RANDOM WANDELING IN RANDOM LANDSCHAP

Begeleider: Frank den Hollander

Definitie: Beschouw het 1-dimensionale rooster $\mathbb{Z}$. Maak een *random kleuring* van het rooster, genoteerd met

$$C = (C(z))_{z\in\mathbb{Z}},$$

door de punten van het rooster op toevallige wijze zwart of wit te kleuren, d.w.z. de $C(z)$'s zijn i.i.d. stochasten met $P(C(0) = B) = P(C(0) = W) = \frac{1}{2}$. Laat op het rooster vervolgens een *simpele random wandeling* lopen, d.w.z. het Markov proces, genoteerd met

$$S = (S_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

dat gegeven wordt door

$$S_0 = 0, \quad S_{n+1} - S_n = X_n,$$

waar de X_n's i.i.d. stochasten zijn met $P(X_0 = -1) = P(X_0 = +1) = \frac{1}{2}$. Combineer nu beide vormen van toeval door te kijken naar het stochastische proces

$$Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{met} \quad Z_n = C(S_n).$$

Dit is de *rij van kleuren die de wandeling onderweg tegenkomt.*

(I) Het is eenvoudig in te zien dat Z een *stationaire* rij is: de kansverdeling van Z is invariant onder verschuiving van de tijdsindex. Ook is eenvoudig in te zien dat Z *ergodisch* is: Z kan niet gesplitst worden in een som van twee verschillende stationaire rijen.

Het is wat lastiger om te bewijzen dat Z een *triviale staart* heeft, d.w.z. voor alle $M \in \mathbb{N}$ is $(Z_n)_{-M\leq n<0}$ asymptotisch onafhankelijk van $(Z_n)_{n\geq N}$ in de limiet $N \to \infty$. Er kan anderzijds worden bewezen dat Z niet *zwak-Bernoulli* is, d.w.z. $(Z_n)_{n<0}$ is niet asymptotisch onafhankelijk van $(Z_n)_{n\geq N}$ in de limiet $N \to \infty$.

De bewijzen van deze beide laatste beweringen berusten op zogenaamde *koppelingsmethoden*, waarbij realisaties van het process onder verschillende beginvoorwaarden aan elkaar gerelateerd worden. Dit is een zeer vruchtbare techniek, die veel in de kansrekening wordt toegepast.

(II) Is het mogelijk om C te reconstrueren uit een enkele realisatie van Z zonder kennis van S? Verrassend genoeg is het antwoord "ja", mits de vraag zorgvuldig genoeg wordt geformuleerd. Ook hier spelen koppelingsmethoden een sleutelrol.

Doel: Het doel van dit project is het bestuderen van de elementaire ergodische eigenschappen van Z m.b.v. koppelingsmethoden.

Referentie: F. den Hollander and J.E. Steif, Random walk in random scenery: A survey of some recent results, in: IMS Lecture Notes – Monograph Series, Vol. 48, *Dynamics & Stochastics* (eds. D. Denteneer, F. den Hollander and E. Verbitskiy), IMS, Beachwood Ohio, US, 2006, pp. 53–65.