3rde Huiswerk Projektieve Meetkunde, April 2012

Inleveren uiterlijk 3 mei.

1. (zie Opgave 1.2.19 in het dictaat) Voor $n \geq 2$ laat V een $(n+1)$-dimensionale vektorruimte zijn over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ en $Q \subset \mathbb{P}(V)$ een kwadriek van rang n. In het bewijs van Propositie 1.2.17.1 hebben we laten zien dat er een punt $p \in Q$ is met de volgende eigenschap: voor elk hypervak $H \subset \mathbb{P}(V)$ met $p \notin H$ is $K := Q \cap H$ een gladde kwadriek in H, en Q is de kegel over K met top p.

   Bewijs dat het punt p door deze eigenschap uniek is vastgelegd.

2. Beschouw in een projectief vlak $\mathbb{P}$ over $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ met homogene coördinaten $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ de twee kegelsneden

$$Q_1 := \{\ x \in \mathbb{P} \mid x_0^2 + x_1^2 = 4x_2^2\ \} \quad , \quad Q_2 := \{\ x \in \mathbb{P} \mid x_0^2 + (x_1 - x_2)^2 = x_2^2\ \}\ .$$

   Beschouw verder de lijn $L = \{\ x \in \mathbb{P} \mid x_2 = 0\ \}$ als de oneindig verre lijn in $\mathbb{P}$ en identificeer het affine deel $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus L$ met K^2 met coördinaten (x_0, x_1).

   (a) Schets $(Q_1 \cap \mathbb{A}) \cup (Q_2 \cap \mathbb{A})$ in het geval $K = \mathbb{R}$.

   (b) Wat zijn de snijpunten van Q_i en L, $i = 1, 2$, in het geval $K = \mathbb{R}$ resp. $K = \mathbb{C}$?

   (c) Wat is $Q_1 \cap Q_2$ in het geval $K = \mathbb{R}$ resp. $K = \mathbb{C}$? Bepaal in beide gevallen de raaklijnen aan de twee kegelsneden in alle snijpunten. Wat volgt hieruit in het het complexe geval voor de multipliciteiten van de snijpunten? En in het reële?

   (d) Vindt een parametervoorstelling voor een van de twee kegelsneden en vul deze in de vergelijking van de andere in om de multipliciteiten van de snijpunten te bepalen volgens Definitie 1.5.23. Vergelijk de resultaten met die van het vorige onderdeel.

3. Beschouw een projectief vlak met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

   (a) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 - \lambda\mu : \lambda\mu : \mu^2 + \lambda\mu)\ .$$

   (b) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede met vergelijking

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0\ .$$