



NEDERLANDSE  
WISKUNDE  
OLYMPIADE

# Finaletraining Nederlandse Wiskunde Olympiade

Auteurs:  
Birgit van Dalen, Julian Lyczak, Quintijn Puite

Dit trainingsmateriaal is deels gebaseerd op materiaal van de Rijksuniversiteit Groningen, opgesteld door Jan Tuitman (juni 2003) en bewerkt door Wout de Goede (mei 2007) en Wim Berkelmans (Vrije Universiteit Amsterdam, augustus 2007), en materiaal van Hans Sterk (Technische Universiteit Eindhoven). We bedanken alle betrokkenen voor het beschikbaar stellen van hun materiaal.

ISBN: 978-90-357-1823-4  
Versie: 26 januari 2011  
Website: [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

---

Op de website zijn van alle opgaven uitwerkingen te vinden. We raden je wel aan pas na het zelf proberen van een opgave de uitwerking erbij te pakken; dat is namelijk het meest leerzaam.

Er zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk van een opgave. Kijk er dus niet raar van op als de uitwerking op de website verschilt van jouw eigen oplossing.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inductie en priemgetallen</b>	<b>1</b>
1	Bewijzen voor oneindig veel getallen	1
2	Inductie	5
3	Priemgetallen	10
<b>2</b>	<b>Getaltheorie</b>	<b>15</b>
4	Delers	15
5	Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11	20
6	Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud	25
<b>3</b>	<b>Meetkunde</b>	<b>29</b>
7	Hoeken	30
8	Congruentie en gelijkvormigheid	32
9	Driehoeken	36
10	Vierhoeken	41
11	Lijnen in een driehoek	44
<b>4</b>	<b>Bewijsmethoden</b>	<b>51</b>
12	Bewijs uit het ongerijmde	51
13	Extremenprincipe	54
14	Ladenprincipe	57



---

## Katern 1

# Inductie en priemgetallen

---

## 1 Bewijzen voor oneindig veel getallen

Iedereen kent de positieve gehele getallen  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ . Dit noemen we voortaan de **natuurlijke getallen**. (In sommige boeken wordt ook  $0$  als een natuurlijk getal gezien, maar hier doen we dat niet.)

Als we daar  $0$  en de negatieve gehele getallen aan toe voegen, krijgen we de **gehele getallen**:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Wil je  $27$  minimarsjes eerlijk verdelen over  $18$  personen, dan zie je na heel even nadenken dat je iedereen er anderhalf kan geven. Je had ook (zonder nadenken) meteen kunnen zeggen: dan krijgt iedereen er  $\frac{27}{18}$ . Dit is een voorbeeld van een breuk. De **rationale getallen** (of **breuken**) zijn de getallen van de vorm  $\frac{t}{n}$  waarbij  $t$  een geheel getal is en  $n$  een geheel getal dat niet gelijk is aan  $0$ . We noemen  $t$  de **teller** en  $n$  de **noemer**. Een breuk laat zich op meerdere manieren schrijven. Zo is  $\frac{27}{18}$  gelijk aan  $\frac{3}{2}$ .

Alle getallen van de getallenlijn samen vormen de verzameling van de **reële getallen**. Daartoe behoren  $5$ ,  $-3$  en  $\frac{27}{18}$ , maar ook  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[3]{2}$  en  $\pi$ . In Katern 4 zullen we bewijzen dat  $\sqrt{5}$  echt geen breuk is. Het is dus een reëel getal dat niet een rationaal getal is. Dat wordt wel een irrationaal getal genoemd.

Ten slotte nog wat terminologie. Een uitdrukking van de vorm  $a + b$  heet een **som** en is het resultaat van de **optelling** van de **termen**  $a$  en  $b$ . Een uitdrukking van de vorm  $a \cdot b$  (of  $ab$  of  $a \times b$ ) heet een **product** en is het resultaat van de **vermenigvuldiging** van de **factoren**  $a$  en  $b$ .

Nu kunnen we aan de slag!

Als je wilt weten of iets waar is voor *alle* natuurlijke getallen  $n$  (dus voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), kun je ze niet allemaal afgaan: daar zou je oneindig lang mee bezig zijn. We gaan kijken naar methodes waarmee we toch dingen kunnen bewijzen voor alle natuurlijke getallen.

**Voorbeeld 1.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n.$$

**Oplossing** Je kunt een tabelletje maken waarmee we in ieder geval even de eerste paar natuurlijke getallen kunnen controleren.

$n$	$(n + 1)^2$	$(n - 1)^2$	$(n + 1)^2 - (n - 1)^2$	$4n$
1	4	0	4	4
2	9	1	8	8
3	16	4	12	12
4	25	9	16	16
5	36	16	20	20
6	49	25	24	24
7	64	36	28	28

Je ziet dat de getallen in de laatste twee kolommen gelijk zijn. Dus de gelijkheid geldt voor de eerste zeven natuurlijke getallen. En daarmee hebben we precies alles gezegd wat je uit deze tabel kunt concluderen. Het zou fout zijn nu meteen te denken dat het altijd wel waar zal zijn. Niets garandeert ons dat dat zo is; wie weet gaat het voor  $n = 100$  of  $n = 12345$  wel mis (zie ook opgave 30).

Gelukkig kunnen we hier een bewijs geven door de haakjes uit te werken; we werken dan alleen maar met het abstracte getal  $n$ . Dat ziet er zo uit; het volgende is een aaneenschakeling van allemaal =-tekens die stuk voor stuk verklaarbaar zijn door eenvoudige algebraregels.

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - (n - 1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 - n^2 + 2n + 2n + 1 - 1 = 4n\end{aligned}$$

en dit geldt voor elke waarde van  $n$  waarmee we beginnen. (Trouwens, omdat we nergens hebben gebruikt dat  $n$  een natuurlijk getal is, geldt de gelijkheid zelfs voor alle reële getallen.)

Als het verschil van twee kwadraten ons had doen denken aan het merkwaardig product  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , hadden we ook de volgende uitwerking kunnen verzinnen:

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - (n - 1)^2 &= ((n + 1) + (n - 1))((n + 1) - (n - 1)) \\ &= (2n) \cdot (2) = 4n.\end{aligned}$$

Zoals je ziet, zijn er vaak meerdere manieren om iets te bewijzen. □

**Voorbeeld 2.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 4) + (3n + 7) = \frac{1}{2}(n + 2)(3n + 11).$$

**Oplossing** Ook hier maken we weer een tabelletje bij. Zoals je inmiddels weet, is dat nog geen bewijs, maar het laat in elk geval even zien wat er met de stippeltjes links gebeurt. We zien bijvoorbeeld dat er bij elke volgende waarde van  $n$  een extra term aan de linkerkant bij komt. Dit is ook best logisch: als  $n$  met 1 toeneemt, dan neemt  $3n + 7$  met 3 toe, en dat is dus de volgende term in onze rij 4, 7, 10, ...

$n$	$4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 4) + (3n + 7)$	en dat is	$\frac{1}{2}(n + 2)(3n + 11)$	en dat is
1	$4 + 7 + 10$	21	$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14$	21
2	$4 + 7 + 10 + 13$	34	$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 17$	34
3	$4 + 7 + 10 + 13 + 16$	50	$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20$	50
4	$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$	69	$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 23$	69
5	$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$	91	$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 26$	91

We zien weer dat de gewenste kolommen gelijk zijn, maar hier kunnen we nog niet uit concluderen dat de gelijkheid voor alle  $n$  geldt. Er is wel een manier waarop we dit kunnen bewijzen.

Laten we voor een vaste waarde van  $n$  eens kijken naar de linkerkant van de gelijkheid die we moeten bewijzen. We noemen deze linkerkant even  $S$ , dus

$$S = 4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 4) + (3n + 7).$$

Uit hoeveel termen bestaat  $S$  eigenlijk? Dat hangt natuurlijk van  $n$  af. We kunnen even in de tabel spieken; dan zien we dat op regel  $n$  de som uit  $n + 2$  termen bestaat. Dit is een prima redenering; we wisten immers al dat er elke keer één term bij komt.

Een andere manier om dit te zien is als volgt: de eerste term is 4, de tweede 7, etc. Omdat er steeds 3 bijkomt is de  $k$ -de term dus  $3k + 1$ ; immers  $3 \cdot 1 + 1 = 4$ ;  $3 \cdot 2 + 1 = 7$ , etc. De hoeveelste term is nou  $3n + 7$ ? Uit  $3k + 1 = 3n + 7$  volgt dat  $k = n + 2$ , dus  $3n + 7$  is de  $(n + 2)$ -de term. Het zijn dus  $n + 2$  termen.

We tellen deze som  $S$  bij zichzelf op, maar schrijven de tweede keer de termen in omgekeerde volgorde:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 1^e & & 2^e & & (n + 1)^{ste} & & (n + 2)^{de} \\
 S & = & 4 & + & 7 & + & \dots & + & (3n + 4) & + & (3n + 7) \\
 S & = & (3n + 7) & + & (3n + 4) & + & \dots & + & 7 & + & 4 \\
 \hline
 2S & = & (3n + 11) & + & (3n + 11) & + & \dots & + & (3n + 11) & + & (3n + 11)
 \end{array}$$

Daar staan onder de streep  $n + 2$  termen  $(3n + 11)$ , dus  $2S = (n + 2)(3n + 11)$ , dus  $S = \frac{1}{2}(n + 2)(3n + 11)$ ; klaar!  $\square$

Het was blijkbaar slim op de som bij zichzelf op te tellen. Niemand verplicht ons dat te doen, maar blijkbaar werkte dat! En zo is het meestal met bewijzen. Je moet zelf het slimmigheidje bedenken dat toevallig net werkt.

Merk trouwens op dat het feitelijke bewijs hierboven (van ‘Laten we...’ tot ‘klaar!’) uit vooral heel veel woorden bestaat. Soms denken mensen dat een wiskundig bewijs alleen uit symbolen mag bestaan, maar niets is minder waar: Als je wilt uitleggen wat je aan het doen bent, heb je toch echt woorden nodig!

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een **rekenkundige rij**: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante verschillen (in dit geval was dat steeds 3). De beroemde wiskunde Gauss moest als jongetje van 10 ooit eens de getallen 1 tot en met 100 optellen. Hij wist op deze manier binnen een paar seconden het antwoord. Weet jij dat ook?

**Voorbeeld 3.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

**Oplossing** Ook hier maken we weer een tabelletje bij.

$n$	$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$	en dat is	$2^n - 1$	en dat is
1	1	1	$2^1 - 1$	1
2	1 + 2	3	$2^2 - 1$	3
3	1 + 2 + 4	7	$2^3 - 1$	7
4	1 + 2 + 4 + 8	15	$2^4 - 1$	15
5	1 + 2 + 4 + 8 + 16	31	$2^5 - 1$	31
6	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32	63	$2^6 - 1$	63
7	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64	127	$2^7 - 1$	127

We zien weer dat de gewenste kolommen gelijk zijn, maar hier kunnen we nog niet uit concluderen dat de gelijkheid voor alle  $n$  geldt. Ook hier is er wel een manier waarop we dit kunnen bewijzen.

Laten we voor een vaste waarde van  $n$  eens kijken naar het linkerlid. We noemen dat linkerlid weer even  $S$ , dus

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}.$$

Dan geldt — als we alles met 2 vermenigvuldigen — dat

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n.$$

Als we deze twee uitdrukkingen nu van elkaar aftrekken, vinden we dat

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
2S & = & & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & & \\
\hline
2S - S & = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & 0 & + & 2^n
\end{array}$$

Dus  $S = 2^n - 1$ . □

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een **meetkundige rij**: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante factor verschillen. In dit geval was die constante factor 2. Het was blijkbaar slim om te kijken naar de waarde van  $2S$  zodat alle termen ‘een plekje doorschuiven’.

**Opgave 1.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

(a)  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ .

(b)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

**Opgave 2.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

**Opgave 3.** *Van de 9 vakjes van een  $(3 \times 3)$ -bord kunnen we op verschillende manieren rechthoeken vormen. Allereerst zijn er de 9  $(1 \times 1)$ -vierkantjes, de 4  $(2 \times 2)$ -vierkantjes en het  $(3 \times 3)$ -vierkant zelf. Daarnaast zijn er nog de volgende rechthoeken te maken: 6  $(1 \times 2)$  en 6  $(2 \times 1)$ ; 3  $(1 \times 3)$  en 3  $(3 \times 1)$ ; 2  $(2 \times 3)$  en 2  $(3 \times 2)$ . Dat zijn er in totaal 36. Hoeveel rechthoeken bevat een  $(8 \times 8)$ -bord?*

**Opgave 4. Finale 2005** *Voor vijf verschillende reële getallen  $a_1, a_2, a_3, a_4$  en  $a_5$  kijken we naar de waarden die de som  $a_i + a_j$  kan aannemen wanneer  $i$  en  $j$  variëren over  $1 \leq i < j \leq 5$ . Het aantal verschillende waarden dat de som  $a_i + a_j$  kan aannemen noemen we  $m$ . Bepaal de kleinst mogelijke waarde van  $m$ .*

## 2 Inductie

We bekijken nog een keer voorbeeld 3. Die kunnen we namelijk ook heel anders oplossen.

**Voorbeeld 4.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

**Oplossing** Laten we nog eens kijken in de tabel bij  $n = 5$ . We zien dat de gelijkheid daar klopt, dat wil zeggen  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1$ . Als we dat eenmaal weten is het meteen

duidelijk dat het bij  $n = 6$  ook klopt: tel er maar aan beide kanten 32 bij op, dan krijg je  $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 32 = 32 + 32 - 1 = 64 - 1$  en dat is precies wat we bij  $n = 6$  wilden bewijzen. En als we bij deze gelijkheid aan beide kanten 64 optellen, komen we uit op de bewering voor  $n = 7$ :  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 64 + 64 - 1 = 128 - 1$ .

Wat gebeurt hier nu precies? Laten we de  $n = 5$  uit bovenstaand voorbeeld nu even  $n = k$  noemen, waarbij  $k$  een willekeurig natuurlijk getal is. Stel dat je al weet dat  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ . Dan mogen we daar aan beide kanten  $2^k$  bij optellen. Dan krijg je  $(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k = 2^k + 2^k - 1$ . Maar  $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ , dus hier staat nu  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$ . En dat is precies de bewering voor  $n$  'eentje hoger', oftewel, voor  $n = k + 1$ . We hebben in de voorgaande zinnen dus bewezen dat als de gelijkheid geldt voor  $n = k$ , hij dan ook geldt voor  $n = k + 1$ . Kortom, als hij geldt voor  $n = 1$ , dan ook voor  $n = 2$ , en dan automatisch ook voor  $n = 3$ , en dan ook voor  $n = 4$ , etc. We hoeven dus nog maar één ding te laten zien: dat hij ook daadwerkelijk geldt voor  $n = 1$ . Maar dat is in dit geval simpel: vul maar in  $n = 1$  en kijk of het klopt (of kijk naar de tabel).  $\square$

Deze uitwerking is een voorbeeld van een inductief bewijs: Als we een gelijkheid bewijzen voor  $n = 1$  en als we er bovendien in slagen om uit de gelijkheid voor  $n = k$  diezelfde gelijkheid voor  $n = k + 1$  af te leiden, dan moet het wel zo zijn dat de gelijkheid voor alle  $n$  geldt. Deze redenering heet met een deftig woord: *volledige inductie* of *inductie* naar  $n$ . De tijdelijke aanname dat de gelijkheid geldt voor  $n = k$  (om daaruit af te leiden dat hij ook geldt voor  $n = k + 1$ ) heet de *inductiehypothese* en wordt soms genoteerd als IH.

Je zou dit kunnen vergelijken met een rij dominosteentjes op dominoday. Als je steentje 1 omver duwt, valt steentje 2 ook om. En daarom ook steentje 3. En daarom ook steentje 4. De bouwers hebben ervoor gezorgd dat als een willekeurig steentje omvalt, hij de volgende ook omver duwt. Dat is dus de stap van  $n = k$  naar  $n = k + 1$ , zeg maar de doorgeefstap. Om het geheel in beweging te zetten hoeven we alleen nog maar een duwtje tegen dominosteen  $n = 1$  te geven, dan valt wegens de doorgeefstap ook steentje  $n = 2$ , dus wegens de volgende doorgeefstap ook steentje  $n = 3$ , et cetera. In de wiskunde noemen we de doorgeefstap normaliter de *inductiestap*; het eerste zetje heet juist de *inductiebasis*. Dat eerste zetje hoeft trouwens niet  $n = 1$  te zijn, maar kan bijvoorbeeld ook  $n = 0$  zijn of  $n = 4$  (zoals in Voorbeeld 6).

In het bewijs hierboven werkte het om er links en rechts  $2^k$  bij op te tellen. Maar soms moet je hele andere dingen doen om uit de veronderstelling dat de gelijkheid geldt voor  $n = k$  af te kunnen leiden dat hij ook geldt voor  $n = k + 1$ . Het zou ook kunnen dat je er links en rechts juist iets moet afhalen, of dat je links en rechts alles met factor 10 moet vermenigvuldigen, of dat je links en rechts het kwadraat moet nemen, of  $\dots$ . Om te oefenen, kijken we nog eens naar opgave 2. Probeer hem nu eens met inductie!

**Opgave 5.** *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Vaak kun je door inductie een intuïtief idee hard maken. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar opgave 1. Voor  $n = 3$  staat daar  $1 + 3 + 5 = 3^2$  en dat zouden we ons kunnen voorstellen als 1 en 3 en 5 knikkers die samen in een  $3 \times 3$ -vierkant liggen. Het is ‘logisch’ dat als we nu 7 knikkers toevoegen, we een  $4 \times 4$ -vierkant verkrijgen. En zo alsmaar verder. Om dit laatste zinnetje ‘en zo alsmaar verder’ wiskundig te verantwoorden, gebruiken we inductie. Zie het volgende voorbeeld.

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	7	7	7	⋯
5	5	5	7	⋯
3	3	5	7	⋯
1	3	5	7	⋯

**Voorbeeld 5.** *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

**Oplossing** We gaan deze opgave dus nu met inductie doen.

(Inductiebasis) We kijken eerst maar eens of het voor  $n = 1$  geldt. Dan staat er links de som van 1 tot en met 1 en daarmee wordt dus alleen het getal 1 bedoeld. Rechts staat dan  $1^2$  en dat is ook 1. Dus dan geldt de gelijkheid. We zouden het nu ook even voor een paar andere waarden kunnen uitrekenen en vergelijken maar voor ons bewijs met inductie hebben we aan een duwtje genoeg.

(Inductiestap) Stel dat het voor zekere  $n = k \geq 1$  geldt, dus stel dat  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ . Hoe kunnen we dit gebruiken als we willen bewijzen dat het ook voor  $n = k + 1$  geldt, oftewel dat  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ ? Aan de linkerkant is er dan een term  $(2k + 1)$  bijgekomen dus laten we dat rechts ook maar doen. Dan volgt uit  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$  dat  $(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$ . Maar dat laatste is op zijn beurt weer  $(k + 1)^2$ . We concluderen dat dan dus blijkbaar geldt dat  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ , precies wat we wilden bewijzen. ‘Met inductie’ concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt.  $\square$

**Opgave 6.** *Aan een schaaktoernooi doen  $n \geq 2$  spelers mee. Elke twee spelers spelen precies één keer tegen elkaar. Bewijs met inductie dat er in totaal  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  wedstrijden gespeeld worden.*

De volgende opgaven zijn meteen al best pittige toepassingen van inductie. Onze tip is: kijk goed wat er in het linkerlid voor term bij komt bij elke volgende waarde van  $n$ . En nog een heel nuttige tip: werk zo min mogelijk haakjes uit aan de rechterkant maar werk met gemeenschappelijke factoren. Als je bijvoorbeeld in je berekening stuit op  $n(n + 5) + 3(n + 5)$  zou je de haakjes kunnen gaan uitwerken, maar het is vaak veel gemakkelijker om de gemeenschappelijk factor  $(n + 5)$  buiten haakjes te halen en dit te

herschrijven tot  $(n+3)(n+5)$ . Dat kan aanzienlijk schelen in het rekenwerk, dus we geven het graag als tip bij de volgende opgaven mee.

Bovendien zie je nu niet meer ‘met inductie’ in de opgave staan; dat was net om te oefenen nog wel zo, maar vanaf nu bepaal jij bij het uitwerken wel of je het met inductie gaat doen of niet. Hieronder is de tip natuurlijk om het wel met inductie te proberen, maar bij geen enkele olympiade opgave zul je worden verplicht om het per se met inductie aan te pakken. Als je het wel met inductie doet, vermeld dat dan en splits je uitwerking op in een inductiebasis en een inductiestap.

**Opgave 7.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + n \cdot (n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5).$$

**Opgave 8.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat*

$$0 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 0 = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1).$$

Het hoeven niet altijd gelijkheden te zijn die we kunnen bewijzen met inductie. Ook andere beweringen dan ‘iets is gelijk aan iets anders’ kun je soms met inductie bewijzen. Bijvoorbeeld: ‘iets is kleiner dan iets anders’; ‘iets is deelbaar door iets anders’, etc. Hier twee voorbeelden.

**Voorbeeld 6.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n \geq 4$  geldt dat  $2^n + 5 > 5n$ .*

**Oplossing** Een tabel komt al erg overtuigend over; de linkerkant groeit nou eenmaal veel harder (exponentieel) dan de rechterkant (lineair). Toch moeten we het wiskundig nog netjes bewijzen. We doen dat met inductie naar  $n$ . Omdat we het pas hoeven te bewijzen vanaf  $n = 4$  beginnen we daar.

(Inductiebasis) Voor  $n = 4$  geldt  $2^n + 5 = 21$  en  $5 \cdot n = 20$ , dus dan klopt het.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere  $n = k \geq 4$ . Er geldt dan dus sowieso dat  $2^k + 5 > 5k$ . Bovendien geldt er, wegens  $k \geq 4$ , dat  $2^k \geq 2^4 = 16 > 5$ . Als we dat nou combineren vinden we dat

$$2^{k+1} + 5 = 2 \cdot 2^k + 5 = (2^k + 5) + 2^k > 5k + 2^k > 5k + 5 = 5(k+1).$$

Maar daar staat precies onze bewering voor  $n = k+1$ . We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen  $n$  vanaf de 4 geldt.  $\square$

**Voorbeeld 7.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat  $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$  deelbaar is door 11 (dat wil zeggen: een 11-voud is).*

**Oplossing** We maken eerst maar eens een tabel:

$n$	$3^{3n+1}$	$7 \cdot 5^{n-1}$	$3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$	deelbaar door 11?
1	81	7	88	ja, nl. $11 \cdot 8$
2	2187	35	2222	ja, nl. $11 \cdot 202$
3	59049	175	59224	ja, nl. $11 \cdot 5384$
4	1594323	875	1595198	ja, nl. $11 \cdot 145018$
5	43046721	4375	43051096	ja, nl. $11 \cdot 3913736$
6	1162261467	21875	1162283342	ja, nl. $11 \cdot 105662122$
7	31381059609	109375	31381168984	ja, nl. $11 \cdot 2852833544$

Het lijkt te kloppen. Toch zien we niet direct een factor 11 terug in de schrijfwijze  $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$  (zoals we wel zouden hebben gezien in bijvoorbeeld  $33n + 55n^2$ ; dat is  $11 \cdot (3n + 5n^2)$ ). Laten we eens kijken of we de inductiestap kunnen maken.

De inductiehypothese luidt dan: stel  $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1}$  is een 11-voud. Dan kun je dat dus schrijven als  $11 \cdot c$  voor zekere gehele  $c$ , dus  $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1} = 11c$ . Wat betekent dit nu voor de volgende waarde? Voor  $n = k + 1$  komt er te staan  $3^{3(k+1)+1} + 7 \cdot 5^{(k+1)-1}$  en dat is wegens de regels voor de machten hetzelfde als

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot 7 \cdot 5^{k-1}.$$

Wegens de inductiehypothese geldt  $7 \cdot 5^{k-1} = 11c - 3^{3k+1}$  en als we dat hierin invullen krijgen we

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot (11c - 3^{3k+1}) = 22 \cdot 3^{3k+1} + 55c = 11 \cdot (2 \cdot 3^{3k+1} + 5c)$$

en dat is duidelijk een 11-voud. Omdat de bewering bovendien geldt voor  $n = 1$  (zie tabel), geldt hij wegens inductie dus voor alle natuurlijke getallen  $n$ .  $\square$

**Opgave 9.** *Bewijs dat  $2 \cdot 3^n > 7n + 3$  voor alle gehele getallen  $n \geq 2$ .*

**Opgave 10.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  geldt dat  $7^n + 3^{n+1}$  deelbaar is door 4.*

**Opgave 11.** *Voor een rij natuurlijke getallen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  geldt*

- $a_1 = 1$ ,
- $a_2 = 2$ ,
- $a_{n+2} = a_n^2 + 2a_{n+1}$  voor  $n \geq 1$ .

*Bewijs dat  $a_{2n+1}$  oneven is voor alle gehele getallen  $n \geq 0$ .*

**Opgave 12.** *Een aantal steden is verbonden door éénrichtingsverkeerwegen. Tussen elk tweetal steden loopt een directe weg (de ene kant op of de andere kant op). Bewijs dat er een stad is die te bereiken is vanuit alle andere steden (eventueel via andere steden).*

**Opgave 13.** Voor een rij reële getallen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  geldt  $x_1 > \frac{1}{2}$  en

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}.$$

Bewijs dat voor alle natuurlijke  $n$  geldt  $x_n > \frac{1}{2}$ .

**Opgave 14. Finale 1984** Voor  $n = 1, 2, 3, \dots$  wordt  $a_n$  gedefiniëerd door:

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n - 1)}.$$

Bewijs dat voor elke  $n$  geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

**Opgave 15. Finale 1986** Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen  $n$  geldt dat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

**Opgave 16. Finale 1990** Bewijs dat voor alle gehele  $n > 1$  geldt:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) < n^n.$$

**Opgave 17. Finale 2007** Bestaat er een getal van de vorm  $444 \dots 4443$  (allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.

### 3 Priemgetallen

De **delers** van een geheel getal, bijvoorbeeld 50, zijn de gehele getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de delers van 50 zijn 1, 2, 5, 10, 25, 50 en ook  $-1, -2, -5, -10, -25, -50$ . In dit hoofdstuk bekijken we alleen positieve delers. Sommige natuurlijke getallen hebben heel veel delers, sommige maar heel weinig. Hier een tabel van de eerste tien natuurlijke getallen en al hun positieve delers:

$n$	de positieve delers van $n$	
1	1	—
2	1, 2	priem
3	1, 3	priem
4	1, 2, 4	samengesteld
5	1, 5	priem
6	1, 2, 3, 6	samengesteld
7	1, 7	priem
8	1, 2, 4, 8	samengesteld
9	1, 3, 9	samengesteld
10	1, 2, 5, 10	samengesteld

Alle natuurlijke getallen zijn in ieder geval deelbaar door 1 en door zichzelf. De natuurlijke getallen groter dan 1 die als positieve delers *alleen* 1 en zichzelf hebben, heten *priemgetallen*. Een natuurlijk getal dat nog meer positieve delers heeft (dan 1 en zichzelf), heet *samengesteld*. Volgens afspraak valt 1 buiten de boot; hij is noch priem noch samengesteld.

In termen van delers kunnen we dus zeggen dat de priemgetallen precies de natuurlijke getallen zijn met exact twee positieve delers, en dat de samengestelde getallen precies de natuurlijke getallen zijn met meer dan twee positieve delers. Het getal 1 is het enige natuurlijke getal met maar één positieve deler.

**Opgave 18. (a)** Laat van de volgende getallen zonder rekenmachine zien dat het geen priemgetallen zijn: 2008; 12345678; 12345; 489489;  $137^2 - 135^2$  (zie ook voorbeeld 1).

**(b)** Hoeveel even priemgetallen zijn er? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door 17? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door 25?

**Voorbeeld 8.** Ga na voor welke natuurlijke getallen  $n$  het getal  $4^n - 1$  priem is.

**Oplossing** Voor een gegeven natuurlijk getal  $n$  kunnen we  $4^n - 1$  ontbinden in factoren:  $4^n - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$ . We zouden nu wellicht in de verleiding kunnen komen om te zeggen dat  $4^n - 1$  altijd samengesteld is. Toch zit hier een addertje onder het gras: een van de factoren zou 1 kunnen zijn. En laat dat nou net bij  $n = 1$  het geval zijn. De conclusie luidt dat  $4^n - 1$  voor alle gehele getallen  $n \geq 2$  een samengesteld getal is, maar voor  $n = 1$  priem.  $\square$

**Opgave 19.** Ga na voor welke paren natuurlijke getallen  $(m, n)$  het getal  $m^2 - n^2$  priem is.

**Opgave 20.** Er zijn 25 priemgetallen onder de 100. Vind ze door in onderstaande tabel eerst alle veelvouden van 2 weg te strepen (behalve 2 zelf natuurlijk), dan alle veelvouden van 3 die er nog staan ook weg te strepen, enzovoorts.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Als we 5 opeenvolgende gehele getallen opschrijven, zoals 17, 18, 19, 20, 21, is het logisch dat er één van die getallen deelbaar is door 5. Hier kunnen we zelfs precies zeggen welke:

het getal 20. Maar als we voor gegeven  $n$  kijken naar  $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ , ook dan weten we nog zeker dat één van deze getallen wel een 5-voud moet zijn. Overtuig jezelf ervan dat dan bijvoorbeeld  $n + 20, n + 16, n + 12, n + 8, n + 4$  ook precies één vijfvoud bezit; het enige dat we hebben gedaan is overal een vijfvoud bij opgeteld. Deze techniek kan van pas komen bij de volgende opgaven.

**Opgave 21.** (a) *Vind alle priemgetallen  $p$  waarvoor  $p + 1$  ook een priemgetal is.*  
 (b) *Vind alle priemgetallen  $p$  waarvoor  $p + 2$  en  $p + 4$  ook priemgetallen zijn.*

**Opgave 22.** *Bewijs dat  $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  voor alle natuurlijke getallen  $n$  een geheel getal is.*

Elk natuurlijk getal groter dan 1 is op een unieke manier te schrijven als product van priemgetallen<sup>1</sup>. Dat noemen we de *priemontbinding* van  $n$ . (Daarbij beschouwen we verschillende volgordes van dezelfde priemfactoren als hetzelfde:  $6 = 2 \cdot 3$  en  $6 = 3 \cdot 2$  stellen dezelfde priemontbinding voor van 6 en dit is dus de unieke priemontbinding van 6.) Zo is bijvoorbeeld  $4200 = 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ . Het zal vaak handig blijken om ook het getal 1 een unieke priemontbinding te geven, namelijk het product van nul priemgetallen (het lege product).

Voor het gemak kijken we in de volgende opgave naar een getal  $n$  met alleen maar een paar kleine priemfactoren. Het is namelijk gegeven dat we  $n$  kunnen schrijven als

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f,$$

waarbij de  $a, b, c, d, e$  en  $f$  gehele exponenten groter dan of gelijk aan 0 zijn. Als alle exponenten nul zijn, leidt het tot het getal  $n = 1$ . Uitgaande van deze priemontbinding van  $n$ , blijken we van heel wat andere getallen ook de priemontbinding te kunnen geven.

**Opgave 23.** *Veronderstel dat  $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$ .*

- (a) *Geef de priemfactorontbinding van  $10n$ .*  
 (b) *Geef de priemfactorontbinding van  $15!n$  ( $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ).*  
 (c) *Geef de priemfactorontbinding van  $n^2$ .*  
 (d) *Geef de priemfactorontbinding van  $(7n)^8$ .*

**Opgave 24. Finale 2007** *Bepaal het aantal gehele getallen  $a$  met  $1 \leq a \leq 100$  zodat  $a^a$  het kwadraat van een geheel getal is. (Beredeneer dat je ze allemaal hebt geteld.)*

**Opgave 25. Finale 1971** *Voor ieder natuurlijk getal  $m$  definiëren we  $a(m)$  als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele  $n$  definiëren we  $S(n)$  door:*

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n).$$

*Druk  $S(n)$  uit in  $n$ .*

---

<sup>1</sup>Dit heet formeel de Hoofdstelling van de Rekenkunde. Het voert te ver om deze stelling hier te bewijzen.

Als een natuurlijk getal een 3-voud is, weten we dat het van de vorm  $3k$  is voor zekere gehele  $k$  en dat het dus de priemfactor 3 moet bevatten (ten minste één maal). Omgekeerd zijn natuurlijk alle getallen die priemfactor 3 bevatten een 3-voud. De positieve 3-vouden zijn dus *precies* de natuurlijke getallen waarbij priemfactor 3 in hun priemontbinding voorkomt. Een zelfde redenering leidt — wegens  $50 = 2 \cdot 5^2$  — tot de constatering dat de positieve 50-vouden precies de natuurlijke getallen zijn die priemfactor 2 bevatten (ten minste één keer) en die priemfactor 5 maar liefst (ten minste) 2 keer bevatten. Als je op net zo'n manier naar 6-vouden, 8-vouden, 30-vouden, ... kijkt, kom je vast wel uit de volgende oefenopgave.

Bij de vraag of de bewering ook andersom geldt, kun je het óf proberen te bewijzen, óf door middel van een tegenvoorbeeldje laten zien dat het niet zo is. Hoe werkt dat, een **tegenvoorbeeldje**? Iemand beweert bijvoorbeeld dat alle veelvouden van 15 ook deelbaar zijn door 6. Jij vindt van niet en overtuigt hem met een tegenvoorbeeld: “Kijk maar naar het getal 45, dat is wel een veelvoud van 15 (namelijk  $3 \cdot 15$ ) maar het zit niet in de tafel van 6 ( $45 = 7\frac{1}{2} \cdot 6$ ).” Bij tegenvoorbeelden gaat het erom om er één te vinden waarvoor de bewering niet klopt. Hier is dat dus het geval met 45, maar je had ook 15 zelf of 75 ofzo kunnen kiezen. Maar je had niet 60 kunnen kiezen; dat is namelijk toevallig een getal waarvoor de bewering wel klopt: het is een veelvoud van 15 en (toevallig) ook een veelvoud van 6.

- Opgave 26.** (a) *Als een geheel getal deelbaar is door 6, is het zeker deelbaar door 2 en ook zeker deelbaar door 3. Geldt dit ook andersom?*  
 (b) *Als een geheel getal deelbaar is door 8, is het zeker deelbaar door 2 en ook zeker deelbaar door 4. Geldt dit ook andersom?*  
 (c) *Als een geheel getal deelbaar is door 30, is het zeker deelbaar door 6 en ook zeker deelbaar door 15. Geldt dit ook andersom?*

We hebben in het begin van dit hoofdstuk gekeken naar de positieve delers van de getallen 1 tot en met 10. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de positieve delers van 50. Dat zijn precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de positieve delers van 50 zijn 1, 2, 5, 10, 25, 50. Maar hebben deze delers nog iets met de priemfactorontbinding van 50 (als  $2^1 \cdot 5^2$ ) te maken?

Laten we eens kijken naar zo'n positieve deler van 50, zeg  $d$ . Omdat het een deler is, moet er dus een natuurlijk getal  $k$  zijn (in feite ook weer een deler) zodat  $d \cdot k = 50$ . Als we nu van  $d$  de priemfactorontbinding weten, zijn we al een eind op weg met het opschrijven van de priemfactorontbinding van 50. Immers, alle priemfactoren van  $d$  zitten ook in 50. Zo'n deler moet dus wel van de vorm  $2^x \cdot 5^y$  zijn, waarbij  $x$  gelijk aan 0 of 1 is en waarbij  $y$  gelijk aan 0, 1 of 2 mag zijn. (Daarbij correspondeert de deler 1 met de schrijfwijze  $2^0 \cdot 5^0$ .) Omgekeerd is elk getal van deze vorm overduidelijk ook een deler van 50. Dus alle positieve delers van 50 zijn precies alle getallen van deze vorm! Voor  $x$  zijn er daarbij 2 opties en voor  $y$  zijn er 3 opties. Het is dus best logisch dat het getal 50 precies  $2 \times 3 = 6$  positieve delers heeft.

**Opgave 27.** Welk getal heeft meer positieve delers:  $6^9$  of  $97^{97}$ ?

**Opgave 28.** Veronderstel dat  $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$ . Hoeveel positieve delers heeft  $n$ ?

**Opgave 29.** Bewijs dat voor elk natuurlijk getal  $n$  geldt dat  $n^2$  een oneven aantal positieve delers heeft.

In de volgende opgaven kun je de technieken uit dit hoofdstuk verder toepassen.

**Opgave 30.** Bekijk de eerste 7 waarden van de functie  $f(n) = 41 + n(1 + n)$  (dus vul in  $n = 1, \dots, 7$ ). Ga na dat er steeds een priemgetal uit komt. Hoe zit dat vanaf  $n = 8$ ? Kun je concluderen dat er voor alle natuurlijke getallen  $n$  een priemgetal uit komt?

**Opgave 31.** Bewijs dat er 100 opeenvolgende natuurlijke getallen zijn die allemaal samengesteld zijn.

**Opgave 32.** Laat  $p$  en  $q$  priemgetallen zijn met  $p > 3$  en  $q = p + 2$ . Bewijs dat  $p + q$  deelbaar is door 12.

---

## Katern 2

# Getaltheorie

---

## 4 Delers

In Katern 1 heb je geleerd wat een *deler* van een getal is. Zo zijn bijvoorbeeld 1, 2, 5, 10, 25, 50,  $-1$ ,  $-2$ ,  $-5$ ,  $-10$ ,  $-25$  en  $-50$  de delers van het getal 50: precies de gehele getallen waar 50 deelbaar door is (dat wil zeggen: zodat er een geheel getal uitkomt). Kortom: het getal  $n$  is deelbaar door het gehele getal  $a$  precies dan als er een geheel getal  $b$  is zo dat geldt  $ab = n$ . In dat geval is  $b$  trouwens ook een deler van  $n$ .

Het getal  $n$  hoeft niet per se positief te zijn. We kunnen hetzelfde zeggen voor een negatief geheel getal  $n$  en zelfs voor  $n = 0$ . De delers van  $-9$  zijn dus de gehele getallen 1, 3, 9,  $-1$ ,  $-3$  en  $-9$ , wat precies ook de delers van 9 zijn.

Hoe zit dat nu met  $n = 0$ ? De delers van 0 zijn precies de gehele getallen  $a$  waarvoor er een  $b$  is met  $ab = 0$ . Maar dit is waar voor alle gehele getallen  $a$ : neem maar  $b = 0$ . De delers van 0 zijn dus alle gehele getallen. Maar we spreken liever af dat 0 zelf geen deler is van 0. Je weet immers niet wat de uitkomst is van  $\frac{0}{0}$ .

We zetten nog even wat voorbeelden op een rijtje.

4 is een deler van 12	want $4 \cdot 3 = 12$ ,
$-11$ is een deler van 33	want $(-11) \cdot (-3) = 33$ ,
6 is een deler van $-6$	want $6 \cdot (-1) = -6$ ,
13 is een deler van 0	want $13 \cdot 0 = 0$ .

De *priemdelers* of *priemfactoren* van een natuurlijk getal  $n$  zijn die delers die ook een priemgetal zijn. Zo zijn 2 en 5 bijvoorbeeld de priemdelers van 50. Deze priemdelers kom

je ook weer tegen in de priemfactorisatie. In katern 1 hadden we gezien dat elk getal een unieke priemontbinding heeft. De priemontbinding van bijvoorbeeld 50 is  $50 = 2^1 \cdot 5^2$ . Daarin komt de priemdeler 5 twee keer voor (en de priemdeler 2 één keer).

Stel dat  $a$  een deler is van  $n$ . Kunnen we nu een veelvoud van  $n$ , zeg  $kn$ , ook delen door  $a$ ? Anders gezegd: is  $a$  ook een deler van  $kn$ ? Ja, want er geldt  $kn = kab = (kb)a$ , dus als we  $kn$  delen door  $a$ , dan krijgen we  $kb$  en dat is weer geheel.

**Rekenregel 1.** *Als  $a$  een deler is van  $n$ , dan is  $a$  een deler van  $kn$  voor alle gehele getallen  $k$ .*

Nu draaien we het om. Stel dat  $a$  een positieve deler is van  $kn$ . Is dan  $a$  ook een deler van  $n$ ? En van  $k$ ? Of misschien van één van beide? Het antwoord op deze vragen hangt er vanaf of  $a$  een priemgetal is of niet. Neem als voorbeeld even  $a = 6$ . Dat is geen priemgetal, want  $6 = 2 \cdot 3$ . Als we  $k = 4$  en  $n = 15$  hebben, dan is  $kn = 60$  en dat is deelbaar door 6. Maar 6 is geen deler van 4 en ook niet van 15. Dat komt omdat we 6 kunnen splitsen: de priemfactor 2 van 6 zit in 4, maar niet in 15; en de priemfactor 3 van 6 zit niet in 4, maar juist wel in 15. Daardoor komt het dat 4 en 15 niet deelbaar zijn door 6, maar hun product wel.

Als  $a$  een priemgetal is, dan kunnen we  $a$  niet splitsen zoals we hierboven met 6 deden. In dat geval moet  $a$  een deler zijn van  $n$  of van  $k$  of zelfs van allebei. Dit kunnen we bewijzen met behulp van priemontbindingen. Bekijk namelijk de priemontbinding van  $n$  en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen  $p_1, p_2, \dots, p_t$ . Bekijk ook de priemontbinding van  $k$  en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen  $q_1, q_2, \dots, q_r$ . De priemfactoren die dan in  $kn$  voorkomen zijn  $p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_r$ , waarbij er misschien nog dubbele zitten als een  $p$ 'tje gelijk is aan een  $q$ 'tje. In elk geval kan een priemgetal dat niet tussen de  $p$ 'tjes en  $q$ 'tjes zit, ook niet voorkomen in de priemontbinding van  $kn$ . Als  $a$  nu een priemgetal is dat een deler is van  $kn$ , dan moet  $a$  voorkomen in de priemontbinding van  $kn$ . Dus  $a$  is gelijk aan één van de  $p$ 'tjes of  $q$ 'tjes. Als  $a = p_i$  voor een of andere  $i$ , dan is  $a$  een deler van  $n$ . En als  $a = q_j$  voor een of andere  $j$ , dan is  $a$  een deler van  $k$ . Dus  $a$  is een deler van minstens één van  $k$  en  $n$ .

**Rekenregel 2.** *Als  $a$  een priemdeler is van  $kn$ , dan is  $a$  een deler van  $k$  of van  $n$ .*

**Voorbeeld 9.** *Laat  $p$  een priemgetal zijn. Vind alle natuurlijke getallen  $a$  waarvoor  $p$  een deler is van  $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .*

**Oplossing** Als  $a \geq p$ , dan komt  $p$  voor in het product  $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . Dus dan is  $p$  zeker een deler van dat product. Wat gebeurt er als  $a < p$ ? Dan kan dat product nog steeds wel erg groot zijn, groter dan  $p$ . Toch kan  $p$  er geen deler van zijn. Om dit te laten zien, gebruiken we rekenregel 2. Stel namelijk dat  $p$  wel een deler is van het product. Dan is  $p$  een deler van minstens één van de  $a$  factoren, zeg van de factor  $b$ . Alle factoren die voorkomen in het product, zijn kleiner dan of gelijk aan  $a$ , dus ook  $b \leq a$ . Verder hadden

we aangenomen  $a < p$ , dus  $b < p$ . Maar dan kan  $p$  natuurlijk geen deler zijn van  $b$ : de positieve getallen waar  $p$  deelbaar door is, zijn  $p, 2p, 3p$ , enzovoorts, maar geen getallen kleiner dan  $p$ . Kortom, dit kan niet. Dus  $p$  is geen deler van  $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  als  $a < p$ .

We concluderen dat de gezochte natuurlijke getallen  $a$  precies de natuurlijke getallen met  $a \geq p$  zijn.  $\square$

De redenering hierboven gaat niet op als  $p$  geen priemgetal is. Dan mogen we rekenregel 2 namelijk niet toepassen. Onze conclusie is dan ook verkeerd, zoals we met een tegenvoorbeeld kunnen laten zien. Neem bijvoorbeeld  $p = 6$  (geen priemgetal). Als het bovenstaande voorbeeld ook waar zou zijn voor niet-priemgetallen, dan zou het product alleen deelbaar zijn door 6 als  $a \geq 6$ . Als we echter  $a = 4$ , kiezen, dan is het product  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  en dat is toch deelbaar door 6. Dus als  $p$  niet priem is, dan kan ook voor getallen  $a$  die kleiner zijn dan  $p$ , gelden dat  $p$  een deler is van  $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

Met voorbeeld 9 in ons achterhoofd, kunnen we ook bewijzen dat als  $p$  priem is,  $p^2$  nooit een deler kan zijn van  $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  als  $a \leq p$ . Voor  $a < p$  is dat logisch, want als  $p$  al geen deler is van het product, dan is  $p^2$  al helemaal geen deler. Wat gebeurt er als  $a = p$ ? We kunnen niet direct weer rekenregel 2 toepassen, want  $p^2$  is niet priem. We zien wel dat er een factor  $p$  zit in het product (namelijk de factor  $a$ , want we hadden  $a = p$  genomen). Deze kunnen we wegstrepen tegen één factor  $p$  in  $p^2$ . Daaruit volgt dat  $p$  een deler moet zijn van  $(a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . We wisten al uit voorbeeld 9 dat dit niet waar is, want  $a - 1 < p$ .

Bij het wegstrepen van een factor  $p$  gebruiken we eigenlijk een nieuwe rekenregel. Laten we die nog even in het algemeen opschrijven.

**Rekenregel 3.** *Laat  $a, b$  en  $c$  gehele getallen zijn met  $a \neq 0$ . Als  $ab$  een deler is van  $ac$ , dan is  $b$  een deler van  $c$ .*

Het bewijs is eenvoudig: als  $ab$  een deler is van  $ac$ , dan is er een geheel getal  $d$  zodat  $d \cdot ab = ac$ . Omdat  $a$  ongelijk nul is, mogen we  $a$  links en rechts wegdelen. Dus geldt  $d \cdot b = c$  en dat betekent precies weer dat  $b$  een deler is van  $c$ .

Laten we eens kijken wat er gebeurt als we twee getallen optellen. Stel dat we bijvoorbeeld twee even getallen optellen. Dan komt daar weer een even getal uit. Als we een even en een oneven getal bij elkaar optellen, dan komt er juist een oneven getal uit. Een even getal is natuurlijk niets anders dan een getal dat deelbaar is door 2; een oneven getal is juist niet deelbaar door 2. Kunnen we 2 nu vervangen door een willekeurig getal? Stel dat we twee getallen optellen die allebei deelbaar zijn door  $a$ . Is het resultaat dan deelbaar door  $a$ ? En wat als we een getal dat deelbaar is door  $a$  optellen bij een getal dat niet deelbaar is door  $a$ ?

Eerst maar eens twee getallen die deelbaar zijn door  $a$ , zeg  $ak$  en  $al$ . Als we die optellen, krijgen we  $ak + al = a(k + l)$  en dat is weer deelbaar door  $a$ . Natuurlijk geldt hetzelfde als we het ene getal van het andere aftrekken:  $ak - al = a(k - l)$ . Dat is ook weer deelbaar door  $a$ .

Stel nu dat we  $ak$  optellen bij een getal  $n$  dat niet deelbaar is door  $a$ . Noem de uitkomst  $l$ . Dan geldt  $l - ak = n$ . Dus als  $l$  deelbaar is door  $a$ , dan is (volgens wat we net hebben bewezen)  $n$  ook deelbaar door  $a$ . Maar we hadden juist gezegd dat  $n$  niet deelbaar was door  $a$ . Conclusie:  $l$  is ook niet deelbaar door  $a$ . Hetzelfde geldt als we  $ak$  juist aftrekken van een getal  $n$  dat niet deelbaar is door  $a$ : dan is de uitkomst ook niet deelbaar door  $a$ .

**Rekenregel 4.** *Als  $a$  een deler is van  $m$  en van  $n$ , dan is  $a$  een deler van  $m + n$  en ook van  $m - n$ . Als  $a$  wel een deler is van  $m$ , maar niet van  $n$ , dan is  $a$  geen deler van  $m + n$  en ook niet van  $m - n$ .*

*We kunnen dit ook als volgt samenvatten. Stel  $a$  is een deler van  $m$ . Dan is  $a$  een deler van  $n$  precies dan als  $a$  een deler is van  $m + n$ . En  $a$  is een deler van  $n$  precies dan als  $a$  een deler is van  $m - n$ .*

**Voorbeeld 10.** *Bewijs dat er geen priemgetallen  $p$ ,  $q$  en  $r$  bestaan zodat  $p^2 + q^2 = r^2$ .*

**Oplossing** We gaan eerst eens even wat priemgetallen invullen om te kijken wat er gebeurt. We maken een tabel van de waarden van  $p^2 + q^2$  voor verschillende priemgetallen  $p$  en  $q$ :

	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 7$
$p = 2$	8	13	29	53
$p = 3$	13	18	34	58
$p = 5$	29	34	50	74
$p = 7$	53	58	74	98

Dit zijn inderdaad allemaal geen kwadraten van priemgetallen. Wat opvalt is dat veel waarden even zijn. Dat is logisch: als je de kwadraten van twee oneven priemgetallen bij elkaar optelt, dan wordt de uitkomst even. Maar ook wordt de uitkomst dan minstens  $3^2 + 3^2 = 18$ , terwijl het slechts 4 mag zijn als  $r$  een even priemgetal is. Dus we kunnen het geval dat  $p$  en  $q$  allebei oneven zijn, uitsluiten. Als  $p$  en  $q$  allebei even zijn, dan zijn ze allebei gelijk aan 2 en we zien al in de tabel dat dat ook niet kan. Dus we hoeven nu alleen nog maar te kijken naar het geval dat precies één van  $p$  en  $q$  even is en de ander oneven. Laten we zeggen dat  $q = 2$ , terwijl  $p$  juist oneven is. Dan is  $r$  ook oneven.

Nu gaan we de vergelijking op een handige manier anders schrijven. Er geldt

$$p^2 = r^2 - q^2 = r^2 - 2^2 = (r - 2)(r + 2).$$

Volgens rekenregel 2 is  $p$  een deler van minstens één van  $r - 2$  en  $r + 2$ . Als ze allebei deelbaar zijn door  $p$ , dan is  $p$  volgens rekenregel 4 ook een deler van  $(r + 2) - (r - 2)$  en dat is gelijk aan 4. Maar  $p$  is oneven en 4 heeft geen oneven priemdelers, dus dit kan niet.

Omdat  $(r - 2)(r + 2) = p^2$ , mag  $(r - 2)(r + 2)$  alleen priemfactoren  $p$  bevatten, maar de twee factoren mogen dus niet allebei deelbaar zijn door  $p$ . Aangezien  $r + 2$  groter is dan  $r - 2$ , moet nu gelden  $r - 2 = 1$  en  $r + 2 = p^2$ . Maar dat betekent  $r = 3$  en  $p^2 = 5$ . Echter, 5 is geen kwadraat. Dus ook dit kan niet.

We hebben nu laten zien dat er geen enkele mogelijkheid is waarop voor drie priemgetallen  $p$ ,  $q$  en  $r$  kan gelden  $p^2 + q^2 = r^2$ .  $\square$

**Voorbeeld 11.** *Vind alle gehele getallen  $n$  waarvoor  $3n^2 + n - 2$  een deler is van  $n^3 + 3$ .*

**Oplossing** Als je eens wat verschillende getallen  $n$  invult en daarvoor  $3n^2 + n - 2$  uitrekent, dan valt het je misschien op dat dit getal steeds deelbaar is door  $n + 1$ . Inderdaad blijken we  $3n^2 + n - 2$  te kunnen ontbinden als  $(n + 1)(3n - 2)$ . Als  $3n^2 + n - 2$  een deler is van  $n^3 + 3$ , dan is dus in elk geval ook  $n + 1$  een deler van  $n^3 + 3$ . We gaan nu eerst maar eens proberen om alle gehele getallen  $n$  te vinden waarvoor  $n + 1$  een deler is van  $n^3 + 3$ .

We willen rekenregel 4 toepassen op  $n^3 + 3$  om andere uitdrukkingen te vinden waar  $n + 1$  ook een deler van is. Hiervoor maken we geschikte veelvouden van  $n + 1$ . Om te beginnen is  $n^2(n + 1) = n^3 + n^2$  deelbaar door  $n + 1$ . Met behulp van rekenregel 4 vinden we dan dat  $n + 1$  een deler is van  $(n^3 + n^2) - (n^3 + 3) = n^2 - 3$ . Nu kijken we naar  $n(n + 1) = n^2 + n$ , waar  $n + 1$  natuurlijk een deler van is. Met rekenregel 4 volgt hieruit dat  $n + 1$  een deler is van  $(n^2 + n) - (n^2 - 3) = n + 3$ . Nog een keertje rekenregel 4 toepassen vertelt ons dat  $n + 1$  een deler is van  $(n + 3) - (n + 1) = 2$ .

Nu heeft 2 slechts vier delers, namelijk 1, 2,  $-1$  en  $-2$ . Dus  $n + 1 = 1$ ,  $n + 1 = 2$ ,  $n + 1 = -1$  of  $n + 1 = -2$ . Daaruit volgt  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = -2$  of  $n = -3$ . We hebben nu vier kandidaatoplossingen voor  $n$  gevonden, maar we moeten nog wel even controleren of dit inderdaad allemaal oplossingen zijn. Dus we vullen alle mogelijkheden nog even in.

- $n = 0$ : dan geldt  $3n^2 + n - 2 = -2$  en  $n^3 + 3 = 3$ , maar  $-2$  is geen deler van 3.
- $n = 1$ : dan geldt  $3n^2 + n - 2 = 2$  en  $n^3 + 3 = 4$ , en 2 is inderdaad een deler van 4.
- $n = -1$ : dan geldt  $3n^2 + n - 2 = 0$  en  $n^3 + 3 = 2$ , maar 0 is geen deler van 2.
- $n = -2$ : dan geldt  $3n^2 + n - 2 = 8$  en  $n^3 + 3 = -5$ , maar 8 is geen deler van  $-5$ .

We hebben dus precies één oplossing gevonden en dat is  $n = 1$ .  $\square$

**Opgave 33.** *Laat  $n$  een geheel getal zijn. Bewijs dat een deler van  $n$  die groter is dan 1, nooit een deler is van  $n + 1$ .*

**Opgave 34.** *Voor welke gehele getallen  $a$  geldt dat  $a + 1$  een deler is van  $a^2 - a + 1$ ?*

**Opgave 35.** Laat  $k$  een natuurlijk getal zijn zodat 15 een deler is van  $(3k + 2)(5k + 2)$ . Bewijs dat 3 een deler is van  $k + 1$  en 5 een deler van  $k - 1$ .

**Opgave 36.** Stel dat voor gehele getallen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  geldt dat  $a - c$  een deler is van  $ab + cd$ . Bewijs dat  $a - c$  ook een deler is van  $ad + bc$ .

**Opgave 37.** Vind alle paren priemgetallen  $p$  en  $q$  waarvoor  $p^2 - 2q^2 = 1$ .

**Opgave 38. Finale 2001** Gegeven is de functie  $f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 13x + 10}{2x^2 - 9x}$ . Bepaal alle positieve gehele getallen  $x$  waarvoor  $f(x)$  een geheel getal is.

**Opgave 39. Finale 2006** Er geldt  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8$ . Wat is het kleinste getal  $k$  groter dan 6 waarvoor geldt

$$1 + 2 + \dots + k = k + (k + 1) + \dots + n, \text{ met } n \text{ een geheel getal groter dan } k?$$

**Opgave 40. Finale 2004** Een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden  $a$  en  $b$  en schuine zijde  $c$  heeft de volgende eigenschappen:  $a = p^m$  en  $b = q^n$  met  $p$  en  $q$  priemgetallen en  $m$  en  $n$  positieve gehele getallen,  $c = 2k + 1$  met  $k$  een positief geheel getal.

Bepaal alle mogelijke waarden van  $c$  en de daarbij horende waarden van  $a$  en  $b$ .

## 5 Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11

Van grote getallen is het vaak niet makkelijk om de priemontbinding te vinden. Er bestaan wel trucjes om ook van grote getallen te zien of ze deelbaar zijn door bepaalde kleine (priem)getallen. Zo kun je in één oogopslag zien dat het getal 123456 deelbaar is door 2, omdat het laatste cijfer even is. Je kunt ook zien dat 123456 niet deelbaar is door 5: alleen getallen die eindigen op een 5 of een 0 zijn deelbaar door 5. Waarom is dat eigenlijk zo? En kunnen we dit ook voor deelbaarheid door andere getallen?

Een *getal* schrijven we op met *cijfers*. Cijfers zitten altijd tussen de 0 en de 9. Zo is bijvoorbeeld 321 geen cijfer, maar een getal. Het getal 321 bestaat uit de cijfers 3, 2 en 1. En het getal 9 heeft precies één cijfer, namelijk het cijfer 9. We rekenen normaal gesproken met getallen: die kun je optellen, vermenigvuldigen, etc. Met cijfers kun je dat niet zomaar doen: wat is bijvoorbeeld het cijfer 3 opgeteld bij het cijfer 8? Dat is in elk geval geen cijfer! Soms is het toch handig om naar de cijfers van een getal te kijken. Daarvoor gebruiken we speciale notatie. Zo schrijven we  $\overline{abc}$  voor het getal dat bestaat uit de cijfers  $a$ ,  $b$  en  $c$ . We schrijven hiervoor liever niet  $abc$  zonder streep, want dan kan het verward worden met het product van de *getallen*  $a$ ,  $b$  en  $c$ .

In het algemeen gebruiken we de notatie  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  voor het getal dat bestaat uit de cijfers  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ . Je weet dat  $a_0$  het aantal eenheden aangeeft,  $a_1$  het aantal tientallen, enzovoorts. Dus in feite geldt

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Zo is  $\overline{123456} = 1 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$ . Normaal schrijven we dat natuurlijk gewoon als 123456.

We kunnen nu heel makkelijk inzien waarom we alleen naar het laatste cijfer van een getal hoeven te kijken om te bepalen of het deelbaar is door 2 of door 5. Er geldt namelijk

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 0} + a_0 = 10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0.$$

Door rekenregel 4 uit de vorige sectie toe te passen, zien we dat  $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$  deelbaar is door 2 precies dan als  $a_0$  deelbaar is door 2. En hetzelfde geldt voor 5: het getal  $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$  is deelbaar door 5 precies dan als  $a_0$  deelbaar is door 5.

Jammer genoeg is nu ook meteen duidelijk dat dit alleen voor delers van 10 werkt en dat zijn alleen 1, 2, 5 en 10. Toch kunnen we met behulp van deze notatie ook een trucje bedenken om te bepalen of een getal deelbaar is door 3.

Kijk nog eens hiernaar:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Al die factoren 10, 100, 1000, etc. zijn niet deelbaar door 3. Dat is jammer: we willen daar graag iets hebben staan dat wel deelbaar is door 3. Dat kunnen we voor elkaar krijgen door overall eentje af te halen: 9, 99, 999, etc. zijn wel allemaal deelbaar door 3. (Immers,  $9999 \cdots 999 = 3 \times 3333 \cdots 333$ .) Dus laten we ons getal nog een beetje anders schrijven:

$$\begin{aligned} \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &= a_n \cdot (10^n - 1) + a_n + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 \\ &= (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 9) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Het linkerstuk is nu deelbaar door 3. Met rekenregel 4 krijgen we: het geheel is deelbaar door 3 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 3. Het rechterstuk is  $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$  en dat is de som van de cijfers van ons getal. Dus een getal is deelbaar door 3 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.

Nu krijgen we het trucje voor deelbaarheid door 9 cadeau. In die uitdrukking van net is het linkerstuk namelijk niet alleen deelbaar door 3, maar ook door 9. (Want  $9999 \cdots 999 = 9 \times 1111 \cdots 111$ .) Dus op precies dezelfde manier kunnen we laten zien dat een getal deelbaar is door 9 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 9.

Ten slotte gaan we nog een trucje bedenken voor deelbaarheid door 11. Laten we eerst maar eens kijken naar een getal van drie cijfers. Dat kunnen we schrijven als

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Als we weer 1 afhalen van 100, dan krijgen we 99 en dat is deelbaar door 11. Maar bij 10 lukt dat niet: 9 is niet deelbaar door 11. Gelukkig is  $10 + 1$  wel deelbaar door 11. Dus we schrijven ons getal als

$$\overline{cba} = (99c + 11b) + (c - b + a).$$

Nu is het linkerstuk weer deelbaar door 11. Dus het getal is deelbaar door 11 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 11. Hoe ziet dat rechterstuk eruit voor getallen met meer cijfers? Het getal  $10^3 - 1 = 999$  is helaas weer niet deelbaar door 11, maar  $10^3 + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$  wel. Dus is het handig om een getal van vier cijfers zo te schrijven:

$$\overline{dcba} = (1001d + 99c + 11b) + (-d + c - b + a).$$

Daar begint een patroon in te komen! Het lijkt erop dat je de cijfers van een getal om en om moet optellen en aftrekken; als de uitkomst deelbaar is door 11, dan is het getal zelf deelbaar door 11. Die uitkomst noemen we trouwens de *alternerende* som van de cijfers.

Het belangrijkste ingrediënt van ons vermoeden is dat je bij de machten van 10 de ene keer 1 moet optellen en de andere keer 1 moet aftrekken om een getal deelbaar door 11 te krijgen. Dat gaan we eerst maar eens bewijzen.

We bewijzen eerst met inductie naar  $n$  dat  $10^{2n} - 1$  deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen  $n$ .

(Inductiebasis) Voor  $n = 1$  geldt  $10^{2n} - 1 = 99$  en dat is deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere  $n = k \geq 1$ . We weten dan dat  $10^{2k} - 1$  deelbaar is door 11. We gaan dit eens vermenigvuldigen met 100, dan is het nog steeds deelbaar door 11:

$$100 \cdot (10^{2k} - 1) = 100 \cdot 10^{2k} - 100 = 10^{2k+2} - 1 - 99.$$

We passen rekenregel 4 weer toe: 99 is deelbaar door 11 en  $100 \cdot (10^{2k} - 1)$  is deelbaar door 11, dus  $10^{2k+2} - 1$  is deelbaar door 11. Dat is wat we wilden bewijzen voor  $n = k + 1$ . Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat  $10^{2n} - 1$  deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen  $n$ .

Nu bewijzen we met inductie naar  $n$  dat  $10^{2n-1} + 1$  deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen  $n$ .

(Inductiebasis) Voor  $n = 1$  geldt  $10^{2n-1} + 1 = 11$  en dat is natuurlijk deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere  $n = k \geq 1$ . We weten dan dat  $10^{2k-1} + 1$  deelbaar is door 11. Opnieuw vermenigvuldigen we met 100:

$$100 \cdot (10^{2k-1} + 1) = 100 \cdot 10^{2k-1} + 100 = 10^{2k+1} + 1 + 99.$$

Hier volgt met behulp van rekenregel 4 uit dat  $10^{2k+1} + 1$  deelbaar is door 11 en dat is wat we wilden bewijzen voor  $n = k + 1$ . Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat  $10^{2n-1} + 1$  deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen  $n$ .

Nu kunnen we bewijzen dat ons trucje met de alternerende som werkt. We doen het eerst

voor een getal met een even aantal cijfers:  $a_{2n-1}, a_{2n-2}, \dots, a_1$  en  $a_0$ . Er geldt

$$\begin{aligned} \overline{a_{2n-1}a_{2n-2}\dots a_1a_0} &= a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + a_{2n-2} \cdot (10^{2n-2} - 1) + \dots + a_1 \cdot 11) \\ &\quad + (-a_{2n-1} + a_{2n-2} - \dots - a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Het linkerstuk is helemaal deelbaar door 11, dus we concluderen dat het hele getal deelbaar is door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Nu doen we hetzelfde voor een getal met een oneven aantal cijfers:

$$\begin{aligned} \overline{a_{2n}a_{2n-1}\dots a_1a_0} &= a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot 11) \\ &\quad + (a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Ook hier zien we dat het linkerstuk deelbaar is door 11, zodat het rechterstuk (de alternerende som van de cijfers) deelbaar is door 11 precies dan als het hele getal deelbaar is door 11.

We zetten alle trucjes nog even op een rijtje.

Laat  $N$  een natuurlijk getal zijn.

- $N$  is deelbaar door 2 precies dan als het laatste cijfer van  $N$  deelbaar is door 2.
- $N$  is deelbaar door 5 precies dan als het laatste cijfer van  $N$  deelbaar is door 5.
- $N$  is deelbaar door 3 precies dan als de som van de cijfers van  $N$  deelbaar is door 3.
- $N$  is deelbaar door 9 precies dan als de som van de cijfers van  $N$  deelbaar is door 9.
- $N$  is deelbaar door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Bedenk weer even dat 0 deelbaar is door elk natuurlijk getal. Dus als een getal eindigt op een 0, dan is het getal deelbaar door 5. En als de alternerende som van de cijfers gelijk is aan 0, dan is het getal deelbaar door 11.

**Voorbeeld 12.** *Bepaal de priemontbinding van het getal  $n = 10780$ .*

**Oplossing** In elk geval is  $n$  deelbaar door 2 en door 5, dus we kunnen het schrijven als  $n = 1078 \cdot 2 \cdot 5$ . Nu zien we dat er nog een factor 2 in zit:  $n = 539 \cdot 2^2 \cdot 5$ . De alternerende som van de cijfers van 539 is  $5 - 3 + 9 = 11$ , wat deelbaar is door 11, dus  $n$  is deelbaar door 11. We krijgen  $n = 49 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5$ . Nu zien we dat de priemontbinding van  $n$  gelijk is aan  $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ .  $\square$

**Voorbeeld 13.** *Vind alle natuurlijke getallen  $n \leq 6000$  waarvoor geldt dat  $n$  precies 144 keer de som van zijn cijfers is.*

**Oplossing** We noemen de som van de cijfers van  $n$  even  $S(n)$ . Dan geldt  $S(n) \cdot 144 = n$ . Nu gaan we onze deelbaarheidstrucjes gebruiken. Het getal 144 is deelbaar door 9 (want  $1 + 4 + 4 = 9$ ). Dus 9 is een deler van de linkerkant van de vergelijking en daarom ook van de rechterkant, dus 9 is een deler van  $n$ . Maar dan is 9 ook een deler van de som van de cijfers van  $n$  en die hadden we  $S(n)$  genoemd. De linkerkant is dus deelbaar door  $9 \cdot 144 = 1296$ . Daaruit volgt dat  $n$  een veelvoud is van 1296.

Dat wil nog niet zeggen dat voor elk veelvoud  $n$  van 1296 geldt:  $S(n) \cdot 144 = n$ . We hebben alleen nog laten zien dat geen andere getallen dan veelvouden van 1296 kunnen voldoen, maar niet dat al die veelvouden daadwerkelijk voldoen. Gelukkig zijn er slechts enkele veelvouden van 1296 kleiner dan 6000, dus we kunnen ze allemaal even uitproberen. Dit doen we in de volgende tabel.

$n$	$S(n)$	$S(n) \cdot 144$	is gelijk aan $n$ ?
1296	18	2592	nee
2592	18	2592	ja
3888	27	3888	ja
5184	18	2592	nee

We lezen nu gemakkelijk in de tabel af dat er precies twee waarden van  $n$  kleiner dan 6000 zijn waarvoor geldt  $S(n) \cdot 144 = n$ , namelijk  $n = 2592$  en  $n = 3888$ .  $\square$

Het uitproberen van de vier mogelijkheden hoort echt nog bij het bewijs. Zonder dat tabelletje weten we niet precies welke van de vier getallen voldoen en zijn we dus nog niet klaar met de oplossing. Het is wel belangrijk dat we zeker weten dat dit de enige vier kandidaten zijn, anders zouden we nog veel meer getallen moeten uitproberen. In het eerste deel van het bewijs laten we zien dat er slechts vier kandidaten zijn; daarna maken we het bewijs af door die vier één voor één uit te proberen.

**Opgave 41.** *Bepaal de priemontbinding van het getal  $n = 30030$ .*

**Opgave 42.** *Bepaal cijfers  $a$  en  $b$  (met  $a \neq 0$ ) zo dat 72 een deler is van  $\overline{a679b}$ .*

**Opgave 43.** *Vind een getal dat bestaat uit alleen maar enen en dat deelbaar is door 99.*

**Opgave 44.** *Het getal  $n$  bestaat uit precies 300 enen en verder een aantal nullen. Kan  $n$  een kwadraat zijn?*

**Opgave 45.** *Vind een getal  $n$  met de volgende eigenschap: als je de som van de cijfers van  $n$  vermenigvuldigt met 15 en bij de uitkomst 135 optelt, krijg je precies  $n$ .*

**Opgave 46.** *Een natuurlijk getal  $n$  van vier cijfers heeft de eigenschap dat de cijfers van klein naar groot gesorteerd vier opeenvolgende getallen zijn. Verder is gegeven dat  $n$  deelbaar is door 9 en door 11. Vind alle mogelijkheden voor  $n$ .*

**Opgave 47. Finale 1997** Bij elk positief geheel getal  $n$  definiëren we  $f(n)$  als het product van de som van de cijfers van  $n$  met  $n$  zelf. Voorbeelden:  $f(19) = (1 + 9) \cdot 19 = 190$  en  $f(97) = (9 + 7) \cdot 97 = 1552$ .

Toon aan dat er geen getal  $n$  bestaat met  $f(n) = 19091997$ .

## 6 Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud

We kijken nog eens naar rekenregel 4. Die zegt dat een deler van  $m$  en van  $n$  ook een deler is van  $m + n$ . In andere woorden: als  $m$  en  $n$  een deler gemeen hebben, dan is dit ook een deler van  $m + n$ . We weten dat elke twee gehele getallen ten minste één positieve deler gemeen hebben, namelijk 1: dit is een deler van elk geheel getal. Soms is dit de enige positieve deler die de getallen gemeen hebben. Zo heeft 15 bijvoorbeeld als positieve delers 1, 3, 5, en 15, terwijl 8 de positieve delers 1, 2, 4 en 8 heeft. Het enige getal dat bij allebei voorkomt, is 1, dus 1 is de enige positieve deler die 8 en 15 gemeen hebben. De getallen 10 en 15 hebben meer dan één positieve deler gemeen: de positieve delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10 en daarvan zijn 1 en 5 allebei ook een deler van 15. De grootste daarvan is 5. We noemen 5 daarom de *grootste gemene deler* van 10 en 15. Dit korten we ook wel af met *ggd* en soms schrijven we  $\text{ggd}(10, 15) = 5$ . Zo ook geldt  $\text{ggd}(8, 15) = 1$ ,  $\text{ggd}(8, -10) = 2$  en  $\text{ggd}(-20, -1000) = 20$ . Omdat alle natuurlijke getallen een deler van 0 zijn, geldt bijvoorbeeld  $\text{ggd}(3, 0) = 3$  en  $\text{ggd}(0, -23) = 23$ . De grootste gemene deler van 0 en 0 is niet gedefinieerd.

Terug naar rekenregel 4. We kunnen nu zeggen: de grootste gemene deler van  $m$  en  $n$  is ook een deler van  $m + n$ . De grootste gemene deler van  $m$  en  $n$  is immers een deler van zowel  $m$  als  $n$ , dus volgens rekenregel 4 ook een deler van  $m + n$ . Wat is nu  $\text{ggd}(m, m + n)$ ? In elk geval hebben  $m$  en  $m + n$  al het getal  $\text{ggd}(m, n)$  gemeen als deler. Maar misschien hebben ze nog wel een grotere deler gemeen. Noem  $\text{ggd}(m, m + n)$  even  $d$ . Dan is  $d$  dus een deler van  $m$  en van  $m + n$ , dus volgens rekenregel 4 ook van  $(m + n) - m = n$ . Dus  $d$  is een deler van zowel  $m$  als  $n$ , maar dat betekent dat hij niet groter kan zijn dan  $\text{ggd}(m, n)$ . Dat was immers de grootste deler die  $m$  en  $n$  gemeen hadden. Conclusie:  $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$ .

**Rekenregel 5.** Voor gehele getallen  $m$  en  $n$  geldt:  $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$ . En ook:  $\text{ggd}(m, m - n) = \text{ggd}(m, n)$ .

Als we de ggd van wat grotere getallen willen weten, dan is het niet zo handig om eerst alle delers op te moeten schrijven. Het is handiger om dan naar de priemontbinding te kijken. Stel bijvoorbeeld dat we de ggd van 36 en 120 willen weten. We kunnen deze getallen gemakkelijk in priemgetallen ontbinden:  $36 = 2^2 \cdot 3^2$  en  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . We zien nu direct dat in de ggd van 36 en 120 in elk geval niet de priemfactor 5 mag voorkomen, want dat is geen deler van 36. De priemgetallen 2 en 3 moeten er zeker wel in. En deze factoren

mogen niet vaker voorkomen dan dat ze in 36 en 120 voorkomen. Dus de priemfactor 2 mag twee keer voorkomen, want hij komt precies twee keer voor in 36; de priemfactor 3 mag maar één keer voorkomen, want hij komt precies één keer voor in 120. Kortom, de grootste gemene deler van 36 en 120 is  $2^2 \cdot 3 = 12$ .

Wat er hier precies gebeurt, wordt nog iets duidelijker als we de getallen zo schrijven:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad \text{en} \quad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

We zorgen dus dat in de priemontbinding van beide getallen dezelfde priemgetallen staan. Omdat 5 niet echt een priemdelers is van 36, geven we hem de exponent 0 (bedenk dat  $5^0$  gelijk is aan 1). Nu kijken we bij elke priemfactor naar de kleinste exponent. Bij de priemfactor 2 is dat 2, bij de priemfactor 3 is dat 1 en bij de priemfactor 5 is dat 0. Dus de ggd is  $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$ . Dit is in feite precies het argument van hierboven, maar dan wat overzichtelijker opgeschreven.

We kunnen nu de getallen opschrijven als het product van de ggd en de overige factoren:

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3, \\ 120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5. \end{aligned}$$

Het stuk tussen haakjes is precies de ggd en is bij allebei de getallen hetzelfde. Buiten de haakjes staan juist bij beide getallen verschillende priemfactoren.

**Voorbeeld 14.** *Laat  $a$  en  $b$  twee natuurlijke getallen zijn. Noem  $d$  de grootste gemene deler van  $a$  en  $b$ . Wat is nu  $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ ?*

**Oplossing** Laten we dit eerst even uitproberen op ons voorbeeld van hierboven, met  $a = 36$  en  $b = 120$ , zodat  $d = 12$ . Dan geldt  $\frac{a}{d} = 3$  en  $\frac{b}{d} = 10$ . Die getallen hebben ggd 1. Verder valt het op dat deze getallen precies het product zijn van de priemfactoren die hierboven buiten de haakjes stonden. Dat is natuurlijk geen toeval. Het getal  $d$  is precies het product van de priemgetallen binnen de haakjes, dus  $\frac{a}{d}$  is het product van de getallen buiten de haakjes. En de eigenschap van de grootste gemene deler van  $a$  en  $b$  was nou juist dat de getallen buiten de haakjes bij  $a$  geen priemfactoren meer gemeen hadden met de getallen buiten de haakjes bij  $b$ . Dus  $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$  moet wel gelijk zijn aan 1.

Dat schrijven we nog een keertje netjes op. We schrijven  $a = d \cdot e$  en  $b = d \cdot f$ , met  $d = \text{ggd}(a, b)$ . Als we  $e$  en  $f$  in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat  $p$  een priemdelers zou zijn van zowel  $e$  als  $f$ , dan zou  $d \cdot p$  een delers zijn van  $a = d \cdot e$  en ook van  $b = d \cdot f$ . Maar  $d$  is de grootste gemene delers van  $a$  en  $b$  en  $d \cdot p$  is groter, dus dat kan niet. Kortom,  $e$  en  $f$  hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus  $\text{ggd}(e, f) = 1$  en dat is precies wat we wilden bewijzen.  $\square$

Een begrip dat een beetje lijkt op de ggd is het *kleinste gemene veelvoud* van twee getallen  $a$  en  $b$ . Dat is het kleinste natuurlijke getal  $n$  dat een veelvoud is van zowel  $a$  als  $b$ . We korten dit ook wel af tot *kgv* of  $\text{kgv}(a, b)$ . We kunnen het kgv van twee getallen weer heel makkelijk uit de priemontbinding halen. Laten we nog eens kijken naar 36 en 120. Het kgv van 36 en 120 moet in elk geval een veelvoud worden van  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ . Het moet natuurlijk ook een veelvoud zijn van  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ , dus we moeten de priemfactoren van 36 aanvullen totdat alle priemfactoren van 120 er ook in zitten. Er moet dus een extra 2 bij en nog een 5. Dus  $\text{kgv}(36, 120) = 36 \cdot 2 \cdot 5 = 360$ . We hadden natuurlijk ook van 120 uit kunnen gaan en daar nog een extra factor 3 aan kunnen toevoegen. Dat geeft gelukkig hetzelfde antwoord:  $\text{kgv}(36, 120) = 120 \cdot 3 = 360$ .

Ook hier kan het makkelijker zijn om de priemontbindingen even zo op te schrijven dat in beide dezelfde priemgetallen staan:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad \text{en} \quad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

Omdat al deze priemfactoren net zo vaak moeten voorkomen in het kgv als ze in één van beide getallen doen, moeten we nu kijken naar de grootste exponenten. De grootste exponent bij de factor 2 is 3, de grootste exponent bij de factor 3 is 2 en de grootste exponent bij de factor 5 is 1. Dus  $\text{kgv}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ .

Zo ook is bijvoorbeeld  $\text{kgv}(4, 8) = 8$  en  $\text{kgv}(-6, 10) = 30$ . De kgv van 0 en 3 is niet gedefinieerd, want er bestaat geen positief veelvoud van 0.

**Voorbeeld 15.** *Laat  $n$  een natuurlijk getal zijn. Bewijs dat geldt:  $\text{kgv}(n, n + 1) = n^2 + n$ .*

**Oplossing** We maken eerst eens een tabelletje om te kijken of dit waar is voor wat kleine waarden van  $n$ :

$n$	priemontbinding van $n$	priemontbinding van $n + 1$	$\text{kgv}(n, n + 1)$	$n^2 + n$
1	1	2	2	2
2	2	3	6	6
3	3	$2^2$	12	12
4	$2^2$	5	20	20
5	5	$2 \cdot 3$	30	30
6	$2 \cdot 3$	7	42	42

We bepalen steeds het kgv door aan de priemontbinding van  $n$  de priemfactoren van  $n + 1$  toe te voegen die nog niet (vaak genoeg) voorkomen. Hier valt het op dat dit steeds alle priemfactoren van  $n + 1$  zijn. De getallen  $n$  en  $n + 1$  hebben in bovenstaande tabel nooit priemfactoren gemeen. Maar eigenlijk wisten we dat al! Kijk maar eens terug naar opgave 33.

Nu is het makkelijk om het af te maken. Het kgv van  $n$  en  $n + 1$  moet alle priemfactoren van  $n$  en  $n + 1$  bevatten, net zo vaak als ze voorkomen in minstens één van beide. Maar  $n$

en  $n+1$  hebben geen priemfactoren gemeen, dus we kunnen het kgv vinden door simpelweg  $n$  en  $n+1$  te vermenigvuldigen. Dat geeft  $\text{kgv}(n, n+1) = n(n+1) = n^2 + n$ .  $\square$

**Opgave 48.** *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen  $n$  de grootste gemene deler van  $n^2$  en  $(n+1)^2$  gelijk is aan 1.*

**Opgave 49.** *Laat  $m$ ,  $n$  en  $k$  gehele getallen zijn. Bewijs dat  $\text{ggd}(m, n+km) = \text{ggd}(m, n)$ .*

**Opgave 50.** *Laat  $a$  en  $b$  gehele getallen zijn zodat  $\text{ggd}(a, b) = 1$ . Bewijs dat  $\text{ggd}(a-b, a+b) = 1$  of  $\text{ggd}(a-b, a+b) = 2$ .*

**Opgave 51.** *Laat  $n$  en  $k$  gehele getallen zijn. Bewijs dat  $\text{ggd}(n, 2k+1) = \text{ggd}(2n, 2k+1)$ .*

**Opgave 52.** *Laat  $a$  en  $b$  natuurlijke getallen zijn. Bewijs dat geldt:  $\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b) = a \cdot b$ . Bedenk hiermee een nieuwe oplossing voor voorbeeld 15.*

**Opgave 53.** *Definieer een rij natuurlijke getallen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  als volgt:  $a_1 = 1$  en  $a_{n+1} = a_n + 2n$  voor alle natuurlijke getallen  $n \geq 1$ . Bewijs dat  $\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = 1$  voor alle natuurlijke getallen  $n$ .*

**Opgave 54. Finale 1982** *Definieer  $n = 9^{753}$ . Bepaal  $\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1)$ .*

**Opgave 55. Finale 1998** *Van twee positieve gehele getallen  $m$  en  $n$  is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud gelijk aan  $133866 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 67$ . Het verschil  $m - n$  is gelijk aan 189. Bereken  $m$  en  $n$ .*

---

## Katern 3

# Meetkunde

---

## Inleiding

De vlakke meetkunde is de meetkunde die zich afspeelt in het platte vlak. De hoofdrolspelers van de vlakke meetkunde zijn de punten en de lijnen van driehoeken, vierhoeken of andere veelhoeken. Ook cirkels komen geregeld in een meetkunde-opgave voor. In dit katern bekijken we eerst enkele technieken om te laten zien dat bepaalde hoeken of bepaalde lijnstukken gelijk zijn. Daarna bestuderen we een aantal speciale driehoeken en vierhoeken die allerlei handige eigenschappen hebben. Ten slotte gaan we in op de bijzondere lijnen die elke driehoek bezit, zoals de drie hoogtelijnen of de drie zwaartelijnen. Van twee zwaartelijnen is het best logisch dat ze door één punt gaan, maar hoe bewijs je van de drie zwaartelijnen eigenlijk dat ze door één punt gaan? Zulk soort stellingen komen in het laatste hoofdstuk aan bod.

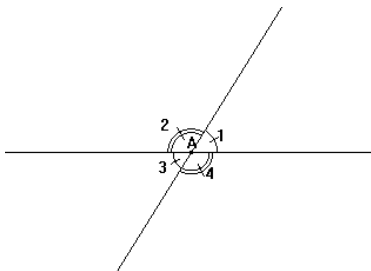
Net als bij de onderwerpen die je in de andere katernen bent tegengekomen, kun je bij meetkundige bewijzen verschillende richtingen in slaan. De ene keer is het handig zelf een punt te definiëren, de andere keer juist een geschikte hulplijn. Bij de eerste voorbeelden in dit katern zul je misschien denken: waar komt dat punt of die lijn nou weer vandaan; die was toch niet gegeven? Maar besef dan dat je alles mag definiëren wat je maar wil, zolang je maar duidelijk omschrijft hoe je dat punt of die lijn hebt gedefiniëerd.

## 7 Hoeken

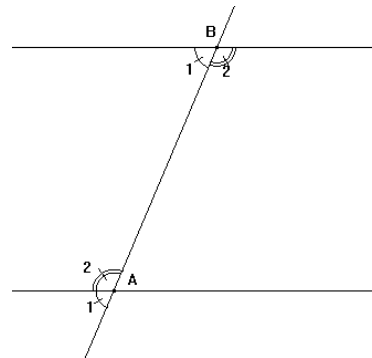
Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze in het snijpunt een *hoek* met elkaar. We meten hoeken in graden en noteren de hoek bij punt  $A$  als  $\angle A$ . Soms is het niet duidelijk welke hoek we precies bedoelen; dan kunnen we een getal (een zogenaamde *index*) toevoegen aan de naam van de hoek. Zo zie je in figuur 1 de hoeken  $\angle A_1$ ,  $\angle A_2$ ,  $\angle A_3$  en  $\angle A_4$ . Deze vier hoeken zijn samen precies  $360^\circ$ , een heel rondje rond. We noemen dat ook wel een *volledige hoek*. De helft hiervan is  $180^\circ$  en dat noemen we een *gestrekte hoek*. In de figuur vormen  $\angle A_1$  en  $\angle A_2$  samen een gestrekte hoek. Een *rechte hoek* is ten slotte een hoek van precies  $90^\circ$ .

De hoeken  $\angle A_1$  en  $\angle A_2$  samen schrijven we ook wel als  $\angle A_{1,2}$ . Er geldt dus  $\angle A_{1,2} = 180^\circ$  en ook  $\angle A_{1,2,3,4} = 360^\circ$ .

We kunnen een hoek ook met drie letters noteren:  $\angle BAC$  is de hoek die je krijgt als je van punt  $B$  naar punt  $A$  loopt en daarna van punt  $A$  naar punt  $C$ . Het gaat dan om de hoek bij punt  $A$ . Deze notatie is vooral handig als er meer dan twee lijnen door punt  $A$  gaan: dan is het niet meer duidelijk welke hoek je bedoelt met  $\angle A$ . De notatie  $\angle BAC$  geeft dan aan dat het gaat om de hoek bij  $A$  tussen de lijnen  $AB$  en  $AC$ . In figuur 3 bijvoorbeeld wordt met hoek  $\angle BAC$  dus hoek  $\angle A_2$  bedoeld.



**Figuur 1.** Volledige, gestrekte, overstaande hoeken.



**Figuur 2.** F-hoeken en Z-hoeken.

### 7.1 Overstaande hoeken

We hadden gezien dat in figuur 1 de hoeken  $\angle A_1$  en  $\angle A_2$  samen een gestrekte hoek vormen. Oftewel:  $\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$ . Hetzelfde geldt natuurlijk voor  $\angle A_2$  en  $\angle A_3$ : de som daarvan is ook  $180^\circ$ . Dus

$$\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 = \angle A_3.$$

De hoeken  $\angle A_1$  en  $\angle A_3$  zijn dus even groot. In het algemeen zeggen we dat bij twee snijdende lijnen de *overstaande hoeken* gelijk zijn. Dus net zo goed zijn  $\angle A_2$  en  $\angle A_4$  even groot, want dat zijn ook overstaande hoeken.

## 7.2 F- en Z-hoeken

In figuur 2 zie je twee evenwijdige lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt, de ene lijn in  $A$  en de andere lijn in  $B$ . De hoeken  $\angle A_1$  en  $\angle B_1$  zijn gelijk. We noemen zulke hoeken bij evenwijdige lijnen ook wel F-hoeken. Er zijn ook Z-hoeken: in de figuur zijn dat  $\angle A_2$  en  $\angle B_2$ . Die hoeken zijn ook even groot.

Je kunt dit ook gebruiken om juist te bewijzen dat twee lijnen evenwijdig zijn. Stel je dat een plaatje hebt zoals in figuur 2, maar je weet nog niet dat de twee lijnen evenwijdig zijn. Als je dan kunt bewijzen dat de F-hoeken  $\angle A_1$  en  $\angle B_1$  gelijk zijn of juist de Z-hoeken  $\angle A_2$  en  $\angle B_2$ , dan volgt daaruit dat de lijnen evenwijdig zijn.

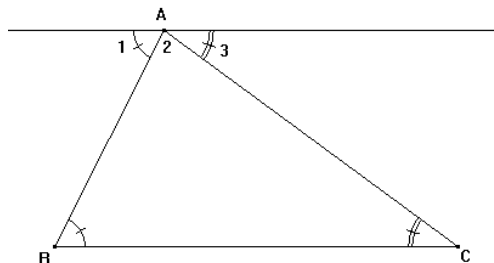
Als de lijnen  $k$  en  $\ell$  evenwijdig zijn, dan noteren we dat trouwens met  $k \parallel \ell$ .

## 7.3 Hoekensom

Verder is er nog een heel belangrijk resultaat over hoeken in een driehoek.

**Stelling 7.3.1** (Hoekensom in een driehoek). *Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. Dan geldt dat  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ .*

**Bewijs** Trek een lijn evenwijdig aan  $BC$  door  $A$ , zoals in figuur 3. (Dit is zo'n voorbeeld van zelf een handige hulplijn trekken, zoals in de inleiding werd genoemd.) Dan geldt  $\angle B = \angle A_1$  en  $\angle C = \angle A_3$  wegens Z-hoeken. Bovendien is  $\angle A_{1,2,3}$  een gestrekte hoek. Dus  $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_2 + \angle A_1 + \angle A_3 = \angle A_{1,2,3} = 180^\circ$ .  $\square$



**Figuur 3.** *Ondersteuning bij het bewijs van stelling 7.3.1.*

## 7.4 Opgaven

**Opgave 56.** Laat  $\triangle ABC$  gegeven zijn. De lijn door  $C$  evenwijdig met  $AB$  en de lijn door  $B$  evenwijdig met  $AC$  snijden elkaar in punt  $P$ . Bewijs dat  $\angle BAC = \angle CPB$ .

**Opgave 57** (Buitenhoekstelling). Laat driehoek  $\triangle ABC$  gegeven zijn. Punt  $X$  ligt op  $AB$  zodat  $B$  tussen  $A$  en  $X$  ligt. Bewijs dat  $\angle CBX = \angle BAC + \angle ACB$ . (We noemen  $\angle CBX$  ook wel de buitenhoek van  $\triangle ABC$  bij  $\angle B$ .)

**Opgave 58** (U-hoeken). Laat  $A, B, X$  en  $Y$  vier punten zijn zodat  $X$  en  $Y$  aan dezelfde kant van lijn  $AB$  liggen.

(i) Stel dat  $AX \parallel BY$ . Bewijs dat  $\angle XAB + \angle YBA = 180^\circ$ .

(ii) Stel dat  $\angle XAB + \angle YBA = 180^\circ$ . Bewijs dat  $AX \parallel BY$ .

**Opgave 59.** In driehoek  $\triangle ABC$  is  $D$  het punt op  $BC$  zodat  $\angle ADB = 90^\circ$  en  $F$  het punt op  $AB$  zodat  $\angle CFA = 90^\circ$ . Zij  $S$  het snijpunt van  $AD$  en  $CF$ . Bewijs dat

(a)  $\angle BAD = \angle FCB$ ;

(b)  $\angle ABC = \angle FSA$ .

**Opgave 60.** Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn met  $D$  een punt op zijde  $AC$  en  $E$  een punt op zijde  $BC$ . Laat  $F$  het punt binnen de driehoek zijn zodat  $AF$  de hoek  $\angle DAE$  precies doormidden deelt (d.w.z.  $\angle EAF = \angle DAF$ ) en  $BF$  de hoek  $\angle DBE$  precies doormidden deelt (d.w.z.  $\angle EBF = \angle DBF$ ). Bewijs dat  $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$ .

## 8 Congruentie en gelijkvormigheid

Laten we eens kijken naar de mogelijkheden om twee driehoeken met elkaar te vergelijken.

### 8.1 Congruentie

Bekijk een driehoek  $\triangle ABC$ . Als je deze driehoek oppakt en een stukje verschuift, draait en misschien een keertje spiegelt, dan krijg je een nieuwe driehoek  $\triangle DEF$  die eigenlijk in heel veel opzichten hetzelfde is als  $\triangle ABC$ . De twee driehoeken hebben precies dezelfde vorm en grootte, alleen liggen ze op een andere plek in je tekening. In de wiskunde noemen we zulke driehoeken *congruent*.

Voor congruente driehoeken  $\triangle ABC$  en  $\triangle DEF$  geldt

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F,$$

$$|AB| = |DE|, \quad |BC| = |EF| \quad \text{en} \quad |AC| = |DF|.$$

Sommige van deze gelijkheden kun je uit de andere afleiden. Als je bijvoorbeeld weet dat  $\angle A = \angle D$  en  $\angle B = \angle E$ , dan volgt daaruit dat  $\angle C = \angle F$ , omdat de som van de hoeken in beide driehoeken  $180^\circ$  is. Zo zijn twee driehoeken congruent als ze overeenkomstig hebben:

1. drie zijden (ZZZ),
2. twee zijden met de ingesloten hoek (ZHZ),
3. twee zijden en een rechte hoek (ZZR),
4. twee hoeken met de ingesloten zijde (HZH),
5. twee hoeken met een niet-ingesloten zijde (HHZ).

De drie letters achter de gevallen zijn korte “codes” om makkelijk aan te geven door welk geval een paar driehoeken congruent zijn. De *ingesloten hoek* bij het tweede geval betekent dat de hoek die je weet, precies in ligt tussen de twee zijdes die je weet. Bijvoorbeeld: als  $\angle A = \angle D$ ,  $|AB| = |DE|$  en  $|AC| = |DF|$ , dan zijn driehoeken  $\triangle ABC$  en  $\triangle DEF$  congruent wegens het geval ZHZ:  $\angle A$  is de hoek die ingesloten is tussen de zijden  $AB$  en  $AC$ . Echter, als je in plaats van  $\angle A = \angle D$  hebt dat  $\angle B = \angle E$ , dan wil dat nog niet zeggen dat de driehoeken congruent zijn (zie ook opgave 61). De hoek die je dan weet, is nu niet de ingesloten hoek tussen de twee zijden die je weet, dus je zou in geval ZZH zitten, maar die staat niet in bovenstaand lijstje. Is de hoek  $\angle B = \angle E$  echter recht, dan heb je toch congruente driehoeken, op grond van ZZR.

Als twee driehoeken congruent zijn, dan noteren we dat als  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . Vaak zetten we er dan tussen haakjes de “code” van het congruentiegeval achter, bijvoorbeeld (ZHZ). Let bij het opschrijven van een congruentie goed op de volgorde van de hoekpunten van de driehoeken! De volgorde moet zo zijn dat de hoeken bij de eerst genoemde hoekpunten,  $A$  en  $D$ , gelijk zijn; en zo ook voor het paar  $B$  en  $E$  en het paar  $C$  en  $F$ . Op die manier kun je meteen zien welke zijden er gelijk zijn: de zijden gevormd door de eerste twee letters links en rechts zijn gelijk, net als de zijden gevormd door de laatste twee letters en de zijden gevormd door de eerste en laatste letters.

Als je eenmaal weet dat vanwege een van de gevallen hierboven twee driehoeken congruent zijn, dan volgt daaruit dat de drie paren hoeken en de drie paren zijden allemaal gelijk zijn. Dat geeft je dus weer nieuwe informatie. Dit is een manier om te bewijzen dat twee hoeken of twee zijden gelijk zijn.

**Voorbeeld 16.** *Bekijk een lijnstuk  $AB$  en twee punten  $C$  en  $D$  aan dezelfde kant van  $AB$  zodat  $\angle CAB = \angle DBA$  en  $\angle CBA = \angle DAB$ . Bewijs dat  $|BC| = |AD|$ .*

**Oplossing** We hebben al twee paren gelijke hoeken. De hoeken  $\angle CAB$  en  $\angle CBA$  zitten in driehoek  $\triangle ABC$ , terwijl de hoeken  $\angle DBA$  en  $\angle DAB$  in driehoek  $\triangle ABD$  zitten. We zien

dat hoek  $\angle A$  in driehoek  $\triangle ABC$  gelijk is aan hoek  $\angle B$  in driehoek  $\triangle ABD$  en andersom. Als deze driehoeken congruent zijn, dan geldt in de goede volgorde dus  $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ . Om dit te bewijzen kiezen we congruentiegeval 4 hierboven: HZH. We hebben de twee hoeken al. De ingesloten zijde is in de ene driehoek  $AB$  en in de andere  $BA$ . Deze zijn natuurlijk even lang. Dus wegens HZH geldt  $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ . Hieruit volgt  $|BC| = |AD|$ .  $\square$

## 8.2 Gelijkvormigheid

Zoals we hierboven hebben gezien, hebben twee congruente driehoeken precies dezelfde vorm en grootte. De ene driehoek is als het ware een kopie van de ander, die op een andere plek in je tekening neergelegd is. Wat nou als we een driehoek zouden kopiëren en daarbij met een bepaalde factor zouden vergroten of verkleinen? De vorm van de driehoek verandert dan niet, maar de grootte wel. Anders gezegd: de hoeken blijven gelijk en de verhoudingen tussen de lengtes van de zijden ook, maar de lengtes van de zijden zelf veranderen. Dit noemen we gelijkvormigheid en noteren we met  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Let ook hier altijd weer goed op de volgorde. Voor gelijkvormige driehoeken  $\triangle ABC$  en  $\triangle DEF$  geldt

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

en

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Net als bij congruentie, heb je niet al deze gegevens nodig om te kunnen concluderen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Als je bijvoorbeeld weet dat  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$  en ook nog dat de hoeken die door deze zijden worden ingesloten gelijk zijn (dus  $\angle B = \angle E$ ) dan volgt daar al uit dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn. Dat is het tweede geval van de gelijkvormigheidsgevallen hieronder:

1. de verhoudingen van de drie paren zijden (zzz),
2. de verhoudingen van twee paar zijden en de ingesloten hoek (zhz),
3. de verhouding van twee paar zijden en een rechte hoek (zzr),
4. twee hoeken (hh).

Net als bij congruentie gebruiken we “codes” van twee of drie letters om aan te geven uit welk geval de gelijkvormigheid volgt. Bij gelijkvormigheid schrijven we deze codes met kleine letters, terwijl we bij congruentie altijd hoofdletters gebruiken.

Bij de verhoudingen zoals we die hierboven hebben opgeschreven, deel je steeds de lengte van de een zijde in de eerste driehoek door de lengte van de overeenkomstige zijde in de tweede driehoek. Als je dit voor alledrie de zijden doet, krijg je steeds dezelfde verhouding. Je kunt ook in plaats daarvan juist twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen. Als je de overeenkomstige zijden van de andere driehoek door elkaar deelt, komt er hetzelfde uit. Kortom, bij een gelijkvormigheid  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  geldt niet alleen

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

maar ook

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}.$$

Dat dit eigenlijk gewoon hetzelfde is, kun je zien door kruislings te vermenigvuldigen. Zowel bij de eerste als bij de tweede gelijkheid krijg je dan  $|AB| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE|$ .

**Voorbeeld 17.** Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn met  $|AB| = 6$  en  $|BC| = 3$ . Op zijde  $BC$  ligt een punt  $D$  met  $|BD| = 1$ . Op zijde  $AB$  ligt een punt  $E$  zodat de lijnen  $ED$  en  $AC$  evenwijdig zijn. Hoe groot is  $|AE|$ ?

**Oplossing** Vanwege F-hoeken geldt  $\angle BCA = \angle BDE$  en  $\angle CAB = \angle DEB$ . Dus hebben we een gelijkvormigheid:  $\triangle ABC \sim \triangle EBD$  (hh). Nu kunnen we kiezen welke soort verhoudingen we gaan gebruiken. Laten we eerst eens twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen en dat ook bij de andere driehoek doen:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EB|}{|BD|}.$$

We weten  $|AB| = 6$  en  $|BC| = 3$ , dus links staat 2. De breuk rechts moet dan ook wel gelijk zijn aan 2 en verder weten we dat  $|BD| = 1$ . Dus  $|EB| = 2$ . Daaruit volgt  $|AE| = 6 - 2 = 4$ .

Als we juist twee overeenkomstige zijden van verschillende driehoeken door elkaar delen, dan krijgen we

$$\frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$

We weten  $|BC| = 3$  en  $|BD| = 1$ , dus rechts staat 3. De breuk links moet dan ook wel gelijk zijn aan 3 en verder weten we dat  $|AB| = 6$ . Dus  $|EB| = 2$ . Daaruit volgt weer  $|AE| = 4$ .  $\square$

### 8.3 Opgaven

**Opgave 61.** Teken twee niet-congruente driehoeken  $\triangle ABC$  en  $\triangle DEF$  zodat  $\angle B = \angle E$ ,  $|AB| = |DE|$  en  $|AC| = |DF|$ .

**Opgave 62.** In een driehoek  $\triangle ABC$  met  $|AC| = |BC|$  is  $M$  het midden van zijde  $AB$ .

(a) Bewijs dat  $\triangle AMC \cong \triangle BMC$ .

(b) Bewijs dat  $\angle ACM = \angle BCM$ .

**Opgave 63.** Laat  $M$  het middelpunt van een cirkel zijn waar  $A$  en  $B$  op liggen. Bewijs dat als  $N$  het midden is van  $AB$  dat dan  $\angle ANM = \angle BNM = 90^\circ$ .

**Opgave 64.** Gegeven zijn twee lijnstukken  $AB$  en  $CD$  met snijpunt  $S$  zodat  $S$  het midden is van  $AB$  en het midden van  $CD$ . Bewijs dat de lijnen  $AC$  en  $BD$  evenwijdig zijn.

**Opgave 65.** Laat driehoek  $\triangle ABC$  een driehoek zijn met  $\angle C < \angle A$ . Laat  $D$  een punt op zijde  $BC$  zijn zodat  $\angle BDA = \angle BAC$ . Bewijs dat  $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$ .

**Opgave 66.** In driehoek  $ABC$  ligt punt  $D$  op zijde  $AB$  tussen  $A$  en  $B$  en punt  $E$  op zijde  $AC$  tussen  $A$  en  $C$  zodat  $|AD| = \frac{1}{2}|DB|$  en  $|AE| = \frac{1}{2}|EC|$ . Bewijs dat

(a)  $BC$  evenwijdig is aan  $DE$ ;

(b)  $|DE| = \frac{1}{3}|BC|$ .

**Opgave 67.** Laat  $P$  een punt zijn buiten de cirkel  $C$  met middelpunt  $M$ . Bewijs dat de raaklijnen<sup>2</sup> aan  $C$  die door  $P$  gaan even lang zijn.

**Opgave 68.** In driehoek  $\triangle ABC$  is  $D$  een punt op zijde  $BC$  en  $E$  een punt op zijde  $AC$ , zodat  $\angle ADB = \angle AEB$ . Bewijs dat  $\triangle ACB \sim \triangle DCE$ .

## 9 Driehoeken

We gaan kijken naar een paar speciale driehoeken en hun eigenschappen.

### 9.1 Gelijkbenige driehoek

Een driehoek met twee even lange zijden noemen we een *gelijkbenige* driehoek. De hoek ingesloten door de gelijke zijden heet de *tophoek* en de andere hoeken heten de *basishoeken*. Over gelijkbenige driehoeken bestaat een heel bekende stelling:

**Stelling 9.1.1** (Stelling van de gelijkbenige driehoek). *Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. Dan geldt*

---

<sup>2</sup>Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die de cirkel maar één keer snijdt. De lijn die het raakpunt verbindt met het middelpunt van de cirkel, staat loodrecht op de raaklijn.

➤ als je weet dat  $\angle B = \angle C$ , dan weet je ook dat  $|AB| = |AC|$  en

➤ als je weet dat  $|AB| = |AC|$ , dan weet je ook dat  $\angle B = \angle C$ .

Met andere woorden, als je weet dat een driehoek gelijkbenig is (dus twee gelijke zijden heeft), dan weet je meteen ook dat de basishoeken gelijk zijn. Als je andersom weet dat een driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan is het een gelijkbenige driehoek met als tophoek juist de derde hoek. Laten we eens kijken hoe we deze stelling kunnen bewijzen.

### Bewijs

➤ Neem aan dat we  $\angle B = \angle C$  weten. Definieer dan  $D$  als het punt op  $BC$  waarvoor  $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADC$ . Dan geldt  $\triangle BDA \cong \triangle CDA$  (HHZ): immers,  $\angle B = \angle C$ ,  $\angle ADB = \angle ADC$  en  $|AD| = |AD|$ . Uit de congruentie volgt  $|AB| = |AC|$  direct.

➤ Neem nu aan dat  $|AB| = |AC|$ . Laat  $D$  nu het midden van  $BC$  zijn, dan geldt  $\triangle BDA \cong \triangle CDA$  (ZZZ). Er geldt namelijk dat  $|AB| = |AC|$ ,  $|BD| = |CD|$  en  $|AD| = |AD|$ . Uit de congruentie volgt nu  $\angle B = \angle C$ .  $\square$

Omdat de stelling uit twee verschillende delen bestaat, hebben we voor elk deel een apart bewijs gegeven. Vanaf nu mogen we deze stelling zonder bewijs toepassen (want we hebben hem al bewezen). We weten dus nu dat een driehoek gelijkbenig is precies dan als hij twee gelijke hoeken heeft. Wiskundigen gebruiken ook wel de uitdrukking “dan en slechts dan als” hiervoor: voor een driehoek  $\triangle ABC$  geldt  $|AB| = |AC|$  dan en slechts dan als  $\angle B = \angle C$ .

We hadden eigenlijk net zo goed een gelijkbenige driehoek kunnen definiëren als een driehoek met twee gelijke hoeken. Met de stelling hierboven volgt daar toch uit dat de driehoek dan ook twee gelijke zijden heeft. We noemen dat *equivalente definities* van de gelijkbenige driehoek: het maakt niet uit of je een gelijkbenige driehoek nou op de ene of op de andere manier definieert.

**Equivalente definities 1** (Gelijkbenige driehoek). *Een gelijkbenige driehoek is een driehoek*

- met twee gelijke hoeken;
- met twee gelijke zijden.

## 9.2 Gelijkzijdige driehoek

Een driehoek waarvan zelfs alledrie de zijden even lang zijn, heet een *gelijkzijdige* driehoek. Ook deze speciale eigenschap kunnen we vertalen in de hoeken van de driehoek.

**Stelling 9.2.1** (Stelling van de gelijkzijdige driehoek). *Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. Dan geldt  $|AB| = |BC| = |CA|$  dan en slechts dan als  $\angle A = \angle B = \angle C$ .*

**Bewijs** Omdat dit een “dan en slechts dan”-stelling is, bestaat het bewijs weer uit twee delen.

- Neem eerst aan dat  $|AB| = |BC| = |CA|$ . Omdat  $|AB| = |BC|$ , is de driehoek gelijkbenig met tophoek  $B$  en geldt volgens de stelling van de gelijkbenige driehoek dat  $\angle A = \angle C$ . Ook weten we dat  $|BC| = |CA|$  en dus is de driehoek gelijkbenig met tophoek  $C$ . Hieruit volgt  $\angle A = \angle B$ . Als we dit samenvoegen, zien we dat  $\angle A = \angle B = \angle C$ .
- Neem nu aan dat  $\angle A = \angle B = \angle C$ . We passen weer de stelling van de gelijkbenige driehoek toe, maar nu de andere kant op. Uit  $\angle A = \angle B$  volgt dat  $|CA| = |BC|$  (want  $\triangle ABC$  is gelijkbenig met tophoek  $C$ ) en uit  $\angle A = \angle C$  volgt dat  $|AB| = |BC|$  (want  $\triangle ABC$  is gelijkbenig met tophoek  $B$ ). Dus  $|AB| = |BC| = |CA|$ .  $\square$

De som van de hoeken van elke driehoek is  $180^\circ$ , dus dat geldt ook voor een gelijkzijdige driehoek. Omdat alle hoeken van een gelijkzijdige driehoek ook nog eens gelijk zijn, moeten al deze hoeken dan gelijk zijn aan  $60^\circ$ . Andersom geldt natuurlijk dat als twee hoeken van een driehoek allebei  $60^\circ$  zijn, dat dan de derde ook wel  $60^\circ$  moet zijn en daar volgt dan weer uit dat de driehoek gelijkzijdig is. Al met al krijgen we de volgende equivalente definities voor een gelijkzijdige driehoek:

**Equivalente definities 2** (Gelijkzijdige driehoek). *Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek*

- *waarin alle hoeken gelijk zijn;*
- *waarin twee hoeken gelijk zijn aan  $60^\circ$ ;*
- *met drie gelijke zijden;*
- *die gelijkbenig is met een tophoek van  $60^\circ$ .*

Onthoud deze equivalente definities, zodat je op elk moment degene kunt gebruiken die in die situatie het handigste uitkomt.

### 9.3 Rechthoekige driehoek

Ten slotte zijn er nog de driehoeken waarvan een van de hoeken gelijk is  $90^\circ$ . Aangezien een hoek van  $90^\circ$  een rechte hoek genoemd wordt, zegt men dat zo'n driehoek *rechthoekig* is. Een zeer beroemde stelling over dit soort driehoeken is de stelling van Pythagoras.

**Stelling 9.3.1** (Stelling van Pythagoras). *Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. Dan geldt  $\angle A = 90^\circ$  dan en slechts dan als  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ .*

**Bewijs** Door de “dan en slechts dan” bestaat dit bewijs weer uit twee delen.

- Stel dat  $\angle A = 90^\circ$  en laat  $D$  het punt op  $BC$  zijn zodat  $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ . Dan geldt  $\angle ABC = \angle DBA$  en  $\angle ADB = 90^\circ = \angle CAB$ . Hieruit volgt de gelijkvormigheid  $\triangle ABC \sim \triangle DBA$  (hh). Verder is  $\angle ACB = \angle DCA$  en  $\angle CDA = 90^\circ = \angle CAB$ . Hieruit volgt de gelijkvormigheid  $\triangle ABC \sim \triangle DAC$  (hh).

Uit de eerste gelijkvormigheid volgt  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DB|}{|BA|}$  en uit de tweede volgt  $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$ . Omdat  $|BD| + |DC| = |BC|$ , geldt

$$|BC|^2 = |BC| \cdot (|BD| + |DC|) = |BC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |DC|.$$

Als we de verhoudingen die we net gevonden hebben, kruislings vermenigvuldigen, krijgen we  $|BC| \cdot |BD| = |AB|^2$  en  $|BC| \cdot |DC| = |AC|^2$ . Dit vullen we in en we vinden  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ .

- Stel nu dat  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$  en definieer  $D$  als het punt op  $BC$  zodat  $\angle BAD = \angle BCA$ . Dan volgt daaruit, samen met  $\angle DBA = \angle ABC$ , dat  $\triangle DBA \sim \triangle ABC$  (hh) en dus  $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ . Kruislings vermenigvuldigen geeft  $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$ .

Nu geldt  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |BC| \cdot |BD| + |AC|^2$ , dus

$$|AC|^2 = |BC|^2 - |BC| \cdot |BD| = |BC| \cdot (|BC| - |BD|) = |BC| \cdot |DC|.$$

Dit kunnen we herschrijven tot  $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ . We weten bovendien dat  $\angle BCA = \angle ACD$  en dat zijn precies de ingesloten hoeken, dus geldt  $\triangle DAC \sim \triangle ABC$  (zhz). Hieruit volgt  $\angle ADC = \angle BAC$ . Uit de gelijkvormigheid die we al eerder hadden, volgt  $\angle BDA = \angle BAC$ . We concluderen dat  $\angle ADC = \angle BDA$ . Maar deze twee hoeken vormen samen ook een gestrekte hoek, dus ze zijn samen  $180^\circ$  en dat betekent dat ze elk precies  $90^\circ$  zijn. Dus  $\angle BAC$  is ook  $90^\circ$ .

Alternatief: Definieer  $Z$  als het punt op  $AB$  zodat  $\angle BZC = 90^\circ$ . We willen bewijzen dat  $Z$  hetzelfde punt is als  $A$ . Neem daarom even aan dat dat niet zo is; we gaan laten zien dat dat niet kan. Wegens de net bewezen richting van de stelling van Pythagoras in driehoek  $\triangle ZBC$  geldt  $|BC|^2 = |ZB|^2 + |ZC|^2$ . Omdat we aangenomen hebben dat  $Z$  ongelijk is aan  $A$ , kunnen we bovendien ook Pythagoras toepassen in

driehoek  $\triangle ZAC$  en dat geeft  $|AC|^2 = |ZA|^2 + |ZC|^2$ . Dit vullen we in in het gegeven  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$  zodat we krijgen  $|ZB|^2 + |ZC|^2 = |AB|^2 + |ZA|^2 + |ZC|^2$  en dus  $|ZB|^2 = |AB|^2 + |ZA|^2$ . We gaan nu op een andere manier  $|ZB|$  uitdrukken in  $|AB|$  en  $|ZA|$ . Dit hangt af van hoe  $A$ ,  $B$  en  $Z$  op een lijn liggen.

- Als  $Z$  tussen  $A$  en  $B$  ligt, geldt  $|ZB| = |AB| - |ZA|$ .
- Als  $A$  tussen  $Z$  en  $B$  ligt, geldt  $|ZB| = |AB| + |ZA|$ .
- Als  $B$  tussen  $Z$  en  $A$  ligt, geldt  $|ZB| = |ZA| - |AB|$ .

Al met al geldt ofwel  $|ZB|^2 = |AB|^2 + |ZA|^2 - 2|AB||ZA|$  ofwel  $|ZB|^2 = |AB|^2 + |ZA|^2 + 2|AB||ZA|$ . Maar we wisten al dat  $|ZB|^2 = |AB|^2 + |ZA|^2$ . We concluderen dat  $2|AB||ZA| = 0$ . Echter,  $A$  is verschillend van zowel  $Z$  als  $B$ , dus  $2|AB||ZA| > 0$ . Dit klopt niet. Uiteindelijk vinden we dus dat  $Z$  en  $A$  hetzelfde punt zijn en dat dus geldt  $\angle BAC = 90^\circ$ .  $\square$

## 9.4 Opgaven

**Opgave 69.** *Op een gelijkzijdige driehoek  $\triangle ABC$  zetten we aan de buitenkant gelijkbenige driehoeken  $ABP$ ,  $BCQ$  en  $CAR$ , zodat de top hoeken  $\angle APB$ ,  $\angle BQC$  en  $\angle CRA$  allemaal gelijk zijn en groter dan  $60^\circ$ . Bewijs dat  $\triangle PQR$  gelijkzijdig is.*

**Opgave 70.** *Aan weerszijden van lijn  $AB$  liggen de punten  $C$  en  $D$  zodat driehoeken  $\triangle ABC$  en  $\triangle ABD$  gelijkbenig zijn met top hoeken respectievelijk  $C$  en  $D$ . Bewijs dat  $CD$  loodrecht staat op  $AB$ .*

**Opgave 71.** *In een rechthoekige driehoek  $\triangle ABC$  met  $\angle C = 90^\circ$  ligt punt  $D$  op zijde  $AB$  zodat  $\angle ADC = 90^\circ$ . Bewijs dat  $|CD| = \sqrt{|AD||BD|}$ .*

**Opgave 72.** *Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. De punten  $S$  en  $T$  liggen in het vlak zodanig dat  $\triangle ABS$  en  $\triangle ACT$  gelijkzijdige driehoeken zijn die  $\triangle ABC$  niet overlappen. Bewijs dat  $|BT| = |CS|$ .*

**Opgave 73.** *Laat  $ABCD$  een vierhoek zijn waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Bewijs dat  $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ .*

**Opgave 74** (Stelling van Thales). *Bekijk een cirkel met middellijn  $AB$  en een punt  $C$  op de cirkel, ongelijk aan  $A$  en  $B$ . Bewijs dat  $\angle ACB = 90^\circ$ .*

### Opgave 75. *Finale 2004*

*Twee cirkels  $A$  en  $B$ , beide met straal 1, raken elkaar uitwendig. Vier cirkels  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  en  $S$ , alle ongelijk aan  $A$  en  $B$ , en alle vier met dezelfde straal  $r$ , liggen zo dat  $P$  uitwendig raakt aan  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  en  $S$ ;  $Q$  uitwendig raakt aan  $P$ ,  $B$  en  $R$ ;  $R$  uitwendig raakt aan  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  en  $S$ ; en  $S$  uitwendig raakt aan  $P$ ,  $A$  en  $R$ . Bereken de lengte van  $r$ .*

### Opgave 76. Finale 2004

Twee cirkels  $C_1$  en  $C_2$  raken elkaar uitwendig in een punt  $P$ . Op  $C_1$  ligt een punt  $Q$  zodanig dat de raaklijn in  $Q$  aan  $C_1$  de cirkel  $C_2$  snijdt in de punten  $A$  en  $B$ . De lijn  $QP$  snijdt  $C_2$  nog in punt  $C$ . Bewijs dat driehoek  $\triangle ABC$  gelijkbenig is.

## 10 Vierhoeken

Een *vierhoek* bestaat uit vier punten en vier zijden. We geven de punten aan met hoofdletters, waarbij je even op de volgorde moet letten: bij een vierhoek  $ABCD$  kom je de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  in die volgorde tegen als je een rondje loopt over de zijden. Zo'n vierhoek heeft dus zijden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$ . De *diagonalen* van de vierhoek zijn  $AC$  en  $BD$ .

Net als driehoeken hebben ook vierhoeken een vaste hoekensom: de som van de hoeken van een vierhoek is altijd gelijk aan  $360^\circ$ . Dat kun je inzien door de vierhoek op te delen in twee driehoeken door middel van een van de diagonalen.

We bekijken een aantal speciale vierhoeken.

### 10.1 Trapezium

Een *trapezium* is een vierhoek met minstens één paar evenwijdige zijden. Als  $ABCD$  een trapezium is met  $AB$  evenwijdig aan  $CD$ , dan zijn vanwege U-hoeken (zie opgave 58) de hoeken  $\angle B$  en  $\angle C$  samen  $180^\circ$ . Dit geldt ook voor  $\angle A$  en  $\angle D$ .

Andersom is het zo dat als in een vierhoek  $ABCD$  geldt dat  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ , dat dan wegens U-hoeken de zijden  $AB$  en  $CD$  evenwijdig zijn. Dus we hebben de volgende equivalente definities voor een trapezium:

**Equivalente definities 3** (Trapezium). *Een trapezium is een vierhoek*

- met een paar evenwijdige zijden;
- waarin er twee aangrenzende hoeken zijn die samen  $180^\circ$  zijn.

### 10.2 Parallellogram

Een *parallellogram* een vierhoek met twee paren evenwijdige, oftewel parallelle (vandaar de naam) zijden. Dit is dus een speciaal trapezium: eentje waarin het andere paar zijden ook

evenwijdig is. Parallellogrammen hebben allerlei bijzondere eigenschappen. Het voorbeeld hieronder laat er één van zien.

**Voorbeeld 18.** *Laat  $ABCD$  een parallellogram zijn. Bewijs dat de diagonalen  $AC$  en  $BD$  elkaar middendoor delen (dat wil zeggen, het snijpunt van de diagonalen is het midden van lijnstuk  $AC$  en ook het midden van lijnstuk  $BD$ ).*

**Oplossing** Wegens  $Z$ -hoeken geldt  $\angle ADB = \angle CBD$  en  $\angle ABD = \angle CDB$ . Omdat driehoeken  $\triangle ABD$  en  $\triangle CDB$  allebei zijde  $BD$  bevatten, zijn deze twee driehoeken congruent (HZH). Hieruit volgt  $|AB| = |CD|$  en  $|AD| = |CB|$ . (Dit is een van de andere bijzondere eigenschappen van een parallellogram: de overstaande zijden zijn even lang.) Noem  $S$  het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram. We weten al  $|AD| = |CB|$  en  $\angle ADS = \angle CBS$ . Verder geldt vanwege overstaande hoeken dat  $\angle ASD = \angle CSB$ , dus we vinden de congruentie  $\triangle ADS \cong \triangle CBS$  (HHZ). Hieruit volgt  $|AS| = |CS|$  (dus  $S$  is het midden van  $AC$ ) en  $|DS| = |BS|$  (dus  $S$  is het midden van  $BD$ ). Dus de diagonalen snijden elkaar middendoor.  $\square$

Andersom geldt ook dat als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, deze vierhoek een parallellogram moet zijn. Zo vinden we weer een aantal equivalente definities:

**Equivalente definities 4** (Parallellogram). *Een parallellogram is een vierhoek*

- *met twee paren evenwijdige zijden;*
- *met twee paren gelijke overstaande zijden;*
- *waarin twee overstaande zijden gelijk en evenwijdig zijn;*
- *waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.*

Dit zijn niet de enige equivalente definities van een parallellogram. Er mag met enige mate geschoven worden met de eigenschappen, zoals opgave 78 laat zien.

### 10.3 Ruit

Een parallellogram heeft twee paren gelijke zijden. Als alle vier de zijden even lang zijn, dan noemen we de vierhoek een *ruit*. Een ruit is dus een bijzonder parallellogram. We kunnen de ruit definiëren als een parallellogram met een extra eigenschap, bijvoorbeeld een van degene hieronder:

**Equivalente definities 5** (Ruit). *Een ruit is*

- een vierhoek met vier gelijke zijden;
- een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt;
- parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

## 10.4 Rechthoek

Een ander speciaal geval van een parallellogram is de *rechthoek*. Ook deze kunnen we op meerdere manieren definiëren.

**Equivalente definities 6** (Rechthoek). *Een rechthoek is*

- een vierhoek met vier rechte hoeken;
- een parallellogram met een rechte hoek;
- een parallellogram met gelijke diagonalen.

## 10.5 Vierkant

Ten slotte is er nog een heel bekend geval: het *vierkant*. Het is zowel een bijzondere situatie van de ruit en de rechthoek (en dus automatisch ook van het parallellogram). Hierdoor zijn er vele manieren om het vierkant te definiëren (zie opgave 77). De meest bekende definitie is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.

## 10.6 Opgaven

**Opgave 77.** *Bedenk zelf minstens vier equivalente definities voor een vierkant.*

**Opgave 78.** *Geef bij de volgende opgaven steeds een tegenvoorbeeld of een bewijs.*

- Laat  $ABCD$  een vierhoek zijn met  $S$  het snijpunt van de diagonalen. Stel dat  $S$  het midden van  $AC$  is en geldt dat  $AB$  en  $CD$  evenwijdig zijn. Is  $ABCD$  een parallellogram?
- Laat  $ABCD$  een vierhoek zijn met  $\angle A = \angle C$  en  $\angle B = \angle D$ . Is  $ABCD$  een parallellogram?
- Laat  $ABCD$  een vierhoek zijn. Stel dat de zijden  $AD$  en  $BC$  evenwijdig zijn en dat geldt  $|AB| = |CD|$ . Is  $ABCD$  een parallellogram?

**Opgave 79.** Laat  $ABCD$  een trapezium zijn met  $AB \parallel CD$ . Op de lijn  $CD$  ligt een punt  $X$  zodat  $\angle CBX = \angle ABX$ . Op de lijn  $AB$  ligt een punt  $Y$  zodat  $\angle BCY = \angle DCY$ . Bewijs dat de lijnen  $BX$  en  $CY$  elkaar loodrecht snijden.

**Opgave 80.** Op een cirkel met middelpunt  $M$  liggen verschillende punten  $A$ ,  $B$  en  $P$  zodat  $AB$  een middellijn<sup>3</sup> van de cirkel is. Op de lijn  $MP$  ligt een punt  $N$  zodat  $P$  het midden is van  $MN$ . Op de lijn door  $N$  evenwijdig aan  $AB$  liggen punten  $C$  en  $D$  zodat  $N$  het midden is van  $CD$ ,  $|CD| = |AB|$ , en  $B$  en  $C$  aan dezelfde kant van  $MN$  liggen. Bewijs dat  $ABCD$  een ruit is.

**Opgave 81.** Binnen in een rechthoek  $ABCD$  kiezen we een punt  $P$ . Op zijden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$  liggen respectievelijk punten  $K$ ,  $L$ ,  $M$  en  $N$  zodat de lijnen  $PK$ ,  $PL$ ,  $PM$  en  $PN$  loodrecht staan op de respectievelijke zijden. Vind alle punten  $P$  zodat  $KLMN$  een ruit is.

**Opgave 82. Finale 2000**

Laat  $ABCD$  een parallellogram zijn. Aan de buitenkant van het parallellogram wordt op zijde  $AB$  een gelijkzijdige driehoek  $ABP$  gezet, en op zijde  $AD$  een gelijkzijdige driehoek  $ADQ$ . Bewijs dat driehoek  $\triangle CPQ$  gelijkzijdig is.

**Opgave 83. Finale 2005**

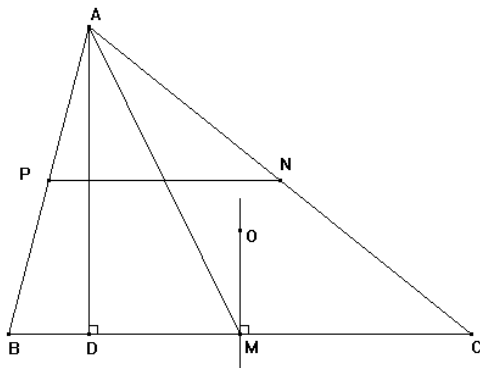
Bekijk een trapezium  $ABCD$  met  $AB$  evenwijdig aan  $CD$  en  $|AB| > |CD|$ . De diagonalen  $AC$  en  $BD$  snijden elkaar in het punt  $S$ . Het verlengde van  $AD$  snijdt het verlengde van  $BC$  in het punt  $T$ . Bewijs dat de lijn door  $S$  en  $T$  door de middens van de zijden  $AB$  en  $CD$  gaat.

## 11 Lijnen in een driehoek

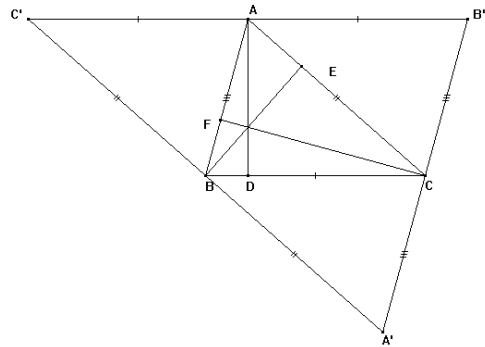
In dit hoofdstuk zullen we gaan kijken naar een aantal speciale lijnen in een driehoek. Bekijk een driehoek  $\triangle ABC$  met  $M$  het midden van zijde  $BC$ ,  $N$  het midden van zijde  $CA$  en  $P$  het midden van zijde  $AB$ . Trek ook de lijn vanuit  $A$  loodrecht op zijde  $BC$ . Het snijpunt van deze lijn met zijde  $BC$  noemen we  $D$ . We zeggen ook wel dat  $D$  de (loodrechte) projectie van  $A$  op zijde  $BC$  is. Dat betekent dus gewoon dat  $D$  een punt is op zijde  $BC$  zó dat  $DA$  loodrecht staat op  $BC$ . We noemen  $E$  de projectie van  $B$  op  $CA$  en zo ook  $F$  de projectie van  $C$  op  $AB$ . Het zou natuurlijk kunnen dat sommige van deze punten, bijvoorbeeld  $M$  en  $D$ , samenvallen. Bij sommige speciale driehoeken gebeurt dat. Het kan ook dat de punten  $D$ ,  $E$  en  $F$  niet allemaal binnen de driehoek liggen. Dan liggen ze eigenlijk op het verlengde van een zijde van de driehoek in plaats van op de zijde zelf.

---

<sup>3</sup> $AB$  is een middellijn als het middelpunt van de cirkel op  $AB$  ligt.



**Figuur 4.** Een middenparallel  $NP$ , zwaartelijn  $AM$ , middelloodlijn  $MO$  en een hoogtelijn  $AD$  in driehoek  $\triangle ABC$



**Figuur 5.** Drie hoogtelijnen in driehoek  $\triangle ABC$  en ondersteuning bij het bewijs van hun gemeenschappelijke punt

## 11.1 Middenparallelle

Een *middenparallel* is een lijnstuk dat de middens van twee zijden verbindt. Zo zijn  $MN$ ,  $NP$  en  $PM$  de middenparallelle van driehoek  $\triangle ABC$  (zie ook figuur 4). Als je eens een paar driehoeken met hun middenparallelle tekent, dan valt het je wellicht op dat elke middenparallelle evenwijdig loopt aan een zijde van de driehoek. Dit is altijd waar, zoals de volgende stelling laat zien.

**Stelling 11.1.1.** *De middenparallelle van een driehoek zijn evenwijdig aan de zijden van de driehoek en hebben precies de halve lengte van die evenwijdige zijde. De driehoek gevormd door de middenparallelle is dus gelijkvormig aan de oorspronkelijk driehoek met een factor  $\frac{1}{2}$ .*

**Bewijs** Omdat  $N$  het midden is van  $AC$ , geldt  $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$ . Zo ook is  $|AP| = \frac{1}{2}|AB|$ . Verder geldt  $\angle BAC = \angle PAN$ , waaruit we nu concluderen dat  $\triangle ABC \sim \triangle APN$  (zhz) met een verkleiningsfactor van 2. Dus  $|PN| = \frac{1}{2}|BC|$ . Natuurlijk kunnen we op precies dezelfde manier laten zien dat  $|NM| = \frac{1}{2}|AB|$  en  $|PM| = \frac{1}{2}|AC|$ . Hieruit volgt dat  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$  (zzz) met wederom verkleiningsfactor 2. Verder volgt uit de eerste gelijkvormigheid dat  $\angle ANP = \angle ACB$  en dus met F-hoeken dat  $NP \parallel BC$ . Op dezelfde manier zien we ook dat  $MN \parallel AB$  en  $MP \parallel AC$ .  $\square$

## 11.2 Zwaartelijnen

Het lijnstuk dat in een driehoek een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde heet een *zwaartelijn*. De drie zwaartelijnen  $AM$ ,  $BN$  en  $CP$  van een driehoek gaan

altijd door één punt. In het bewijs van deze speciale eigenschap komt men nog een belangrijke eigenschap van zwaartelijnen tegen. Beide waarnemingen staan in de volgende stelling.

**Stelling 11.2.1.** *De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zogenaamde zwaartepunt van de driehoek. Bovendien wordt iedere zwaartelijn door het zwaartepunt verdeeld in twee lijnstukken die zich verhouden als 2 : 1.*

**Bewijs** Definieer  $Z$  als het snijpunt van  $AM$  met  $CP$ . Aangezien  $MP$  een middenparallel is in driehoek  $\triangle ABC$  geldt volgens stelling 11.1.1 dat  $MP \parallel AC$ . Met Z-hoeken volgt daaruit dat  $\angle PMZ = \angle ZAC$  en  $\angle MPZ = \angle ACZ$  en dus  $\triangle ACZ \sim \triangle MPZ$  (hh). Uit die gelijkvormigheid volgt dat  $\frac{|AZ|}{|MZ|} = \frac{|AC|}{|MP|}$ . Maar stelling 11.1.1 zegt dat die laatste verhouding gelijk is aan 2 dus  $\frac{|AZ|}{|MZ|} = 2$ . Als we nu  $Z'$  definiëren als het snijpunt van  $AM$  met  $BN$  dan krijgen we op dezelfde manier  $\frac{|AZ'|}{|MZ'|} = 2$ . Aangezien zowel  $Z$  als  $Z'$  binnen de driehoek liggen (en dus niet op het verlengde van  $AM$ ) moet wel gelden dat  $Z = Z'$ . Dus gaan de drie zwaartelijnen door één punt en hebben we onderweg ook de tweede eigenschap bewezen.  $\square$

### 11.3 Middelloodlijnen

Een *middelloodlijn* van een lijnstuk is de lijn die door het midden van het lijnstuk gaat en bovendien loodrecht op het lijnstuk staat. Een nuttig lemma<sup>4</sup> is het volgende:

**Lemma 11.3.1.** *Een punt  $Z$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$  dan en slechts dan als  $|ZA| = |ZB|$ .*

Met bovenstaand lemma kunnen we laten zien dat ook de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan.

**Stelling 11.3.2.** *De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt.*

**Bewijs** Laat  $O$  het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $BC$  zijn. Dan geldt volgens lemma 11.3.1 dat  $|OA| = |OB|$  (want  $O$  ligt op de middelloodlijn van  $AB$ ) en  $|OB| = |OC|$  (want  $O$  ligt op de middelloodlijn van  $BC$ ). Daaruit volgt  $|OA| = |OC|$  en dus ligt volgens lemma 11.3.1 het punt  $O$  op de middelloodlijn van  $AC$ . De middelloodlijn van zijde  $AC$  gaat dus door het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $BC$ ; oftewel, ze gaan met z'n drieën door één punt.  $\square$

---

<sup>4</sup>Een lemma is “kleine” stelling die men gebruikt om een andere stelling te bewijzen.

Blijkbaar bestaat er voor iedere driehoek een punt dat gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten van die driehoek. Dan is  $O$  dus het middelpunt van een cirkel die door alle hoekpunten gaat. Deze cirkel noemt men de *omgeschreven cirkel* van  $\triangle ABC$ .

## 11.4 Hoogtelijnen

In onze driehoek  $\triangle ABC$  staat de lijn  $AD$  loodrecht op zijde  $BC$ . We noemen deze lijn de *hoogtelijn* vanuit punt  $A$ . Zo ook is  $BE$  de hoogtelijn vanuit  $B$  en  $CF$  de hoogtelijn vanuit  $C$ . Deze lijnen zijn belangrijk als je de oppervlakte van een driehoek wilt berekenen: de oppervlakte van een driehoek is een half keer basis keer hoogte. Met basis  $BC$  en hoogtelijn  $AD$  geeft dat bijvoorbeeld:  $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD|$ .

**Stelling 11.4.1.** *De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dit punt noemt men het hoogtepunt van de driehoek.*

**Bewijs** Trek lijnen door de hoekpunten evenwijdig aan de overstaande zijden. Laat deze drie lijnen de driehoek  $\triangle A'B'C'$  vormen, zie figuur 5. Aangezien  $AC \parallel BC'$  en  $AC' \parallel BC$ , is  $ACBC'$  een parallellogram en geldt er  $|AC'| = |BC|$ . Net zo geldt dat  $|AB'| = |BC|$ , aangezien ook  $CBAB'$  een parallellogram is. De lijn  $AD$  staat loodrecht op  $BC$  en dus ook op  $B'C'$ . Bovendien hebben we net gezien dat  $A$  het midden is van  $B'C'$ . Hieruit volgt dat  $AD$  de middelloodlijn van lijnstuk  $B'C'$ . Zo ook zijn de andere hoogtelijnen uit driehoek  $\triangle ABC$  middelloodlijnen in  $\triangle A'B'C'$ . De middelloodlijnen van driehoek  $\triangle A'B'C'$  gaan volgens stelling 11.3.2 door één punt gaan en dus doen de hoogtelijnen van driehoek  $\triangle ABC$  dat ook.  $\square$

## 11.5 Bissectrices

Een *bissectrice* van een hoek is een lijn die die hoek in twee gelijke delen verdeelt. Een driehoek heeft drie hoeken en dus ook drie bissectrices. Als we de zijden  $AB$  en  $AC$  van driehoek  $\triangle ABC$  doortrekken, ontstaan er bij punt  $A$  nog drie hoeken. De hoek tegenover hoek  $\angle BAC$  heeft dezelfde bissectrice als hoek  $\angle BAC$ . De andere twee hoeken hebben ook samen één bissectrice. Dit noemen we ook wel de *buitenbissectrice* van de driehoek in punt  $A$ . Om onderscheid te maken tussen de twee bissectrices bij  $A$  noemen we de andere dan de binnenbissectrice. Zie figuur 6 voor een hoek met twee bissectrices.

Ook voor de drie (binnen-)bissectrices van een driehoek geldt dat ze door één punt gaan. Om dit te bewijzen, hebben we eerst een lemma nodig.

**Lemma 11.5.1.** *Laat  $k$  en  $\ell$  twee snijdende lijnen zijn. Voor een punt  $Q$  geldt dat  $d(Q, k) = d(Q, \ell)$  dan en slechts dan als  $Q$  op een van de twee bissectrices van  $k$  en  $\ell$  ligt. Hierin is  $d(A, a)$  de loodrechte afstand van het punt  $A$  tot de lijn  $a$ .*

**Bewijs** Laat  $k$  en  $\ell$  elkaar snijden in  $S$  en laat  $K$  en  $L$  de projecties van  $Q$  op respectievelijk  $k$  en  $\ell$  zijn.

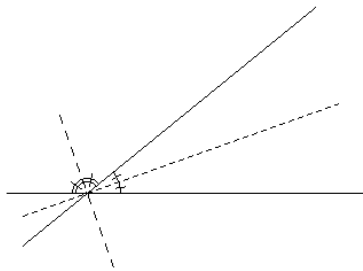
- $\succ$  Stel dat  $Q$  op een van de bissectrices ligt. Dan geldt dus dat  $\angle QSK = \angle QSL$ . Verder volgt uit de definitie van  $K$  en  $L$  dat  $\angle SKQ = 90^\circ = \angle SLQ$ . Dus  $\triangle QKS \cong \triangle QLS$  (ZHH), aangezien beide driehoeken zijde  $QS$  hebben. Hieruit volgt dat  $|QK| = |QL|$  en dus  $d(Q, k) = |QK| = |QL| = d(Q, \ell)$ .
- $\succ$  Neem nu aan dat  $d(Q, k) = d(Q, \ell)$ , oftewel  $|QK| = |QL|$ . Dan geldt eveneens door de gemeenschappelijke zijde  $QS$  dat  $\triangle QKS \cong \triangle QLS$  (ZZR). Dus  $\angle QSK = \angle QSL$ , waaruit volgt dat  $Q$  op een van de bissectrices moet liggen.  $\square$

**Stelling 11.5.2.** *De binnenbissectrices van een driehoek gaan door één punt. Ook gaan twee buitenbissectrices en de binnenbissectrice van de derde hoek door één punt (voor elke keuze van de twee buitenbissectrices).*

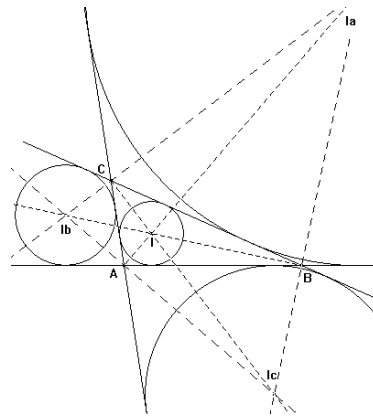
**Bewijs** Laat  $I$  het snijpunt van de binnenbissectrices van hoeken  $\angle A$  en  $\angle B$  zijn. Dan geldt volgens lemma 11.5.1 dat  $d(I, AC) = d(I, AB)$  en  $d(I, BA) = d(I, BC)$ . Daaruit volgt dat  $d(I, CA) = d(I, CB)$  en dus geldt volgens lemma 11.5.1 dat  $I$  ook op een bissectrice van hoek  $\angle C$  moeten liggen. Aangezien  $I$  overduidelijk binnen de driehoek ligt, zal het om de binnenbissectrice moeten gaan. Dus alle binnenbissectrices gaan door  $I$ .

Definieer nu  $I_a$  als het snijpunt van de binnenbissectrice van hoek  $\angle A$  en de buitenbissectrice van hoek  $\angle B$ . Ook nu geldt volgens lemma 11.5.1 dat  $d(I_a, AC) = d(I_a, AB)$  en  $d(I_a, BA) = d(I_a, BC)$ . Dus geldt weer dat  $d(I_a, CA) = d(I_a, CB)$  en dat  $I_a$  op een bissectrice van hoek  $\angle C$  ligt. Dit kan nu niet de binnenbissectrice van hoek  $\angle C$  zijn, want het snijpunt van de binnenbissectrices van hoeken  $\angle A$  en  $\angle C$  is  $I$  en dat ligt niet op de buitenbissectrice van hoek  $\angle B$ .  $\square$

Het punt  $I$  van hierboven heeft gelijke afstand tot alledrie de zijden van de driehoek. Dat betekent dat je een cirkel kunt tekenen met middelpunt  $I$  die precies raakt aan alle zijden van de driehoek. Dit noemen we de *ingeschreven cirkel* van driehoek  $\triangle ABC$ . Zo ook kunnen we een cirkel tekenen met middelpunt  $I_a$  die precies raakt aan de (verlengden van de) zijden van driehoek  $\triangle ABC$ . Dit noemen we een *aangeschreven cirkel*. Natuurlijk zijn er nog twee andere aangeschreven cirkels met middelpunten  $I_b$  en  $I_c$ . Zie figuur 7.



**Figuur 6.** Een hoek met haar binnen- en buitenbissectrice.



**Figuur 7.** Een driehoek  $\triangle ABC$  met haar in- en aangeschreven cirkels.

## 11.6 Opgaven

**Opgave 84.** In een driehoek  $\triangle ABC$  is  $M$  het midden van zijde  $BC$ ,  $N$  het midden van  $CA$  en  $P$  het midden van  $AB$ . Hoe groot is de oppervlakte van de driehoek  $\triangle MNP$  ten opzichte van de oppervlakte van driehoek  $\triangle ABC$ ?

**Opgave 85.** In een driehoek  $\triangle ABC$  is  $M$  het midden van zijde  $BC$ ,  $N$  het midden van  $CA$  en  $P$  het midden van  $AB$ . Bewijs dat het zwaartepunt van driehoek  $\triangle ABC$  ook het zwaartepunt is van driehoek  $\triangle MNP$ .

**Opgave 86.** Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn. De hoogtelijn vanuit  $A$  heeft lengte  $h_A$ , de hoogtelijn vanuit  $B$  lengte  $h_B$ . Bewijs dat  $h_A = h_B \frac{|AC|}{|BC|}$ .

**Opgave 87.** Bekijk een driehoek  $\triangle ABC$ . Bewijs dat de binnen- en buitenbissectrices van hoek  $\angle A$  loodrecht op elkaar staan.

**Opgave 88.** Bewijs dat een zwaartelijn zijn driehoek in twee gelijke oppervlakten verdeelt. Kun je nu ook bewijzen dat de drie zwaartelijnen de driehoek verdelen in zes gelijke oppervlakten?

**Opgave 89.** Bekijk een parallellogram  $ABCD$  dat geen ruit is. Noem  $K$  het snijpunt van de bissectrices van  $\angle A$  en  $\angle B$ ,  $L$  het snijpunt van de bissectrices van  $\angle B$  en  $\angle C$ ,  $M$  het snijpunt van de bissectrices van  $\angle C$  en  $\angle D$ , en  $N$  het snijpunt van de bissectrices van  $\angle D$  en  $\angle A$ . Bewijs dat  $KLMN$  een rechthoek is.

**Opgave 90.** Bekijk een willekeurige vierhoek  $ABCD$ . De middens van de zijden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  en  $DA$  noemen we respectievelijk  $K$ ,  $L$ ,  $M$  en  $N$ . Bewijs dat  $KLMN$  een parallellogram is.

**Opgave 91.** Van de vijf punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  en  $E$  liggen er geen drie op één lijn. De middelpunten van de omgeschreven cirkels van driehoeken  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$  en  $\triangle ABE$  noemen we respectievelijk  $M$ ,  $N$  en  $O$ . Bewijs dat  $M$ ,  $N$  en  $O$  op één lijn liggen.

**Opgave 92** (Bissectricestelling). Laat  $\triangle ABC$  een driehoek zijn met  $D$  het punt op  $BC$  zodat  $AD$  een binnenbissectrice is. Bewijs dat  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|}$ .  
HINT: Trek  $AC$  door totdat deze snijdt met de lijn door  $B$  evenwijdig aan  $AD$ . Ga nu op zoek naar gelijke lengtes en gelijkvormige driehoeken.

**Opgave 93. Finale 2006**

Gegeven is een scherphoekige driehoek  $\triangle ABC$ . De lengten van de hoogtelijnen uit  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn achtereenvolgens  $h_A$ ,  $h_B$  en  $h_C$ . Binnen de driehoek ligt een punt  $P$ . De afstand van  $P$  tot  $BC$  is  $\frac{1}{3}h_A$  en de afstand van  $P$  tot  $AC$  is  $\frac{1}{4}h_B$ . Druk de afstand van  $P$  tot  $AB$  uit in  $h_C$ .

**Opgave 94. Finale 2007**

Gegeven zijn een driehoek  $ABC$  en een punt  $P$  binnen de driehoek. Definieer  $D$ ,  $E$  en  $F$  als de middens van respectievelijk  $AP$ ,  $BP$  en  $CP$ . Noem verder  $R$  het snijpunt van  $AE$  en  $BD$ , noem  $S$  het snijpunt van  $BF$  en  $CE$ , en noem  $T$  het snijpunt van  $CD$  en  $AF$ . Bewijs dat de oppervlakte van zeshoek  $DRESFT$  niet afhangt van de positie van het punt  $P$  binnen de driehoek.

---

## Katern 4

# Bewijsmethoden

---

## 12 Bewijs uit het ongerijmde

In Katern 2 hebben we de volgende rekenregel bewezen, als onderdeel van rekenregel 4:

Als  $a$  een deler is van  $m$ , maar niet van  $n$ , dan is  $a$  geen deler van  $m + n$ .

We kijken even in wat meer detail naar het bewijs van deze rekenregel.

**Bewijs** Neem een getal  $m$  dat deelbaar is door  $a$  en een getal  $n$  dat niet deelbaar is door  $a$ . We willen nu bewijzen dat  $a$  *niet* een deler is van hun som, die we even  $l$  noemen:  $l = m + n$ . Stel nu eens dat  $a$  juist *wel* een deler is van  $l$ , dan is het dus een deler van zowel  $l$  als  $m$ , en dus (wegens het eerste onderdeel van rekenregel 4) ook van het verschil  $l - m$ . Uit  $l = m + n$  volgt bovendien dat  $n = l - m$ . Dus  $a$  is dan een deler van  $n$ . Maar we waren juist uitgegaan van een getal  $n$  dat niet deelbaar is door  $a$ . Kortom, de aanname dat  $a$  *wel* een deler is van  $l$  kan niet juist zijn en we concluderen dat  $a$  *niet* een deler is van  $l$ .  $\square$

Kijk nog eens goed naar dit bewijs. We wilden bewijzen dat dat  $a$  *niet* een deler is van  $l$ . We namen even aan dat het juist *wel* zo was. Daaruit leidden we af dat het getal  $n$ , dat gekozen was als een getal dat niet deelbaar is door  $a$ , toch deelbaar was door  $a$ . Dat is natuurlijk onmogelijk. Kortom, onze aanname was onjuist.

Deze manier van redeneren kunnen we algemener toepassen. We willen bewijzen dat een of andere bewering *niet* waar is. We nemen even aan dat de bewering juist *wel* waar is en laten vervolgens zien dat dat tot iets onmogelijks leidt; we komen uit op een *tegenspraak*. Je

komt bijvoorbeeld uit op ‘ $5 < 4$ ’, of op ‘ $3\frac{1}{3}$  is een geheel getal’, of op ‘ $x^2 = -5$ ’ (voor  $x$  een reëel getal), of op ‘127 is even’, of op . . . . Stuk voor stuk uitspraken waarvan overduidelijk is dat ze niet waar zijn. Dan kunnen we daaruit concluderen dat de bewering inderdaad niet waar is.

Zo’n bewijs wordt een *bewijs uit het ongerijmde* genoemd. In plaats van direct te laten zien dat iets niet waar is, laten we zien dat het niet zo kan zijn dat het wel waar is!

Het is eigenlijk zo’n natuurlijke manier van redeneren, dat het je misschien niet eens opgevallen is dat we hem al weleens vaker hebben toegepast. Hier een ander voorbeeld, letterlijk uit Katern 2 (voorbeeld 14). Probeer te herkennen waar in de redenering de aanname wordt gemaakt die juist uiteindelijk moet worden ontkracht. En tot welke tegenspraak leidt deze aanname?

Laat  $a$  en  $b$  twee natuurlijke getallen zijn. Noem  $d$  de grootste gemene deler van  $a$  en  $b$ . Wat is nu  $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ ?

**Bewijs** We schrijven  $a = d \cdot e$  en  $b = d \cdot f$ , met  $d = \text{ggd}(a, b)$ . Als we  $e$  en  $f$  in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat  $p$  een priemdelers zou zijn van zowel  $e$  als  $f$ , dan zou  $d \cdot p$  een deler zijn van  $a = d \cdot e$  en ook van  $b = d \cdot f$ . Maar  $d$  is de grootste gemene deler van  $a$  en  $b$  en  $d \cdot p$  is groter, dus dat kan niet. Kortom,  $e$  en  $f$  hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus  $\text{ggd}(e, f) = 1$  en dat is precies wat we wilden bewijzen.  $\square$

Zoals we hierboven als zeiden: in plaats van direct te laten zien dat iets *niet* waar is, laten we dus zien dat het niet zo kan zijn dat het *wel* waar is. En zo zou je ook, in plaats van direct te laten zien dat iets *wel* waar is, kunnen laten zien dat het niet zo kan zijn dat het *niet* waar is.

In Katern 1 heb je gezien dat als je een bewijs met inductie doet, het een goede gewoonte is om dat aan het begin van het bewijs ook aan te kondigen: “We gaan dit bewijzen met inductie naar  $n$ ”. Dan weet de lezer tenminste wat voor bewijsmethode je gaat gebruiken. Zo ook, als je een bewijs uit het ongerijmde gaat geven, laat de lezer dan even weten dat je deze methode gaat toepassen; dan snapt hij/zij tenminste waarom je zo’n rare aanname doet. Hieronder geven we twee voorbeelden van bewijzen uit het ongerijmde.

**Voorbeeld 19.** *Bewijs dat  $\sqrt{5}$  geen rationaal getal is.*

**Oplossing** We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat  $\sqrt{5}$  wel een rationaal getal is. Dan is  $\sqrt{5}$  gelijk aan  $\frac{t}{n}$  voor zekere gehele getallen  $t$  en  $n$ . Dus dan is  $5 = \frac{t^2}{n^2}$ , oftewel  $5n^2 = t^2$ . We noemen dit laatste getal even  $N$ , dus

$N = 5n^2$  maar ook  $N = t^2$ . Kijk nu naar het aantal priemfactoren 5 in  $N$ . Volgens de uitdrukking  $N = 5n^2$  heeft  $N$  een oneven aantal priemfactoren 5. Maar volgens de uitdrukking  $N = t^2$  heeft  $N$  juist een even aantal priemfactoren 5. Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat  $\sqrt{5}$  een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus  $\sqrt{5}$  is geen breuk.  $\square$

**Voorbeeld 20.** *Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.*

**Oplossing** We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Veronderstel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, zeg  $k$ . Dan kunnen we ze ook alle  $k$  opschrijven:  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ . Kijk nu eens naar dit getal:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

Wegens die spelbreker ‘+1’ kan dit getal niet deelbaar zijn door  $p_1$  (omdat 1 niet deelbaar is door  $p_1$ , dus wegens rekenregel 4). En ook niet door  $p_2$ . En ook niet door  $p_3$ . Et cetera. Toch moet dit getal een priemontbinding hebben. Dus moet  $N$  een priemfactor bevatten die nog niet in ons lijstje stond. Maar dat is een beetje vreemd: ons lijstje bestond immers uit *alle* priemgetallen. We kunnen niet anders dan concluderen dat onze eerste aanname onjuist was. Er zijn dus niet maar eindig veel priemgetallen; er zijn er oneindig veel!  $\square$

Dit bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, stamt af van Euclides, een Grieks wiskundige uit de 3e eeuw voor Christus.

**Opgave 95.** *Van een getal  $n$  is gegeven dat het niet deelbaar is door 3. Bewijs dat  $n$  ook niet deelbaar is door 123.*

**Opgave 96.** *Geef alle reële oplossingen  $(x, y, z)$  van de vergelijking  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .*

**Opgave 97.** *Bewijs dat er geen natuurlijke getallen  $x$  en  $y$  zijn zodat  $x^2 + 5x = 2y^4 + 1$ .*

**Opgave 98. Finale 1978** *Bewijs dat er geen gehele getallen  $x$  en  $y$  zijn, die voldoen aan de vergelijking*

$$3x^2 = 9 + y^3.$$

**Opgave 99. Finale 2007** *Is het mogelijk om de verzameling  $A = \{1, 2, 3, \dots, 32, 33\}$  op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo’n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.*

**Opgave 100.** *Bewijs dat de vergelijking  $x^3 + x + 1 = 0$  geen rationale oplossingen heeft.*

**Opgave 101.** *Stel dat  $a$  een natuurlijk getal is zodanig dat  $\sqrt{a}$  geen natuurlijk getal is. Bewijs dat  $\sqrt{a}$  ook geen breuk is.*

## 13 Extremenprincipe

De burgemeester van het dorpje Langeland wil een nieuwe wet invoeren: voortaan moet iedere inwoner de naam kennen van een medeburger die langer is dan hijzelf (of zijzelf). Om na te gaan of zijn wet uitvoerbaar is, stuurt de burgemeester een ambtenaar langs alle deuren. De ambtenaar moet van elke inwoner de lengte opschrijven om zo te achterhalen of er wel voor elk persoon een dorpsgenoot is die langer is.

Je begrijpt natuurlijk wel dat dit niet de meest efficiënte methode is. Het is direct duidelijk dat deze wet niet uitvoerbaar is, omdat er een langste inwoner van het dorp is. Je weet misschien niet wie de langste inwoner is, maar het is zeker dat er iemand is die minstens even lang is als al zijn dorpsgenoten. Er kunnen trouwens best meerdere inwoners zijn die allemaal de langste zijn; dan kunnen ze allemaal geen naam noemen van een langere dorpsgenoot. In elk geval is er minstens één langste inwoner, omdat er slechts eindig veel inwoners zijn.

Het idee van het extremenprincipe is om naar een extreem te kijken: een langste inwoner, een kleinste getal, een grootste verzameling, noem maar op. Ook al kun je zo'n extreem niet altijd expliciet aanwijzen, je weet vaak wel dat er eentje is.

Let op: niet in alle situaties weet je dat zo'n extreem bestaat! Er is bijvoorbeeld geen grootste natuurlijk getal. In andere woorden, als de inwoners van Langeland geen mensen maar natuurlijke getallen waren geweest, dan had de burgemeester zijn wet kunnen invoeren: elk natuurlijk getal  $n$  kan een getal noemen dat groter is, bijvoorbeeld  $n + 1$ .

Laten we eens kijken hoe we dit principe kunnen gebruiken in wiskundige bewijzen.

**Voorbeeld 21.** *De burgemeester van Langeland besluit zijn wet toch in te voeren. Bovendien laat hij elke dag elke burger ondervragen; als iemand geen naam kan noemen van een langere dorpsgenoot, wordt hij verbannen uit het dorp. Bewijs dat uiteindelijk alle burgers verbannen worden.*

**Oplossing** We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat *niet* alle burgers verbannen worden. Dan houdt het verbannen van burgers op een zeker moment op. Noem  $B$  de groep burgers die dan nog over is. Van deze burgers wordt dus niemand meer verbannen. We nemen aan dat er minstens één burger tot  $B$  behoort. Er behoren eindig veel burgers tot  $B$ , dus er is een langste burger in deze groep. De eerstvolgende dag dat hij ondervraagd wordt, kan hij geen naam noemen van een langere dorpsgenoot, dus wordt hij verbannen. Dit is een tegenspraak met de aanname dat niemand uit  $B$  nog verbannen werd. We concluderen dat er helemaal niemand overblijft.  $\square$

Hoewel het intuïtief direct duidelijk is dat alle burgers verbannen worden, is het best lastig om een bewijs op te schrijven dat echt waterdicht is. Het extremenprincipe helpt je

hiermee. Zoals je ziet, wordt het bewijs met behulp van het extremenprincipe kort en is er geen speld tussen te krijgen.

**Voorbeeld 22.** *Bewijs dat er geen positieve gehele getallen  $x$  en  $y$  zijn die voldoen aan  $x^2 + 2y^2 = 4xy$ .*

**Oplossing** We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat er *wel* paren  $(x, y)$  bestaan met  $x^2 + 2y^2 = 4xy$ . Misschien zijn dat er heel veel, misschien is het er maar één; dat weten we niet. Maar we kunnen wel alle paren die voldoen, op een rijtje zetten en van al deze paren de waarde van  $x$  bekijken. Dat zijn positieve gehele getallen, dus daar is een kleinste waarde bij. Noem nu  $(x_0, y_0)$  een paar met de kleinste  $x$ . (Als er meerdere paren zijn met dezelfde kleinste  $x$ , kiezen we er willekeurig eentje.) Voor alle paren  $(x, y)$  met  $x^2 + 2y^2 = 4xy$  geldt nu  $x \geq x_0$ .

Omdat  $2y_0^2$  en  $4x_0y_0$  allebei even zijn, moet  $x_0^2$  ook even zijn. Dus  $x_0$  is deelbaar door 2. Definieer  $x_1 = \frac{x_0}{2}$ . Dan is  $x_1$  een positief geheel getal. Dit vullen we in in de vergelijking:  $4x_1^2 + 2y_0^2 = 8x_1y_0$ . We delen deze hele vergelijking door twee en krijgen  $2x_1^2 + y_0^2 = 4x_1y_0$ . Nu zien we dat  $y_0^2$  even moet zijn, omdat  $2x_1^2$  en  $4x_1y_0$  allebei even zijn. Dus ook  $y_0$  is deelbaar door 2. Definieer  $y_1 = \frac{y_0}{2}$ . Dit vullen we weer in:  $2x_1^2 + 4y_1^2 = 8x_1y_1$ . Opnieuw delen we door 2 en dan komen we uit op  $x_1^2 + 2y_1^2 = 4x_1y_1$ . Dit lijkt wel erg op onze oorspronkelijke vergelijking. Kennelijk is  $(x_1, y_1)$  ook een oplossing van de vergelijking. Maar  $x_1 = \frac{x_0}{2} < x_0$  en dat is in tegenspraak met de aanname dat  $x_0$  de kleinste  $x$  was. We concluderen dat er helemaal geen paren  $(x, y)$  met  $x^2 + 2y^2 = 4xy$  bestaan.  $\square$

Het is de kunst om een geschikt extreem te kiezen. We hadden in het voorbeeld hierboven ook naar de waarden van  $x + y$  kunnen kijken in plaats van naar de waarden van  $x$  en dan waren we twee keer zo snel klaar geweest. Stel namelijk dat  $(x_2, y_2)$  een tweetal is met de kleinste waarde van  $x + y$ . Voor alle paren  $(x, y)$  met  $x^2 + 2y^2 = 4xy$  geldt nu  $x + y \geq x_2 + y_2$ . Op dezelfde manier als hierboven zien we dan dat  $x_2$  even moet zijn. Als we  $x_3 = \frac{x_2}{2}$  definiëren, komen we zo uit op de vergelijking  $2x_3^2 + y_2^2 = 4x_3y_2$ . Dit is de oorspronkelijke vergelijking, maar dan met  $x$  en  $y$  omgewisseld. Kennelijk is  $(y_2, x_3)$  ook een oplossing. Voor deze oplossing geldt  $x + y = y_2 + x_3 = y_2 + \frac{x_2}{2} < y_2 + x_2$  en dat is in tegenspraak met de aanname.

De volgende opgaven kunnen allemaal opgelost worden met behulp van het extremenprincipe. Maar het is niet altijd makkelijk om een goed extreem te kiezen!

**Opgave 102.** *Twintig kinderen staan in een cirkel op zo'n manier dat de leeftijd van elk kind precies het gemiddelde is van de leeftijden van zijn twee burens. Bewijs dat alle kinderen even oud zijn.*

**Opgave 103.** *Laat  $S$  een verzameling natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:*

- als een even getal  $2n$  in  $S$  zit, dan zit  $n$  ook in  $S$ ,
- als een getal  $n$  in  $S$  zit, dan zit  $n + 1$  ook in  $S$ ,
- het getal 2008 zit in  $S$ .

Bewijs dat alle natuurlijke getallen in  $S$  zitten.

**Opgave 104.** Bewijs dat er geen positieve gehele getallen  $x$ ,  $y$  en  $z$  zijn die voldoen aan  $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ .

**Opgave 105.** Een eindig aantal steden is verbonden door een aantal éénrichtingsverkeerwegen. Voor elk tweetal steden  $X$  en  $Y$  is het mogelijk om via een aantal van deze wegen van  $X$  naar  $Y$  te komen of van  $Y$  naar  $X$  te komen. Bewijs dat er een stad is die vanuit elke andere stad bereikbaar is.

**Opgave 106.** Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, waarbij er altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met daarop

1. de namen van alle deelnemers die hij verslagen heeft,
2. de namen van alle deelnemers die verslagen zijn door iemand die bij punt 1 genoemd is.

De deelnemers schrijven geen namen dubbel op.

Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

**Opgave 107. Finale 2000** Er staan vijftien spelers op een veld, elk met een bal. De afstanden tussen elk tweetal spelers zijn alle verschillend. Elke speler gooit de bal naar die speler die het dichtst bij hem staat. Bewijs dat er minstens één speler is naar wie geen bal gegooid wordt.

**Opgave 108. Finale 1995** We beschouwen de rijtjes  $(a_1, a_2, \dots, a_{13})$  van dertien gehele getallen die in oplopende volgorde staan, dus  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{13}$ . Zo'n rijtje heet "tam" indien voor iedere  $i$  met  $1 \leq i \leq 13$  geldt: als je  $a_i$  uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is.

- (a) Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even of geheel uit oneven getallen bestaat.

Een tam rijtje heet "turbo-tam" als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.

- (b) Bewijs dat in ieder turbo-tam rijtje alle getallen gelijk zijn.

## 14 Ladenprincipe

Als je 7 knikkers in 6 laatjes doet, dan weet je zeker dat er ten minste 1 laatje is met ten minste 2 knikkers erin. We kunnen dat bewijzen uit het ongerijmde: zou namelijk elk laatje ten hoogste maar 1 knikker bevatten, dan zouden er in totaal maar ten hoogste 6 knikkers in gezeten hebben; tegenspraak. Dit principe blijkt soms heel handig van pas te komen. We noemen het het *ladenprincipe*. Om het goed te kunnen toepassen, moet je meestal even goed bedenken wat de knikkers en wat de laatjes zijn én op grond van welke regel je elke knikker in een bepaald laatje doet; dan heeft het feit dat er twee knikkers bij elkaar in één laatje terecht komen als het goed is precies het gewenste resultaat. We bekijken twee voorbeelden.

**Voorbeeld 23.** *Iemand heeft zes verschillende willekeurige getallen tussen de 1 en de 10 opgeschreven (waarbij 1 en 10 ook mogen). Bewijs dat hij twee buurgetallen heeft opgeschreven. (Buurgetallen zijn getallen die 1 verschillen.)*

**Oplossing** We maken laden met de labels (stickers)  $\{2k - 1, 2k\}$  ( $k = 1, \dots, 5$ ), oftewel

$$\{1, 2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \{7, 8\} \quad \{9, 10\}$$

en daarover gaan we zometeen de opgeschreven getallen verdelen (die dus de rol van knikkers hebben). Alle laden zijn in eerste instantie nog leeg. Stop nu elk opgeschreven getal in de lade volgens de aangegeven labels. Als bijvoorbeeld het getal 4 was opgeschreven, dan komt dat in het laatje  $\{3, 4\}$  omdat daar het label 4 op staat. Aangezien er maar vijf laden zijn en we daar zes getallen (knikkers) over verdelen, moet er wegens het ladenprincipe na afloop ten minste één lade zijn met meer dan één getal. Dat moeten dan wel twee getallen zijn van de vorm  $2k - 1$  en  $2k$  en dat zijn duidelijk buurgetallen.  $\square$

**Voorbeeld 24.** *In een zaal zit een groep van 20 mensen. Elke persoon in de groep moet op een briefje drie verschillende positieve gehele getallen schrijven, kleiner dan 10. Vervolgens moet iedereen de som van het drietal getallen bepalen. Bewijs dat er minstens twee mensen in deze groep zijn die precies dezelfde som als resultaat hebben.*

**Oplossing** De laagst mogelijke som is  $1 + 2 + 3 = 6$ ; de hoogste mogelijke  $7 + 8 + 9 = 24$ . De mogelijke uitkomsten voor de som zijn dus  $6, 7, 8, \dots, 23, 24$  en als we goed tellen zien we dat dat  $24 - 6 + 1 = 19$  verschillende waarden zijn. Neem dit nu als laatjes. We zien de mensen nu als de knikkers en stoppen ze in een bepaald laatje afhankelijk van de som van hun getallen. Omdat we nu 20 mensen (knikkers) verdelen over 19 laatjes, moet wegens het ladenprincipe minstens één laatje dubbel bezet zijn. Oftewel: er moet minstens één waarde meer dan eens voorkomen.  $\square$

**Opgave 109.** Amersfoort heeft 139.054 inwoners (2 mei 2008). Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amersfoort zeker twee mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.

**Opgave 110.** Bewijs dat in 2008 in een groepje van 15 mensen er altijd twee jongens of twee meisjes op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee jongens op dinsdag of twee meisjes op zaterdag).

**Opgave 111.** Hoeveel torens kunnen er ten hoogste op een schaakbord staan zodanig dat geen enkele toren een andere toren kan slaan?

**Opgave 112.** Laat 51 verschillende getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen).

(a) Bewijs dat er een tweetal is met som 101.

(b) Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.

**Opgave 113. Finale 1977** Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal (minstens één) kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.

**Opgave 114. Finale 2001** Als je uit de gehele getallen 1 t/m 6003 een deelverzameling pakt van 4002 getallen, dan is er binnen die deelverzameling altijd weer een deelverzameling van 2001 getallen te vinden met de volgende eigenschap:

als je de 2001 getallen ordent van klein naar groot, dan zijn de getallen afwisselend even en oneven (of oneven en even).

Bewijs dit.