal{E}} = 3$ .

Ce qui nous garantit que la surface satisfait les hypothèses du théorème H, et a donc (modulo la conjecture de parité) une infinité de fibres de rang, sur  $k'$ , au moins huit et au moins trois sur  $\mathbb{Q}$ . Le théorème 0.2.3 s'applique aussi à la surface  $E_1$  en donnant la même borne inférieure pour le rang des fibres, i.e :

$$\#\{t \in B_0(k'); r_t \geq r_{k'} + 7 \geq 8\} = \infty$$

et

$$\#\{t \in B_0(\mathbb{Q}); r_t \geq r_{\mathbb{Q}} + 1\} = \infty.$$

Le même type de raisonnement peut être appliqué aux surfaces elliptiques rationnelles définies sur  $\mathbb{Q}$  dont les fibres mauvaises sont de type  $(IV^*, III, I_1)$ . Son rang générique sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  est un. Pour ces surfaces nous trouverons

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); r_t \geq r_{\mathbb{Q}} + 1\} = \infty$$

et sur une extension finie convenable  $k'|k$  :

$$\#\{t \in \mathbb{P}^1(k'); r_t \geq r_{k'} + 5\} = \infty.$$

## 6.2 Base elliptique

Beaucoup moins de résultats ont été démontrés dans ce contexte. L'unique résultat connu [14] traite une conjecture de Lang sur la densité des points  $L$ -rationnels, où  $L$  est une extension du corps de nombres  $k$  où la surface est définie. Dans leur papier [14] Manduchi et Grant démontrent (modulo la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer) que si  $\mathcal{E}$  est une surface elliptique avec base elliptique et invariant  $j$  non constant alors  $\mathcal{E}(L)$  est Zariski dense dans  $\mathcal{E}$ .

Ce résultat ne peut pas être utilisé pour démontrer l'existence d'un nombre infini de fibres avec un rang supérieur au rang générique plus un (deux ou trois) sur  $k$  puisqu'il démontre en réalité l'existence d'un nombre infini de fibres pour lesquelles le signe de l'équation fonctionnelle est négatif sur une extension finie  $L|k$ . Nous pensons que la même méthode démontre qu'il existe une infinité des fibres dont le signe de l'équation fonctionnelle sur une extension finie est positif. Nous l'énoncerons sous la forme de conjecture.

**Conjecture 6.2.1.** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow C$  une surface elliptique non isotriviale telle que  $g(C) = 1$  et  $\#C(k) = \infty$ . Alors  $U_+(k)$  et  $U_-(k)$  sont infinis.*

En combinant ceci avec les résultats démontrés dans le chapitre 2 nous avons les théorèmes suivants :

**Théorème 6.2.2** (modulo la conjecture 6.2.1 et la conjecture de parité). *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique de rang générique  $r$  dans  $\mathcal{R}_0(k)$  telle que son modèle minimal n'est pas isomorphe à une surface de del Pezzo de degré un. Alors l'ensemble*

$$\{t \in B(k); r_t \geq r + 2\}$$

*est infini.*

**Théorème 6.2.3** (modulo la conjecture 6.2.1 et la conjecture de parité). *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow B$  une surface elliptique rationnelle de rang générique  $r$  définie sur un corps de nombres  $k$  qui satisfait les hypothèses du théorème 0.2.8 ou 0.2.9. Alors l'ensemble*

$$\{t \in B(k); r_t \geq r + 3\}$$

*est infini.*

Ce théorème, appliquée aux exemples de Néron et Shioda, fournirait des exemples construits (géométriquement) de familles de surfaces elliptiques rationnelles avec une infinité de fibres de rang supérieur ou égal au rang générique plus quatre. Des exemples de surfaces avec une infinité de fibres de rang supérieur au rang générique plus cinq sont fournis par les constructions (algébriques) de Mestre et Nagao.

# Bibliographie

- [1] Lucian Bădescu. *Algebraic surfaces*. Springer–Verlag, New York, 2001. Translated from the 1991 Romanian edition by Vladimir Mŕsek and revised by the author.
- [2] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [3] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. Avec une sommaire en anglais, Astérisque, No. 54.
- [4] Hervé Billard. Sur la répartition des points rationnels de surfaces elliptiques. *J. Reine Angew. Math.*, 505 :45–71, 1998.
- [5] John Bosma, Wieb Cremona and Catherine Playoust. The magma algebra system. I. the user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3–4) :235–265, 1997.
- [6] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. Masson, Paris, 1982.
- [7] John W.S Cassels and Andrzej Schinzel. Selmer’s conjecture and families of elliptic curves. *Bull. London Math. Soc.*, 14 :345–348, 1982.
- [8] Jean–Louis Colliot–Thélène. L’arithmétique des variétés rationnelles et problèmes bi-rationnels. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol 1,2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 641–653, 1987.
- [9] Jean–Louis Colliot–Thélène. L’arithmétique des variétés rationnelles. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1 :295–336, 1992.
- [10] Noam D. Elkies.  $\mathbb{Z}^{28}$  in  $E(\mathbb{Q})$ . *NODAK- Number Theory web list*, 2006.
- [11] Noam D. Elkies. Three lectures on elliptic surfaces and curves of high rank. *Arxiv*, 2007.
- [12] Stéphane Fermigier. Étude expérimentale du rang de familles de courbes elliptiques sur  $\mathbb{Q}$ . *Experiment. Math.*, 5(2) :119–130, 1996.
- [13] Davide Fusi. Construction of linear pencils of cubic curves with Mordell-Weil rank six and seven. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 55(2) :195–205, 2006.
- [14] Gregory R. Grant and Elisabetta Manduchi. Root numbers and algebraic points on elliptic surfaces with elliptic base. *Duke Math. J.*, 93(3) :479–486, 1998.

- [15] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11), 1960.
- [16] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4), 1961.
- [17] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [18] Harald A. Helfgott. Root number and the parity problem. *PhD Thesis Princeton University*, 2003.
- [19] Harald A. Helfgott. On the behaviour of root numbers in families of elliptic curves. *Arxiv*, 2004.
- [20] Marc Hindry. Autour d’une conjecture de Serge Lang. *Invent. Math.*, 94(3) :575–603, 1988.
- [21] Marc Hindry and Amilcar Pacheco. Sur le rang des jacobiniennes sur un corps de fonctions. *Bull. Soc. Math. France*, 133(2) :275–295, 2005.
- [22] Vasilii A. Iskovskih. Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(1) :19–43, 237, 1979.
- [23] Elisabetta Manduchi. Root numbers of fibers of elliptic surfaces. *Compositio Math.*, 99(1) :33–58, 1995.
- [24] Yuri. I. Manin. Rational surfaces over perfect fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (30) :55–113, 1966.
- [25] Yuri. I. Manin. Rational surfaces over perfect fields. II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) :161–192, 1967.
- [26] Yuri I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [27] Yuri I. Manin and Michael A. Tsfasman. Rational varieties : algebra, geometry, arithmetic. *Uspekhi Mat. Nauk*, 41(2(248)) :43–94, 1986.
- [28] Loic Merel. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Invent. Math.*, 124(1-3) :437–449, 1996.
- [29] Jean-François Mestre. Courbes elliptiques de rang  $\geq 11$  sur  $\mathbf{Q}(t)$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(3) :139–142, 1991.
- [30] Jean-François Mestre. Courbes elliptiques de rang  $\geq 12$  sur  $\mathbf{Q}(t)$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(4) :171–174, 1991.
- [31] Rick Miranda. On the stability of pencils of cubic curves. *Amer. J. Math.*, 102(6) :1177–1202, 1980.
- [32] Rick Miranda. *The basic theory of elliptic surfaces*. Dottorato di Ricerca in Matematica. [Doctorate in Mathematical Research]. ETS Editrice, Pisa, 1989.

- [33] Rick Miranda and Ulf Persson. Torsion groups of elliptic surfaces. *Compositio Math.*, 72(3) :249–267, 1989.
- [34] Koh-ichi Nagao. An example of elliptic curve over  $\mathbf{Q}(T)$  with rank  $\geq 13$ . *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 70(5) :152–153, 1994.
- [35] André Néron. Propriétés arithmétiques de certaines familles de courbes algébriques. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*, pages 481–488. Erven P. Noordhoff N.V., Groningen, 1956.
- [36] Ken-ichi Nishiyama. The Jacobian fibrations on some  $K3$  surfaces and their Mordell-Weil groups. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 22(2) :293–347, 1996.
- [37] Keiji Oguiso and Tetsuji Shioda. The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 40(1) :83–99, 1991.
- [38] Ulf Persson. Configurations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces. *Math. Z.*, 205(1) :1–47, 1990.
- [39] Ilya I. Pjateckiĭ-Šapiro and Igor R. Šafarevič. Torelli’s theorem for algebraic surfaces of type  $K3$ . *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35 :530–572, 1971.
- [40] Kenneth A. Ribet. Kummer theory on extensions of abelian varieties by tori. *Duke Math. J.*, 46(4) :745–761, 1979.
- [41] David Rohrlich. Variation of the root number in families of elliptic curves. *Compositio Math.*, 87(2) :119–151, 1993.
- [42] Michael Rosen and Joseph Silverman. On the rank of an elliptic surface. *Invent. Math.*, 133(1) :43–67, 1998.
- [43] Igor R. Šafarevič and John Tate. The rank of elliptic curves. *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 175 :770–773, 1967.
- [44] Cecília Salgado. Rank of elliptic surfaces and base change. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser I*, 347(3–4) :129–132, 2009.
- [45] Jasper Scholten. Mordell-Weil groups of elliptic surfaces and Galois representations. <http://homes.esat.kuleuven.be/jsholte/thesis.pdf>, 2000.
- [46] Ichiro Shimada. On elliptic  $K3$  surfaces. *Michigan Math. J.*, 47(3) :423–446, 2000.
- [47] Tetsuji Shioda. On the Mordell-Weil lattices. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 39(2) :211–240, 1990.
- [48] Tetsuji Shioda. An infinite family of elliptic curves over  $\mathbf{Q}$  with large rank via Néron’s method. *Invent. Math.*, 106(1) :109–119, 1991.
- [49] Tetsuji Shioda. Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 359–373. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [50] Joseph H. Silverman. Heights and the specialization map for families of abelian varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 342 :197–211, 1983.

- [51] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [52] Michael A. Tsfasman. *Rational points on algebraic curves and surfaces*. PhD thesis, Moscow State University, 1982.
- [53] Maciej Ulas. Rational points on certain del Pezzo surfaces of degree one. *Glasg. Math. J.*, 50 :557–564, 2008.
- [54] Douglas Ulmer. Elliptic curves with large rank over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 155(1) :295–315, 2002.
- [55] Douglas Ulmer. Jacobi sums, Fermat jacobians and rank of abelian varieties over towers of function fields. *Math. Res. Let.*, 14(3) :295–315, 2007.