

## Zeefmethoden en toepassingen

*Begeleider: Jan-Hendrik Evertse*

Zeefmethoden worden op problemen van het volgende type toegepast. Neem een verzameling natuurlijke getallen. Verwijder daaruit die getallen die tot bepaalde voorgeschreven restklassen behoren ('zeef ze er uit') en geef onder- en bovenafschattingen voor het aantal getallen dat overblijft.

Preciezer gezegd, zij  $\mathcal{A}$  een eindige verzameling natuurlijke getallen. Kies voor elk priemgetal  $p$  een (mogelijk lege) deelverzameling  $\mathcal{R}_p$  van  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  en definieer

$$S(\mathcal{A}, z) = \{n \in \mathcal{A} : n \bmod p \notin \mathcal{R}_p \text{ voor elk priemgetal } p \leq z\}.$$

Geef dan onder- en bovenafschattingen voor het aantal getallen in  $S(\mathcal{A}, z)$ .

Zij bijvoorbeeld  $\mathcal{A}$  de verzameling natuurlijke getallen  $\leq x$ , en  $\mathcal{R}_p = \{0 \bmod p\}$ . Dan is  $S(\mathcal{A}, \sqrt{x})$  de verzameling priemgetallen  $\leq x$ . Immers, een getal  $\leq x$  is samengesteld dan en slechts dan als het deelbaar is door een priemgetal  $\leq \sqrt{x}$ . Nemen we  $\mathcal{R}_p = \{0, -2 \bmod p\}$ , dan is  $S(\mathcal{A}, \sqrt{x})$  de verzameling getallen  $n \leq x$  zodat zowel  $n$  als  $n + 2$  priemgetallen zijn. Een open probleem is of er oneindig veel priemgetaltweelingen zijn, dat wil zeggen priemgetallen  $p$  zodat ook  $p + 2$  een priemgetal is. De Noorse wiskunde Viggo Brun bewees in 1918, met een door hem ontwikkelde zeefmethode, dat het aantal priemgetallen  $p \leq x$  zodat  $p + 2$  ook een priemgetal is, ten hoogste  $cx/(\log x)^2$  is, voor zekere constante  $c > 0$ . Vermoed wordt dat dit de goede orde van grootte is voor het aantal priemgetaltweelingen  $\leq x$ . Met Brun's zeefmethode kan wel worden bewezen dat er minstens  $cx/(\log x)^2$  getallen  $n \leq x$  zijn zodat zowel  $n$  als  $n + 2$  door hoogstens 7 verschillende priemgetallen deelbaar zijn.

Een andere (niet-triviale) toepassing van Brun's zeefmethode betreft zogenaamde Goldbach-getallen. Een Goldbach-getal is een even getal dat de som is van twee priemgetallen. Uit Brun's zeefmethode kan worden afgeleid dat het aantal Goldbach-getallen  $\leq x$  ten minste  $cx$  is voor zekere constante  $c > 0$  (en helaas  $< 1/2$ ).

Een bachelor-project zou eruit kunnen bestaan om de zeefmethode van Brun te bestuderen en enkele toepassingen af te leiden. Eventueel zou je ook naar andere zeefmethoden kunnen kijken. De bewijzen vereisen weinig voorkennis, maar het soort argumenten wijkt af van wat je tijdens de colleges hebt gedaan. Het is nuttig als je het college Analytic Number Theory hebt gevolgd, maar niet noodzakelijk. Verder is weinig voorkennis van analyse nodig.