Hyperoplosbare groepen

Laat G een groep zijn. De groep G heet *oplosbaar* als er voor een of ander niet-negatief geheel getal t een keten ondergroepen

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t = G$$

van G bestaat met de eigenschap dat voor elke $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ de groep G_i een normaaldeler van G_{i+1} is met G_{i+1}/G_i abels. Oplosbaarheid van groepen is een welbekend begrip, dat in de Galoistheorie een belangrijke rol speelt (zie de syllabus *Algebra 3*). Als er zo'n keten bestaat waarvoor elke G_i een normaaldeler van G is met G_{i+1}/G_i cyclisch, dan heet G *hyperoplosbaar*. Dit is een veel minder bekend begrip. Het project bestaat eruit eigenschappen van hyperoplosbare groepen te onderzoeken, met nadruk op het geval van *eindige* groepen.

Hier is een tamelijk concrete vraag. Definieer de ondergroepen $G^{(0)}$, $G^{(1)}$, ... van G inductief door $G^{(0)} = G$ en $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. Dan geldt: G is oplosbaar dan en slechts dan als er een $t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ is met $G^{(t)} = \{1\}$. Is er een vergelijkbare test of een groep hyperoplosbaar is?

Voor een priemgetal p is een *p-groep* een eindige groep waarvan de orde een p-macht is; hier geldt $1 = p^0$ ook als p-macht. Men kan de relatie van eindige hyperoplosbare groepen met p-groepen onderzoeken. Bijvoorbeeld, elke p-groep is hyperoplosbaar, en elke hyperoplosbare groep kan als een herhaald semidirect product van eindig veel p-groepen geschreven worden, waarbij p mag variëren. Men kan zich afvragen welke dergelijke herhaalde semidirecte producten omgekeerd ook hyperoplosbaar zijn.

Stel dat G een eindige groep is die voor elk priemgetal p de volgende eigenschap heeft: voor elke ondergroep H van G die een p-groep is, bestaat er een ondergroep I van G met $H \subset I$ zodanig dat $(I : H)$ niet deelbaar door p is en $(G : H)$ een p-macht is. Is G automatisch hyperoplosbaar?

De voornaamste voorkennis voor dit project bestaat uit Algebra 1, inclusief de stellingen over Sylowgroepen. Verdere voorkennis kan men uit de literatuur opdiepen, zoals uit B. Huppert, *Endliche Gruppen I* (Springer-Verlag, 1967), waarin ook informatie over hyperoplosbare groepen te vinden is (Kapitel VI, §9: *Überauflösbare Gruppen*).

Begeleider: H. W. Lenstra