We bewijzen eerst de irrationaliteit van zekere getallen waaronder e en π en dan de transcendentie van zekere getallen waaronder e en π.

Op de eerste stelling zijn talloze variaties mogelijk.

Stelling 9.1. Zij a een natuurlijk getal met $a > 1$. Zij $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ een monotoon stijgende rij natuurlijke getallen zó dat voor elke K een k bestaat met $n_{k+1} - n_k > K$. Dan is $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n_j}}$ irrationaal.

Bewijs. Stel $\sum_{j=1}^{\infty} a^{-n_j} = r/s$ met $r, s \in \mathbf{Z}, (r,s) = 1, s > 0$.
Kies K zo dat $a^K \geq 2s$. Kies k zó dat $n_{k+1} - n_k > K$.
Dan volgt

$$s \cdot a^{n_k}\left(\frac{r}{s} - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a^{n_j}}\right) = s \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{a^{n_k}}{a^{n_j}}.$$

In het linkerlid staat een geheel getal.
In het rechterlid staat een positief getal met

$$s\left(\frac{a^{n_k}}{a^{n_{k+1}}} + \frac{a^{n_k}}{a^{n_{k+2}}} + \ldots\right) < \frac{sa^{n_k}}{a^{n_{k+1}}}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) < \frac{2sa^{n_k}}{a^{n_{k+1}}}.$$

Dus

$$1 < \frac{2sa^{n_k}}{a^{n_{k+1}}},$$

ofwel

$$2s > a^{n_{k+1} - n_k} > a^k \geq 2s, \text{ een tegenspraak.}$$

□

Uit bovenstaande stelling volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} a^{-j^2}$ irrationaal is.
Merk op dat $\sum_{j=1}^{\infty} a^{-jt}$ rationaal is voor elke $t \in \mathbf{N}$.

Stelling 9.2. Het getal e is irrationaal.

Bewijs. Stel $e = r/s$ met $r, s \in \mathbf{N}, (r,s) = 1$. Dan volgt

$$s!\left(\frac{r}{s} - \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!}\right) = s! \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

In het linkerlid staat een geheel getal. In het rechterlid staat een positief getal dat als volgt af te schatten is:

$$s! \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \leq \frac{s!}{(s+1)!}\left(1 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} + \ldots\right)$$

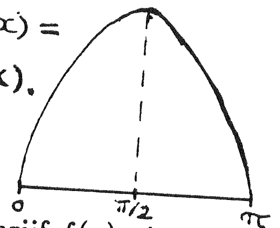
$$< \frac{1}{s+1}(1 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \ldots) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+1} < 1, \text{ een tegenspraak.}$$

□

<u>Stelling 9.3.</u> Het getal π is irrationaal.

<u>Bewijs.</u> Stel $\pi = r/s$ met $r, s \in \mathbf{N}, (r,s) = 1$.

$x(r - sx) = sx(\pi - x)$,



Zij $n \in \mathbf{N}$. We definiëren
$f(x) = \frac{\{x(r-sx)\}^n}{n!}$
en
$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$.
We bewijzen eerst dat
$\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ een geheel getal is en
dan dat de integraal in (0,1) ligt als n groot is.

Schrijf $f(x)$ uit naar machten van x,

$$f(x) = \frac{a_n}{n!}x^n + \frac{a_{n+1}}{n!}x^{n+1} + \ldots + \frac{a_{2n}}{n!}x^{2n}.$$

Hieruit volgt $f^{(k)}(0) = 0$ voor $k < n$, terwijl, voor $n \leq k \leq 2n$,

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}a_k k! \in \mathbf{Z}.$$

Omdat $f(\pi - x) = \frac{1}{n!}\{(\frac{r}{s} - x)sx\}^n = \frac{1}{n!}\{x(r-sx)\}^n = f(x)$,
geldt $f^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f^{(k)}(x)$ en dus $f^{(k)}(\pi) \in \mathbf{Z}$ voor $0 \leq k \leq 2n$.
Dus $F(0) \in \mathbf{Z}$ en $F(\pi) \in \mathbf{Z}$. Er geldt

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x.$$

Hieruit volgt

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x/_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbf{Z}.$$

Anderzijds merken we op dat voor $0 \leq x \leq \pi$ geldt
$x(r - sx) \leq \pi r$ en dus $|f(x)| \leq \frac{1}{n!}(\pi r)^n$, terwijl $f(x) \geq 0$.
Hieruit volgt

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{(\pi r)^{n+1}}{n!}.$$

Kies n zo groot dat $(\pi r)^{n+1} < n!$ Dan vinden we enerzijds $0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$ **en**
anderzijds $\int_0^\pi f(x)\sin x dx \in \mathbf{Z}$.

□

Een getal α heet <u>algebraïsch</u> als er een polynoom