UITWERKING 1E DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE
22-10-2012

1a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{e^{x^2}-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{2x\cdot e^{x^2}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x^2}}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{2x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{2} = \boxed{-2}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x\cdot e^{0{,}9x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+x\cdot e^{-0{,}1x}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$e^{-x} \to 0$, $x\cdot e^{-0{,}1x} \to 0$

c) $$\left(\frac{e^{\cos x}}{1+\ln(2x+1)}\right)' = \frac{\{1+\ln(2x+1)\}\, e^{\cos x}\cdot(-\sin x) - e^{\cos x}\cdot\frac{2}{2x+1}}{\{1+\ln(2x+1)\}^2}$$

2) $$f_c(x) = \begin{cases} c^2\cdot 3^{cx} & (x\geq 0) \\ c\ln(1+x)+2\cos x & (x<0) \end{cases}$$

$f_c(x)$ is continu in $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 0} f_c(x) = f_c(0)$, $\lim_{x\uparrow 0} f_c(x) = f_c(0)$

$f_c(0) = c^2$, $\lim_{x\downarrow 0} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 0} c^2\cdot 3^{cx} = c^2\cdot 3^{c\cdot 0} = c^2$,

$\lim_{x\uparrow 0} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 0} c\ln(1+x)+2\cos x = c\cdot 0+2 = 2$

Dus $f_c(x)$ is continu in $x=0 \Leftrightarrow c^2=2 \Leftrightarrow \boxed{c=\pm\sqrt{2}}$

3)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x) - \ln(1-x)$	0	0
1	$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$	2	2
2	$\frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$	0	0
3	$\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1-x)^3}$	4	$\frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$

$P_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3$

4) $f(x) = x^3 - 3x - 3$

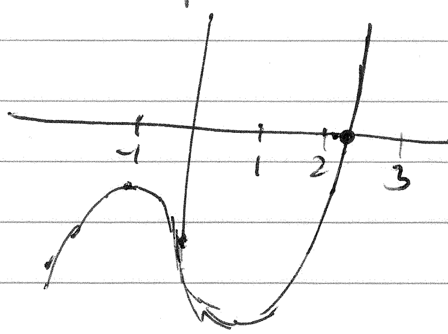
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ tekenoverzicht

f'	+	0	−	0	+
		-1		1	
f	↗		↘		↗

extremen

plaats	aard	grootte
-1	rel. max	-1
1	rel. min	-5

b) $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 15 > 0$
dus f heeft een nulpunt $x^* \in (2,3)$



$f(x)$ heeft geen andere nulpunten omdat het maximum < 0 is

4c) Methode van Newton-Raphson:
Om een nulpunt x^* van een differentieerbare functie f te benaderen kiezen we een startwaarde x_0 die niet te ver van x^* vandaan ligt en berekenen achtereenvolgens

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \ldots$$

in het algemeen $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

In ons geval, $f(x) = x^3 - 3x - 3$, $x_0 = 2$. Dus

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 - 3}{3x_0^2 - 3} = 2 - \frac{2^3 - 3\cdot 2 - 3}{3\cdot 2^2 - 3}$$

$$= 2 - \frac{-1}{9} = \boxed{2\tfrac{1}{9}}$$

5) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2} = \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$$\begin{array}{ccccc} - & NG & - & NG & + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array}$$

tekenoverzicht f

a) Er zijn verticale asymptoten waar de noemer 0 is en de teller $\neq 0$, dus in $x = 0$, $x = 1$.
Als $x = a$ een verticale asymptoot is van een functie f, dan is $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ als $f(x) > 0$ voor x dicht bij a en rechts van a, en $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$ als $f(x) < 0$ voor x dichtbij a en rechts van a. Idem voor $\lim_{x \uparrow a} f(x)$

Dus $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^4+1}{x^3-x^2} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x^4+1}{x^3-x^2} = -\infty$

$\lim_{x \downarrow 1} \frac{x^4+1}{x^3-x^2} = \infty$, $\lim_{x \uparrow 1} \frac{x^4+1}{x^3-x^2} = -\infty$ (zie tekenoverzicht).

5b) $x^3-x^2 / x^4+1 \backslash x+1$

$\underline{x^4-x^3}$

x^3+1

$\underline{x^3-x^2}$

x^2+1

$x^4+1=(x+1)(x^3-x^2)+x^2+1$

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^3-x^2}-(x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}=0$$

Dus $\boxed{y=x+1}$ is een schuine asymptoot van $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3-x^2}$

voor $x\to\pm\infty$

<u>2e methode</u>

$$f'(x)=\frac{(x^3-x^2)4x^3-(x^4+1)(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)^2}=\frac{4x^6-4x^5-3x^6+2x^5+3x^2-2x}{x^6-2x^5+x^4}$$

$$=\frac{x^6-2x^5+3x^2-2x}{x^6-2x^5+x^4}=\frac{x^5-2x^4+3x-2}{x^5-2x^4+x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^5}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1. \qquad \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-\underset{a=1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^3-x^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1-x(x^3-x^2)}{x^3-x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1-x^4+x^3}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

$\boxed{b=1}$

Dus $y=x+1$ is een schuine asymptoot van $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3-x^2}$
voor $x\to\infty$

Op precies dezelfde manier (vervang overal $x\to\infty$ door $x\to-\infty$) zien we dat $y=x+1$ een schuine asymptoot is voor $x\to-\infty$