Dessins d'enfants (begeleider: R. de Jong)

Voor een gegeven topologische ruimte X zijn zijn zogenaamde *overdekkingsruimten* $Y \to X$ van belang. Een continue afbeelding $p\colon Y \to X$ heet een overdekkingsruimte als er voor iedere $x \in X$ een open omgeving U van x in X is zodat $p^{-1}U$ geschreven kan worden als een disjuncte vereniging van open deelverzamelingen V_i van Y waarvoor de beperking van p tot V_i een homeomorfisme is naar U.

Interessante voorbeelden worden verkregen door voor X het complexe vlak te nemen met daaruit een aantal punten weggelaten. Laat x een basispunt zijn in X, dan heeft de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ een natuurlijke (monodromie)werking op de vezel $p^{-1}x$ voor elke overdekkingsruimte $p\colon Y \to X$. Merk op dat X de structuur heeft van een Riemannoppervlak; via p krijgt Y dan ook zo'n structuur. Er blijkt dat als p eindige vezels heeft, Y op eenduidige wijze gecompactificeerd kan worden tot een compact Riemannoppervlak $\bar{Y}$ (bijvoorbeeld, voor $Y = X$, $p = \mathrm{id}$ krijgt men de complexe projectieve lijn $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), en de afbeelding p van Riemannoppervlakken breidt op unieke wijze uit tot een afbeelding van Riemannoppervlakken $\bar{p}\colon \bar{Y} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Laat $X = \mathbb{C} - \{0, 1\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$. Het inverse beeld $\bar{p}^{-1}[0, 1]$ van het eenheidsinterval is nu een bipartiete graaf, ingebed in $\bar{Y}$, en voorzien van wat extra structuur die afkomt van de monodromiewerking. We noemen zo'n object een *dessin d'enfant* (kindertekening).

Doel van dit onderzoek is om een aantal voorbeelden en toepassingen van dessins d'enfants te onderzoeken. Ook een meer abstracte benadering zal worden uitgewerkt; zo zijn er zogenaamde *equivalenties* tussen: (a) de categorie van dessins d'enfants; (b) de categorie van Riemannoppervlakken $\bar{Y}$ tezamen met een eindige afbeelding $\bar{p}\colon \bar{Y} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die een overdekkingsruimte is boven $\{0, 1, \infty\}$; (c) eindige $\pi_1(X, x)$-verzamelingen. Zo kan bijvoorbeeld een antwoord gegeven worden op de vraag wat de minimale graad is van polynomen h van de vorm $h = f^3 - g^2$, waarbij $f, g \in \mathbb{C}[t]$ van gegeven graad $2n$ resp. $3n$, en kunnen zulke minimale voorbeelden (in zekere zin) worden geconstrueerd. En wat zijn bijvoorbeeld de 'abelse' dessins d'enfants?

Voorkennis: Algebra 1, 2, 3, Topologie. Het gevolgd hebben van de colleges Riemann Surfaces en/of Algebraic Topology is nuttig maar niet noodzakelijk.

Literatuursuggesties

A. K. Zvonkin, *Belyi functions: examples, properties and applications.* In: J. Koolen, J. H. Kwak, M.-Y. Xu (eds.), Applications of Group Theory to Combinatorics. Taylor & Francis Group, London, 2008. [ook online beschikbaar]

J. Oesterlé, *Dessins d'enfants.* Séminaire Bourbaki, 2001-2002, exp. no. 907, pp. 285–305. [ook online beschikbaar]