Speltheorie voor eerstejaars: Over luie studenten, pokeren en groepsdynamica

Michael Muskulus*†

Woensdag, 14 November 2007

Samenvatting

Speltheorie is een tak van de wiskunde die betrekking heeft op een breed scala aan onderwerpen, uiteenlopend van allerlei facetten van het dagelijkse leven tot evolutionaire biologie en onze economische samenleving. Ook een van de Nobelprijzen werd dit jaar toegekend voor onderzoek op speltheoretisch vlak (Hurwicz, Maskin & Myerson). In een korte lezing zal ik uitweiden over enkele grondleggende modellen van de speltheorie, die niet alleen heel nuttig (bijvoorbeeld voor studenten) kunnen zijn, maar wat mij betreft een verplicht onderdeel vormen van het repertoire van elke natuurwetenschapper.

*Universiteit Leiden, Niels Bohrweg 1, 2333 CA Leiden, Nederland
Email address: muskulus@math.leidenuniv.nl (M. Muskulus)
Web: www.math.leidenuniv.nl/~muskulus/

†Dit zijn aantekeningen van een praatje warvoor ik door de studentenvereniging "De Leidse Flesch" uitgenodigd werd.

1 Introductie

Dames en Heren, bedankt voor de gelegenheid die jullie mij bieden om in deze informele setting iets te komen vertellen. Helaas zijn 30 minuten toch wat aan de korte kant voor dit vrij wiskundig verhaal. De Duitse wiskundige *Klaus Jänich*, auteur van populaire vakboeken en bekend vanwege de directe manier waarop hij zijn mening uit, heeft, als ik het mij goed herinner, in een van zijn boeken iets opgemerkt in de geest van dat een van de meest belangrijke fouten die studenten maken als ze voor het eerst met echte wiskunde geconfronteerd zijn, in een vergissing bestaat over de tijd die nodig is om de wiskunde te bedrijven. Volgens hem wordt de tijd die nodig is om een pagina in een goed wiskundig tekstboek te lezen, in uren gemeten en niet in minuten. Ik moet hier nog aan toevoegen wat *Paul Halmos* in zijn biographie, getiteld "I want to be a mathematician", schreef: dat een wetenschappelijk praatje voor elk minuut gemiddeld een uur aan voorbereiding nodig heeft.

Maar waarvoor hebben wij ueberhaupt zo veel tijd nodig? Dit is, vooral, een probleem van de menselijke natuur. Wiskunde is bijna[1] triviaal in epistemologisch opzicht — dat wil zeggen, als wij de manier bekijken hoe waarheid en kennis in de wiskunde gehandhaafd worden: Alle kennis in de wiskunde is door middel van logische bewijzen afgeleid. Dus het probleem, waarom mensen zo veel tijd vereisende moeite met wiskunde hebben, is dat mensen epistemologisch incomplete wezens zijn: Wij weten vaak niet wat wij weten, maar meestal komen wij er pas met hulp van een Sokratische vriend of een advocaat van de duivel achter, wat de implicaties zijn van wat we aannemen en geloven.

Dat is een belangrijk probleem — en een waarmee studenten bekend zijn. Het leerproces is namelijk, voor het grootste gedeelte, de verrassing van waar je tot in staat bent, juist onder tijdsdruk.

Laat mij nu de wiskundige methode zelf gebruiken en aannemen dat mensen niet alleen alles weten wat ze weten, maar ook dat ze de gevolgen van hun *handelingen* kunnen afschatten. Tenminste voor zover deze gevolgen betrekking tot hunzelf hebben. Dan zou het rationeel zijn, dat mensen hun handelingen naar de wenselijkheid van deze gevolgen kiezen.

Deze theorie van *rational choice* vraagt zich dus vooral af hoe wij tussen alternatieve handelingen kunnen en moeten kiezen. Het ligt voor de hand dat de mogelijke uitkomsten in een volgorde van wenselijkheid moeten worden gebracht, en deze orde zal totaal en transitief moeten zijn: Als ik uitkomst A beter dan uitkomst B vind, en B beter dan C, dan is het problematisch

[1] Dit is natuurlijk *Gödel's* "catch": Een logisch systeem dat zo complex is als de wiskunde zal noodzakelijk óf inconsistent zijn óf er zullen waarheiden bestaan die niet kunnen worden afgeleidt [12].

als ik C beter dan A vind. In de taal van *Stanley Smith Stevens* theorie van scales of measurement [13], zullen wij aannemen dat onze voorkeuren door ordinale meetingen omvat zijn.

In feite, ik zal zelfs aannemen dat onze voorkeuren door *interval* metingen realiseerbaar zijn, zodat wij deze met numerieke waardes kunnen representeren. De eenheid, waarin onze voorkeuren worden gemeten, is de zo genoemde *util*, omdat wat wij meten uiteindelijk de wenselijkheid of bruikbaarheid, in het engels *utility* genoemd, van de gevolgen is. Of anders gezegt, namelijk met de woorden van de philosoof *Jeremy Bentham* [4], het plezier dat deze voor ons betekenen. Let op dat plezier hier in zijn ethische dimensie zal worden begrepen, dat wil zeggen, in wat het voor het "goede leven" oplevert, dat ik wil leiden [2]. In het bijzonder betekent dit dat het niet om kortdurende of egoistische geneugtes gaat, maar dat ik rekening moet houden met esthetische, emotionele, sociale en ethische aspecten. In de economische theorie wordt, desalniettemin, de functie die de verwachte wenselijkheid aangeeft *payoff* functie genoemd. Nu is geld vaak belangrijk, maar wij zullen niet vergeten dat wenselijkheid meestal meer voorstelt.

De methode waarmee wij in een bepaalde situatie de numerieke waarde van onze payoff functie kunnen vaststellen is dezelfde als degene die de Bayesianen gebruiken, voor wie kans een subjective uitdrukking van een geloof is [1], om waarschijnlijkheden te bepalen, en die ook in wat twijfelachtige TV shows wordt gebruikt. Stel dat wij A de voorkeur over B geven, maar dat wij A of B plus wat toegevoegde 'aantrekkelijkheid' X aangeboden krijgen. Hoeveel van deze extra wenselijkheid is nodig tot het ons niets uitmaakt of A of B plus X gerealiseerd wordt? Hoe veel overtuiging heb jij nodig om een "indecent proposal" te kunnen accepteren? Of hoeveel geld?

Helaas zijn er nog meer problemen die door de menselijke natuur veroorzaakt worden. Het volgende voorbeeld, wat ik aan Osborne [10] dank, laat zien dat mensen op interessante wijze inconsistent in hun beslissingen kunnen zijn.

Stel dat je aan een meta-loterij participeert, waar jij tussen de twee volgende uitkomsten mag kiezen:

(1) Jij krijgt twee miljoen Euro.

(2) Jij krijgt:

- tien miljoen Euro met kans 0.10,
- twee miljoen Euro met kans 0.89,
- niets met kans 0.01.

Wat zou jij kiezen, loterij (1) of loterij (2)? Nu kijk naar de volgende twee uitkomsten, en kies weer:

(3) Jij krijgt

- twee miljoen Euro met kans 0.11,
- niets met kans 0.89.

(4) Jij krijgt:

- tien miljoen Euro met kans 0.1,
- niets met kans 0.9.

Wat zou je nu kiezen? Een groot aantal experimentele proefpersonen geven aan dat zij loterij (1) verkiezen boven loterij (2), maar loterij (4) boven loterij (3). Deze voorkeuren kunnen niet gerepresenteerd worden door een (verwachte) payoff functie.

Laat ons dit even bewijzen: Stel dat er een payoff functie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$u(2) > 0.1u(10) + 0.89u(2) + 0.01u(0).$$

Aftrekken van $0.89u(2)$ en optellen van $0.89u(0)$ aan elke kant laat zien dat

$$0.11u(2) + 0.89u(0) > 0.1u(10) + 0.9u(0),$$

Maar dat betekent dat wij loterij (3) de voorkeur geven aan loterij (4)...

Verder is er natuurlijk nog het probleem dat wij niet alleen zijn op deze wereld. Ik zal hier nu geen morele vragen bekijken, maar dat er tenminste nog een andere persoon met eigen voorkeuren bestaat betekent wel dat ik niet altijd de voor mij beste uitkomst zal kunnen hebben. Nu is speltheorie niets anders dan de interdisciplinaire poging, zin aan zo'n situatie te geven. Of om het wat poetisch, met de woorden van *George Spencer-Brown* uit te drukken: "Only two can play this game" [9].

2 Strategische spellen

Het wiskundige model van een strategische spel bestaat uit een verzameling van spelers, een verzameling van mogelijke acties voor elk speler, en een payoff functie die voor elk speler de wenselijkheid van de gevolgen, afhankelijk van de acties van alle spelers, uit drukt. Een tweepersoons spel met eindige acties is dus equivalent aan twee matrices, een voor elke speler. Let op dat spellen zoals schaak, go of poker, die meestal uit een hele rij van zetten bestaan —

wij noemen dit het *extensieve vorm* van een spel — ook in deze *strategische vorm* geschreven kunnen worden, door de payoff matrices groot genoeg te maken. We moeten immers alleen elk mogelijk gevolg van zetten als een zelfstandige strategische actie opvatten.

Laat ons nu een belangrijk spel bekijken, wat ik **Werken aan een gemeenschappelijk project** wil noemen: jij en een andere student zijn ingedeeld om samen aan een werkstukje voor een college te werken. Jullen kunnen allebei kiezen of jullie **hard werken**, of het liever rustig zullen aandoen, wat ik **chillen** zou noemen. Verder willen jullie allebei een goed cijfer, maar liefst zonder hard te werken. Laat ons dus de volgende payoff matrix aanemen, waar de eerste waarde jouw payoff aangeeft, en de tweede waarde die van jouw partner:

Jij kiest:	Jouw partner kiest: **Hard werken**	**Chillen**
Hard werken	$2, 2$	$0, 3$
Chillen	$3, 0$	$1, 1$

Deze getallen drukken uit dat jij liever met z'n tweeën hard zou werken dan dat jullie allebei chillen. De beste uitkomst zou natuurlijk zijn dat jij gaat chillen en jouw partner het hele werk doet. Aan de andere kant is er niets vervelender dan wanneer jouw partner niets zou doen, maar jij wel. Jij wil tenslotte niet worden uitgebuit.

Stel nu dat jullie allebei vandaag in jullie eentje werken (of chillen), en morgen afgesproken hebben om de resultaten zamen te vatten. Wat zou je doen? En meer nog, kan jij dit rationeel beslissen, zodat jij dit gedrag aan andere studenten kan verklaren en ze overtuigen dat ze in een vergelijkbare situatie dit ook zo moeten doen?

Het wiskundige genie *John von Neumann* stelde voor in zo'n situatie gebruik te maken van de zo genoemde *maximin* oplossing, waarbij jij de strategie kiest die jou de maximale mogelijke wenselijkheid gegarandeert, zelfs als jouw partner jouw keuze zou hebben geraden. Volgens deze pessimistische opvatting zou jouw minimale payoff dus het volgende zijn:

Jij kiest:	Jouw minimaal mogelijke payoff:
Hard werken	0 (Chillen)
Chillen	1 (Chillen)

Dus de maximin strategie zou zijn dat jij gaat chillen, wanneer je tenminste een util zeker in jouw zak hebt. Zou dat misschien de reden zijn waarom het vaak moeillijk is met een ander productief samen te werken?

John Nash, de tragische held van Sylvia Nasar's boek "A beautiful mind", kreeg in 1994 de Nobel prijs toegekend voor een andere aanpak die poogt wat optimistischer te zijn. Stel dat jij weet wat jouw partner gaat doen. Dan zou jouw *beste antwoord* strategie het volgende zijn:

Jouw partner kiest:	Jouw beste antwoord payoff:
Hard werken	3 (Chillen)
Chillen	1 (Chillen)

en hetzelfde geldt ook voor jouw partner. Een *Nash equilibrium* is nu een strategische keuze voor elk speler zodanig dat de strategie van elke speler het beste antwoord is op de acties van de andere spelers, en wij kunnen dit zien als een *stabiele sociale norm*; een strategie die ervaren spelers kiezen. Of zoals *Ken Binmore* redeneert, een Nash equilibrium verlost ons van de cirkel die begint met "Ik denk dat hij denkt dat ik denk dat...".

In het geval van de **gemeenschappelijk project**, helaas, is alleen de actie **(Chillen, Chillen)** een Nash equilibrium, en dat is dezelfde als de pessimistische maximin oplossing.

In feite, dit spel is een zo genoemde spel van *puure conflict*, ook bekend als het **Prisoner's dilemma** of het **Arms race** (in herdenking aan de koude oorlog), en wij kunnen redeneren wat wij willen, maar er bestaat geen ontsnapping aan de sub-optimale oplossing van het luie teamwork.

Een aanverwant spel is de zo genoemde **strijd der geslachten**, die door de volgende payoffs gemodelleerd is:

Jij kiest:	Je partner kiest: **Football Match**	**Klassiek Concert**
Football Match	$2, 1$	$0, 0$
Klassiek Concert	$0, 0$	$1, 2$

Hier zien we dat, op een bepaalde avond, jij óf naar een football match kan gaan, óf naar een klassieke concert. Jij geeft natuurlijk de voorkeur aan de football, maar jouw partner geeft de voorkeur aan het concert (of andersom?). Maar de allerslechtste uitkomst zou zijn als jullie ruzie krijgen en niet samen weggaan. Wat zou jij doen?

De maximin strategie helpt niet veel, omdat deze null is voor allebei keuzen die je hebt. Maar stel dat je weet dat jouw partner het concert zou kiezen, dan is jouw beste antwoord ook voor het concert te gaan. En als jouw partner het football zou kiezen, dan is jouw beste antwoord ook hetzelfde te doen. Dus hier bestaan er inderdaad twee Nash equilibria, met respectievelijke payoffs $(2, 1)$ en $(1, 2)$. Deze corresponderen met twee stabiele sociale normen, namelijk: **Ladies first**, waar jij kiest voor wat je weet dat jouw partner leuk vindt, en **Gentlemen first**, waarbij jij krijgt wat jouw partner weet dat je leuk vind. Allebei keuzes zijn onrechtvaardig, maar dat kan in zo'n spel niet worden voorkomen.

En toch, er blijft nog een probleem: welke van de twee equilibria komt uiteindelijk tot stand? De Amerikaanse economoom *Tom Schelling* stelde voor dat wij dit vaak afhankelijk kunnen maken van zo genoemde *focal points*; een idee waarvoor hij 2005 de Nobel prijs kreeg. Dit idee zal ik even door middel van twee voorbeelden verduidelijken:

1. Stel dat jij en een vriend morgen om 12 uur afgesproken hebben in Amsterdam, maar dat jullie het niet over hadden *waar*. Nu is het te laat, zodat jullie elkaar niet meer kunnen bereiken. Waar zou jij heen gaan, morgen om 12 uur?

2. Stel dat jij met een vriend meedoet in een quiz show op televisie. Jullie wordt verteld dat jullie allebei óf Kop óf Munt moeten kiezen, onafhankelijk van elkaar. Als jullie allebei hetzelfde hebben, krijgen jullie 100 Euro, anders niets. Wat zou jij kiezen?

Ik wil nu niet zeggen dat dit idee de **strijd van de geslachten** zal oplossen, maar het is een interessant idee dat vaak kan worden toegepast.

3 Gemengde strategieën

Laat ons nu kort een spel bekijken dat **Matching Pennies** heet. Jij en jouw tegenstander kiezen allebei óf **Kop** óf **Munt**, en als jullie allebei hetzelfde zeggen, moet zij jouw een Euro geven, en anders jij aan haar:

Jij kiest:	Jouw tegenstander kiest: **Kop**	**Munt**
Kop	$1, -1$	$-1, 1$
Munt	$-1, 1$	$1, -1$

Dit spel is erg interessant. Ten eerste, er bestaat geen (puur) Nash equilibrium in dit spel. Verder nog, als jij dit spel meer dan een keer speelt, en tegen dezelfde tegenstander, dan is het makkelijk in te zien dat de enige manier om te voorkomen dat je een heleboel geld gaat verliezen daaruit bestaat, *onvoorspelbaar* te zijn. Dus zou jij het best een stochastische strategie spelen — of tenminste een deterministische, chaotische strategie, wat voor alle praktische redenen als hetzelfde beschouwd kan worden.

Nu een vergelijkbaar probleem, stel dat jouw tegenstander door naar jouw lichaamstaal te kijken kan weten wat jij gaat doen. Of misschien gebruikt zij wel een leugen-detektor. Dan zou het verstandig voor jou zijn, zelf niet te weten wat je gaat doen: dus je kunt met een dobbelsteen gooien, of beter nog, je maakt gebruik van een quantum-mechanische toevalsgenerator. Dit soort gedrag wordt wiskundig gemodelleerd door een *gemengde strategie*, waarbij jij jouw acties met behulp van een kansverdeling kiest. Bijvoorbeeld, de gemengde strategie $(1/2, 1/2)$ betekent dat jij de helft van de tijd **Kop** kiest, en de andere helft **Munt**.

Stel dat jij een gemengde strategie $(p, 1-p)$ spelt, en jouw tegenstander een gemengde strategie $(q, 1-q)$, en dat jullie **Matching Pennies** heel vaak spelen. Dan zijn de waarschijnlijkheden voor jullie gemeenschappelijke keuzes als volgt:

Jij kiest:	Jouw tegenstander kiest:	
	Kop	**Munt**
Kop	pq	$p(1-q)$
Munt	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Jouw verwachte payoff E[2] is dan:

$$
\begin{aligned}
E &= pqu_1(1,1) + p(1-q)u_1(1,2) + (1-p)qu_1(2,1) + (1-p)(1-q)u_1(2,2) \\
&= p\left(qu_1(1,1) + (1-q)u_1(1,2)\right) + (1-p)\left(qu_1(2,1) + (1-q)u_1(2,2)\right).
\end{aligned}
$$

Invullen van de specifieke payoffs voor **Matching Pennies** laat zien dat

$$
\begin{aligned}
E &= p(q - (1-q)) + (1-p)(-q + (1-q)) \\
&= p(2q-1) - (1-p)(2q-1) \\
&= (2p-1)(2q-1).
\end{aligned}
$$

Omdat jij dit maximaliseren wil, kies jij de waarde $p = 1/2$. Jouw tegenstander, die het negatieve van jouw payoff krijgt, wil dit minimaliseren. Dus hij kiest ook de waarde $q = 1/2$. In feite is de gemengde strategie $(p, q) = (1/2, 1/2)$ een *gemengd Nash equilibrium*, omdat niemand van jullie beter kan doen dan zo te spelen, als jouw tegenstander dit ook doet.

Keren wij even terug naar de **strijd der geslachten**. Jouw verwachte payoff is

$$E_1 = 2pq + (1-p)(1-q) = (1-p-q) + 3pq,$$

[2] Let op dat de eerste term tussen haakjes de verwachting van de puure strategie is, altijd **Kop** te zeggen, en de tweede term net zo goed van de puure strategie altijd **Munt** te zeggen.

en die van jouw partner

$$E_2 = pq + 2(1-p)(1-q) = 2(1-p-q) + 3pq.$$

Het maximum van E_1, als een functie van p, wordt aangenomen voor $q = 1/3$. Op dezelfde wijze geldt ook dat het maximum van E_2, als een functie van q, wordt aangenomen voor $p = 2/3$. Net zo goed is het paar $(p,q) = (2/3, 1/3)$ een gemengd Nash equilibrium, met verwachte payoff $E_1 = 2/3 = E_2$. Dit is dus een eerlijke oplossing, maar wel een inefficiente, omdat 2/3 zelfs nog lager is dan de payoff die jij krijgt als jij altijd de puure strategie **Ladies first** spelt!

De "echte" oplossing is natuurlijk met elkaar te communiceren. En toch: waarom zou jij op een afspraak vertrouwen, als jouw partner daarvan kan profiteren als hij uiteindelijk toch iets anders gaat doen dan wat hij beloofd heeft? Wat echt nodig is, is dus een *mechanisme* dat ervoor zorgt dat jullie ook echt doen wat jullie elkaar beloven. In speltheoretische taal kunnen jullie dan een efficientere, *gecorreleerd* equilibrium bereiken. *Robert Naumann*, die de belangstelling voor dit soort mechanismen verspreid heeft, kreeg voor deze ideeën onder andere de (gedeelde) Nobel prijs van 2005 toegekent.

4 Groepsdynamica

Laat ons het spel bekijken dat vaak **Reporting a Crime** of **The Good Samaritan** [5] wordt genoemd. Er zijn n spelers, die alle getuigen zullen zijn van een crimineel incident. Iedereen heeft er baat bij dat de politie word gebeld omdat daarmee het slachtoffer wordt geholpen. Aan de andere kant, omdat het toch wat moeite oplevert, geeft iedereen er de voorkeur aan dat iemand anders gaat bellen. Dus iedere speler kan kiezen tussen **Bellen** of **Nietsdoen**. De payoffs van een speler is 0 als niemand belt, een beloning van v als tenminste één ander belt, en een beloning van $v - c$ als hijzelf belt (en eventueel ook nog iemand anders). Dit spel heeft geen puur Nash equilibrium, omdat als iedereen belt, het beter voor jou zou zijn dat jij het niet doet. Maar als niemand belt, zou het beter zijn dat jij het doet.

Maar er bestaat een gemengd Nash equilibrium dat door een symmetrie argument kan worden gevonden: In zo'n equilibrium moet de verwachte beloning als jij altijd **belt** overeenkomen[3] met de verwachte beloning als jij altijd

[3] De reden is, natuurlijk, dat als men een onderscheid zou maken tussen de twee *puure strategieën*, altijd te **bellen** of altijd **niets te doen**, men niet de gemengde strategie zou spelen, maar de betere van de puure strategien — denk eraan dat de verwachting lineair is! Maar dan zou de gemengde strategie natuurlijk geen equilibrium zijn.

niets doet. Dat betekent dat E[Bellen] = E[Niets doen], zodat

$$\begin{aligned} v - c &= 0 \cdot P(\text{niemand belt}) + v \cdot P(\text{tenminste iemand anders belt}) \\ &= v\,(1 - P(\text{niemand anders belt}))\,, \end{aligned}$$

of juist $c/v = P(\text{niemand belt})$.

De waarschijnlijkheid dat niemand anders belt is de waarschijnlijkheid dat alle $n-1$ andere spelers niet bellen. Laat ons de kans waarmee iedereen belt p noemen, dan is $c/v = (1-p)^{n-1}$, en uiteindelijk

$$p = 1 - (c/v)^{1/(n-1)}.$$

Als n toeneemt, neemt de waarde van p af. Bij voorbeeld, als $v = 10$ en $c = 1$, dan zou bij alleen maar twee spelers iedereen met kans $p = 9/10$ bellen. Met drie spelers zou iedereen met $p \approx 0.68$ bellen, met vier met $p \approx 0.54$, en zo verder.

Wat is er met de kans P_0 dat niemand de politie belt? Die is natuurlijk

$$P_0 = (1-p)^n = (c/v)^{n/(n-1)} = (c/v)^{1-1/n}$$

en dit neemt ook af als n toeneemt, asymptotisch tot een waarde van c/v. Dus in dit spel, als er een grote aantal mensen meedoen, dan wordt er in 1 van 10 gevallen de politie *niet gebeld* — wat dat in de praktijk voor gevolgen kan hebben, dat laat ik aan jouw verbeelding over.

5 Pokeren

Laat ons de populaire poker variant Texas Holdem bekijken, waarbij spelers twee *pocket cards* krijgen, en vijf gemeenschappelijke kaarten, in totaal drie rondes, open op tafel worden gelegd. Het volgende eenvoudige model is uit het boek "The Mathematics of Games and Gambling" van Edward Packel [11] ontleend[4].

We nemen aan dat er nog maar een tegenstander over is, en dat de laatste ronde van het bieden begint.

Noem

- p = de waarschijnlijkheid dat jij de betere hand hebt, intelligent geschat door jouw tegenstander,

[4] Voor meer informatie over hoe speltheorie op pokeren kan worden toegepast, neem een kijkje op de webpagina van de computer poker onderzoeks groep van de Universiteit van Alberta, http://www.cs.ualberta.ca/ games/poker/ en in het recent verschenen boek van Chen & Ankenman [6].

- k = de pot net voor de laatste ronde van bieden,
- r = het maximale toegestane bod, waarmee de pot kan worden verhoogd in deze laatste ronde.

Wij nemen verder aan dat jouw tegenstander niet gaat raisen, alleen maar **callen** of **folden**, en dat jij weet of jij de betere hand hebt (in dit geval biedt jij het maximale bedrag r), of niet (in dit geval ga jij folden, of ook het bedrag r bieden — om door middel van een *bluff* jouw tegenstander te intimideren). Je tegenstander is na jou aan de beurt en moet kiezen of hij jouw bod **callt** (waarmee hij hetzelfde bedrag r toevoegt aan de pot) of **fold**.

De verwachte payoffs voor puure strategieën zijn dan:

Jij kiest:	Jouw tegenstander kiest: **Altijd Callen**	**Altijd Folden**
Nooit Bluffen	$\alpha = p(k+r) + 0$	$\beta = pk + 0$
Altijd Bluffen	$\gamma = p(k+r) + (1-p)(-r)$	$\delta = pk + (1-p)k$

Ook hier kunnen wij weer een gemengd Nash equilibrium met een neutraliteits-argument vinden[5]. Noem x de waarschijnlijkheid waarmee je gaat **bluffen**, en noem y de waarschijnlijkheid waarmee jouw tegenstander (in zo'n situatie) gaat **callen**. Als y bij een gemengd equilibrium zit, dan moet jouw verwachte payoff neutraal zijn met betrekking tot jouw strategie:

$$E[\text{altijd bluffen}] = \gamma y + \delta(1-y) = E[\text{nooit bluffen}] = \alpha y + \beta(1-y).$$

Noem $D = \alpha - \beta + \delta - \gamma = (1-p)(k+r)$, dan heeft dit de oplossing

$$y = \frac{\delta - \beta}{D} = \frac{k}{k+r}.$$

Evengoed, als x bij een gemengd equilibrium is, dan geldt voor de verwachting van jouw tegenstander, die immers tegengesteld is aan die van jouw, dat deze ook los moet staan van zijn strategie:

$$-E[\text{altijd callen}] = \alpha(1-x) + \gamma x = -E[\text{nooit callen}] = \beta(1-x) + \delta x,$$

wat een oplossing oplevert:

[5] Een technische detail terzijde: Deze redenering werkt onder de voorwaarde dat zogenoemde *domineerende strategieën* geëlimineerd zijn. Dit gebeurt wanneer $p < (k+r)/(k+2r)$, en alleen dan is onze eenvoudige analyse correct. In het tegenovergestelde geval zal jouw tegenstander nooit callen, en zal je zelf altijd moeten bluffen [11].

$$x = \frac{\alpha - \beta}{D} = \frac{pr}{(1-p)(k+r)}.$$

Samenvattend is jouw verwachte beloning in dit equilibrium, met behulp van wat algebra,

$$E = \alpha y + \beta(1-y) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{D} = \frac{pk(k+2r)}{k+r}.$$

Laat ons een voorbeeld bekijken. Stel dat de pot de waarde $k = 100$ heeft, het maximale bod $r = 100$ is, en dat jij $p = 1/5$ schat. Dan is $D = 160$ en als jij niet het winnende blad hebt, dan moet je met waarschijnlijkheid $x = 1/8$ bluffen, en jouw tegenstander zou dan idealiter met waarschijnlijkheid $y = 1/2$ callen. Daardoor zou jouw verwachte beloning 30 zijn. Als jij min — of meer — vaak gaat bluffen, en jouw tegenstander heeft dit op gegeven moment door, kan hij door zijn spel aan te passen bereiken dat jouw verwachte beloning minder zal worden! De *take home message* van deze toepassing van speltheorie is, dat als jij gaat pokeren, je redelijk vaak moet gaan bluffen, en meestal is dat vaker dan mensen gewoonlijk doen...

Even nog van de praktische kant bekeken: Hoe kan jij er zeker van zijn dat jij met de correcte waarschijnlijkheid gaat bluffen? Mensen staan erom bekend dat ze toevalsgetallen niet goed kunnen generen [3], maar als jij dobbelstenen gaat gooien, dan zal jouw tegenstander waarschijnlijk aanemen dat je nu gaat bluffen — behalve als jij voor elke poker zet dubbelstenen gooit! Welnu, een praktische oplossing is dat jij jouw beslissing baseerd op toevallige gebeurtenissen, die voor iedereen zichtbaar op tafel liggen. Kijk bijvoorbeeld naar de laatste kaart die op tafel kwam te liggen, maar geen acht is. Er zijn $52 - 4 = 48$ mogelijke kaarten[6] met deze eigenschap, dus als deze kaart een haart hoger dan acht is, ga je bluffen, en anders niet. Dan zou jij met de goede kans $6/48$ bluffen (dat wil zeggen, als de kaart op tafel een harten negen, tien, buur, vrouw, koning of aas was). En natuurlijk zijn er een heleboel variaties van dit schema mogelijk. Het enige waar je echt goed voor moet zorgen is dat jouw tegenstander nooit doorheeft, hoe jij precies dit soort beslissingen neemt.

[6] In feite is dit alleen maar een benadering, omdat je waarschijnlijk meer informatie hebt over wat voor kaarten op tafel kunnen liggen — of beter gezegd, wat voor kaartjes niet. Jouw twee pocket cards kunnen bijvoorbeeld niet op tafel komen te liggen. Dus de correcte oplossing lijkt een klein beetje ingewikkelder te zijn, maar het idee is hetzelfde.

6 Een laatste probleem

Voordat ik met een laatste probleem wil eindigen, laat mij even nog opmerken over welke belangrijke delen van speltheorie ik het hier niet kon hebben. Dit zijn, onder andere,

- veilingen (à la eBay en ingewikkelder),
- afstemmen,
- en evolutionaire biologie.

Maar bekijk nu het volgende **Surprise test paradox**, wat probleem nummer zeven in *Martin Cohen's* boekje [7] van philosophische problemen is:

Een docent vertelt zijn klas dat er een tentamen wordt gegeven volgende week, maar dat de dag van het tentamen een echte verassing zal zijn.

Nu is Bob een student die het volgende idee heeft: Stel dat het tentamen op de laatste dag, vrijdag dus, zou zijn. Maar dan zou het geen verrassing zijn. Dus dat kan niet. Stel daarom nu dat het op donderdag zou zijn. Maar omdat het niet op vrijdag kan, zou het op donderdag dus ook geen verrassing zijn. Dus dat kan ook niet. Deze gedachtegang volgend, dit heet ook *backward induction*, concludeert Bob dat het tentamen ueberhaupt niet kan worden gehouden, en dat de docent dus een grapje maakte. Daarom leert hij ook niet.

Enkele dagen gaan voorbij, maar op woensdag gaat de docent het tentamen uitdelen. Bob zegt: “Maar u kunt dit niet doen!”. De docent zegt: “Waarom niet?” Bob merkt op: “Omdat het een verrassing moet zijn, dus daarom kunt u het tentamen alleen houden als wij het niet verwachten!”. Docent: “Ja, maar het lijkt mij, Bob, dat jij het *niet* verwacht vandaag, en ik *ga* het tentamen nu houden…

Volgens *Ken Binmore* [5], bestaat het belangrijkste probleem hieruit dat Bob en de docent denken dat ze allebei hetzelfde spel spelen, terwijl het in feite twee verschillende spellen zijn. Wat zijn deze?[7] En wat zou jij doen?

Thank you!

[7] Er bestaat ook een leuke analogie met de zo genoemde *ultimatum minigame* [5], maar helaas zou dit te ver gaan hier.

Referenties

[1] G. D'Agostini, Teaching statistics in the physics curriculum: Unifying and clarifying role of subjective probability, *American Journal of Physics* **67** (1999), 1260–1268. Preprint: http://arxiv.org/abs/physics/9908014.

[2] Aristotle, *The Nicomachean Ethics*, Penguin Books (2004).

[3] S. A. Armstrong, *A Meta-Analysis of Randomness in Human Behavioral Research*, MSc Thesis, Department of Mathematics, Louisiana State University (2004).
URL: http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07092004-113059/.

[4] J. Bentham, *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation.* Dover (2007), originally published 1789.

[5] K. Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction.* Oxford University Press (2007).

[6] W. Chen & J. Ankenman, *The Mathematics of Poker.* ConJelCo (2006).

[7] M. Cohen, *101 Philosophy problems.* Routledge (2002).

[8] P. R. Halmos, *I want to be a mathematician. An Automathography.* Springer (1985).

[9] J. Keys (G. Spencer-Brown), *Only Two Can Play This Game.* Julian Press (1972).

[10] M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press (2004).

[11] E. Packel, *The Mathematics of Games and Gambling.* The Mathematical Association of America (2006).

[12] P. Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems.* Cambridge University Press (2007).

[13] S. S. Stevens, On the theory of scales of measurement. *Science* **103** (1946), 677–680.