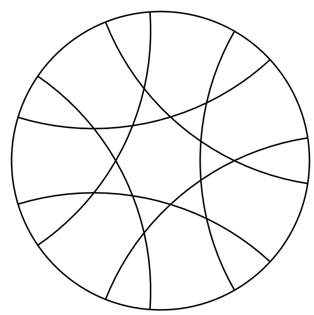
Driehoeksgroepen

We kennen allemaal de vijf regelmatige veelvlakken: tetraëder, kubus, octaëder, dodecaëder en icosaëder. Er zijn geen andere. Door ze te zien als draadmodellen en die vanuit het middelpunt te projecteren op de omschreven bol geven ze regelmatige vlakverdelingen van de bol, dus als regelmatige veelvlakken in de zogenaamde bolmeetkunde, waarin grote cirkels de rol van rechte lijnen overnemen. Iets minder algemeen is bekend dat in de hyperbolische meetkunde er oneindig veel regelmatige veelvlakken zijn. Het hyperbolische vlak is de open eenheidsschijf D, en cirkels die de rand loodrecht snijden vormen er de rechte lijnen. We geven een voorbeeld. Hieronder is een plaatje van een 7-hoek waarvan alle hoeken precies 120 graden zijn, zodat er in elk hoekpunt 3 bij elkaar kunnen komen. Met 24 van deze zevenhoeken kan men dan een regelmatig 24-vlak maken, topologisch een bol met 3 hendels dat bekend is als de kromme van Klein, en als de modulaire kromme $X(7)$. De symmetriegroep is $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)/\{1,-1\}$.



Figuur 1. Regelmatige 7-hoek met hoeken van 120 graden.

Een systematische manier om dit soort regelmatige veelvlakken te bestuderen is door middel van driehoeksgroepen. In bovenstaand voorbeeld deelt men de 7-hoek op in 14 driehoeken, elk met hoeken $\pi/2$, $\pi/3$, en $\pi/7$. De groep voortgebracht door de spiegelingen (in het hyperbolisch vlak) in de zijden van zo'n driehoek heet dan de (2,3,7)-driehoeksgroep $\Delta(2,3,7)$. Het regelmatig 24-vlak ontstaat dan door D uit te delen naar een geschikte ondergroep van $\Delta(2,3,7)$.

Het doel van dit bachelorproject is dit alles goed te begrijpen, ook in het geval het getal 7 wordt vervangen door $n \geqslant 7$, een antwoord te geven op de vraag hoe uniek de zo geconstrueerde regelmatige veelvlakken zijn (zijn er, voor gegeven n, meer met hetzelfde aantal vlakken?), in het geval $n = 7$ de combinatoriek expliciet te beschrijven (kan men bijvoorbeeld de 24 7-hoeken in drie groepen van $8 = 1 + 7$ aan elkaar plakken, zoals $12 = 2(1 + 5)$ in het geval van de dodecaëder?).

Het project kan, als dat gewenst is, in verschillende richtingen worden uitgebouwd: de achterliggende Riemannse meetkunde, Riemann-oppervlakken als complexe ééndimensionale complexe manifolds, de groepentheorie van driehoeksgroepen, algebraïsche meetkunde (compacte Riemann-oppervlakken als complexe algebraïsche krommen, al dan niet gedefiniëerd over getallenlichamen).

Literatuur: http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_group