Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Met ingang van het dit jaar zijn de Universitaire Wiskunde Competitie en de problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand is gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden.
De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A
Let $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ be a non-decreasing sequence of real numbers such that $(n-1)a_n = na_{n-2}$ for $n = 2, 3, \ldots$ with initial value $a_0 = 2$. Compute a_1.

Opgave B
Let $S(n)$ be the sum of the remainders on division of the natural number n by $2, 3, \ldots, n-1$. Show that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S(n)}{n^2}$$

exists and compute its value.

Opgave C
Consider four distinct points A, B, C, D in the plane such that the line segments AB, BC, CD, DA do not intersect. Let Z_1, Z_2, Z_3 be the centers of gravity of:
1. the four point masses in A, B, C, D.
2. the wire frame with vertices A, B, C, D.
3. the plate with corners A, B, C, D.

If A, B, C, D form a parallelogram then Z_1, Z_2, Z_3 coincide. Does the converse hold?

Ster-opgave
Determine the maximal area of a rectangle that can be covered by 6 disks of unit diameter.

Oplossingen van de Universitaire Wiskunde Competitie editie 2003/1

Op de ronde 2003/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we als enige een inzending van Filip De Smet.

Opgave 2003/1-A
Een Pythagoreïsche driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden geheeltallig zijn. Van een Pythagoreïsche driehoek is de straal van de ingeschreven cirkel ook geheeltallig. Bepaal alle Pythagoreïsche driehoeken waarvan de straal van de ingeschreven cirkel N bedraagt ($N = 1, 2, 3, \ldots$).

Oplossing Deze opgave is van de hand van Karel Post. Een oplossing is gegeven door L. Bleijenga, Ruud Jeurissen, H.T. Reuvers, Filip De Smet en Jaap Spies. Alle oplossingen zijn equivalent. Hieronder staat die van Jaap Spies.
Alle Pythagoreïsche driehoeken met zijden a, b en c en $a^2 + b^2 = c^2$ kunnen worden geparametriseerd met positieve natuurlijke getallen u en v ($u > v$), zodat $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ en $c = u^2 + v^2$.

Redactie: Robbert Fokkink en Jan van Neerven
Problemen / Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
r.j.fokkink@its.tudelft.nl
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Zoals bekend geldt voor de ingeschreven cirkel:

$$r_{in} = \frac{2A}{a+b+c},$$

oftewel

$$r_{in} = \frac{2uv(u^2 - v^2)}{2u^2 + 2uv} = v(u-v).$$

Bij elke deler v van het positieve natuurlijke getal n vinden we een u, zo dat $n = v(u-v)$ en dus $u = \frac{n}{v} + v$. Als we stellen $q = \frac{n}{v}$, dan vinden we na enig vereenvoudigen de Pythagoreïsche driehoek met zijden a, b en c:

$$(a,b,c) = (2n + q^2, 2n + 2v^2, 2n + q^2 + 2v^2).$$

Opgave 2003/1-B

Een rechthoekige tafel waarvan de vier poten precies even lang zijn staat in een historisch pand met een glooiende vloer. Is het mogelijk om de tafel ergens neer te zetten zodat dat deze niet wiebelt?

Oplossing Deze opgave is bedacht door Michiel de Bondt. Noteer de coördinaten van de vier poten kloksgewijs als a, b, c, d en de hoogte van de vloer ter plaats als $h(a), h(b), h(c), h(d)$. De tafel wiebelt niet als de volgende gelijkheid geldt: $h(a) + h(c) = h(b) + h(d)$. Als de tafel draait rond zijn middelpunt dan draaien de poten over een cirkel. Zet de tafel zo neer dat $h(a) + h(c)$ maximaal is. Dan is $h(a) + h(c) \geq h(b) + h(d)$ want a, c kan de plaats van b, d innemen. Draai nu b, d naar de positie van a, c . In de nieuwe positie is $h(a) + h(c) \leq h(b) + h(d)$. Volgens de tussenwaardestelling bestaat er een positie waarin de tafel niet wiebelt.

Opgave 2003/1-C

Het is algemeen bekend dat de oneindige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ niet sommeerbaar is. Verwijder nu uit de rij alle getallen met negen aaneengesloten negens in hun decimale ontwikkeling. Houden we een sommeerbare rij over?

Oplossing Ook deze opgave is bedacht door Michiel de Bondt. Hieronder de oplossing van Filip de Smet. De overgebleven rij is sommeerbaar. Noteer 10^{10} met α en gebruik dit getal als basis. De getallen in het interval $[\alpha^n, \alpha^{n+1} - 1]$ zijn precies degene die over de nieuwe basis bestaan uit $n+1$ cijfers. Verwijder de getallen waarin het cijfer $\alpha - 1$ voorkomt, dan blijven er $(\alpha-1)^{n+1} - (\alpha-1)^n$ getallen over. Al deze getallen zijn groter of gelijk aan α^n. Bijgevolg is de totale som van de rij naar boven begrensd door

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)^{n+1}}{\alpha^n} = (\alpha-1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n = \alpha(\alpha-1).$$

Oplossingen

Uitslag Editie 2002/2

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Filip De Smet (Gent)	10	6	10	104

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Team Hendrik Hubrechts	238
2.	Mark Veraar	208
3.	Team Filip Cools	199
4.	Tom Claeys	138
5.	Team Gerben Stavenga	136

Reglement

De Universitaire Wiskunde Competitie is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50 en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50 en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.