Hausdorffification/verHausdorffing

Een topologische ruimte X is Hausdorff als er voor alle x en y in X met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y zijn met $U \cap V = \emptyset$. Equivalent hiermee: de diagonaal in $X \times X$ (voorzien van de product-topologie) is gesloten. Alhoewel in de praktijk topologische ruimten vaak Hausdorff zijn, komen niet-Hausdorff ruimten ook op natuurlijke manier voor, bijvoorbeeld bij classificatie-problemen waar limieten niet uniek zijn.

De verHaussdorffing van een topologische ruimte X moet, in woorden, het grootste Hausdorff-quotient van X zijn. Meer precies: we zoeken een Hausdorff topologische ruimte $H(X)$, en een continue afbeelding $q\colon X \to H(X)$, zodat er voor iedere continue afbeelding $f\colon X \to Y$ met Y Hausdorff er een unieke $\bar{f}\colon H(X) \to Y$ is met $f = \bar{f} \circ q$.

Het is niet moeilijk te bewijzen er zo'n continue afbeelding $q\colon X \to H(X)$ bestaat. Dit in detail uitwerken is de eerste stap in dit project. De universele eigenschap van $H(X)$ maakt van H een functor $H\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{HausTop}$ van de categorie van topologische ruimten naar de categorie van Hausdorff topologische ruimten. In categoriëntaal is H een linksgeadjungeerde van de inclusiefunctor $\mathrm{Haustop} \to \mathrm{Top}$. Mogelijke richtingen voor verder onderzoek, afhangend van de interesses van de student(e) die dit project kiest, zijn de volgende.

1. Vind passende, minder lelijke namen, in diverse talen, voor deze constructie.
2. Zoek interessante voorbeelden.
3. Er is een algemene stelling voor het bestaan van geadjungeerden. Wat zegt deze stelling in ons geval?
4. Is verHausdorffing compatibel met homotopie? Als niet, is het dan toch nog zo voor een te bepalen interessante klasse van topologische ruimten?
5. Wat gebeurt er als we topologische ruimten met meer structuur bekijken, zoals manifolds, geringde ruimten, lokaal geringde ruimten, algebraïsche variëteiten?

Een gerelateerd project is "Non-Hausdorff manifolds" van David Holmes. Als beide projecten gekozen worden, dan kan een interessante samenwerking ontstaan. Het is ook niet geheel ondenkbaar dat één student(e) beide projecten uitvoert.

Referenties: internet (onder andere MathOverflow); zoek naar Hausdorffification, en Hausdorffication. Misschien zijn er ook wel echte referenties.

Voorkennis: topologie, een beetje algebra. Het college "Introduction to manifolds" van Martin Lübke kan nuttig zijn, maar is niet nodig. Hetzelfde geldt voor categoriën-theorie (in feite meer een taal dan een theorie): nuttig, maar alleen nodig als het onderzoek die richting op gaat.

Begeleider: Bas Edixhoven.