De WrapSlide-puzzel algebraïsch bekeken

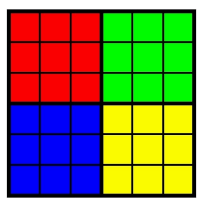
Dimitri Geelhoed en Lotte Meester

2013

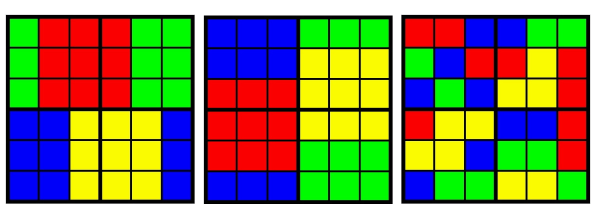
Inleiding

Al snel nadat we besloten om onderzoek te doen naar een wiskundig vraagstuk, kregen we het idee om een puzzel of spel als onderwerp te nemen. Na enig overleg met onze begeleider kozen we ervoor om de WrapSlide-puzzel te onderzoeken, een puzzel die zekere overeenkomsten heeft met schuifpuzzels en de bekende Rubiks Kubus. In tegenstelling tot die twee – en andere – klassiekers is er naar de relatief nieuwe WrapSlide echter nog niet veel onderzoek gedaan, zodat er voor ons meer dan genoeg vragen over waren om te beantwoorden. Als hoofdvraag besloten we uiteindelijk te kijken naar de oplosbaarheid van de puzzel, iets waar we hieronder verder op ingaan, na de regels van het spel te hebben uitgelegd.

De WrapSlide-puzzel heeft een speelveld van 6 bij 6 vakjes, verdeeld in vier vierkanten van 3 bij 3. De vakjes hebben in ieder vierkant een andere kleur: er zijn negen rode vakjes, negen groene, etc. In de beginsituatie ziet de puzzel er dus zo uit:



Door bepaalde schuifbewegingen kunnen deze vakjes van plaats veranderen. Het doel van het spel is om de puzzel vanuit een willekeurige configuratie weer terug te brengen naar de beginsituatie. Voor de bewegingen geldt: het is steeds een helft van de puzzel die verschoven wordt, waarbij de vakjes die aan de ene kant uit het veld schuiven, er aan de andere kant weer bijkomen (vandaar ook de naam WrapSlide). Met andere woorden: de boven- en onderhelft kunnen opzij worden verschoven (in afbeelding 1 is de bovenhelft één vakje naar rechts geschoven en de onderhelft één vakje naar links), en de linker- en rechterhelft kunnen omhoog en omlaag worden geschoven (in afbeelding 2 is de linkerhelft twee omlaag geschoven en de rechterhelft twee omhoog).

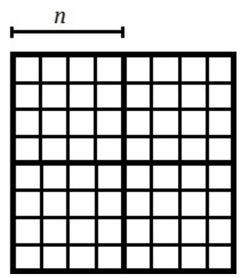


Door het combineren van deze bewegingen ontstaan al gauw moeilijk oplosbare situaties (zie de derde afbeelding voor een willekeurig voorbeeld).

In dit onderzoek gaan we in op de vraag of de puzzel vanuit iedere configuratie kan worden opgelost, dat wil zeggen, dat met de toegestane zetten altijd de beginpositie weer bereikt kan worden. We gaan daarbij uit van een volkomen willekeurige beginkleuring en niet één die eerst vanuit de opgeloste situatie door elkaar is geschoven – in dat laatste geval zou de puzzel immers vanzelfsprekend altijd opgelost kunnen worden. Het bewijs dat we hierover uiteindelijk hebben gevonden vormt het grootste deel van dit verslag. We introduceren hierin eerst een aantal algemene begrippen, die we vervolgens gebruiken om meer specifiek op de WrapSlide-puzzel in te gaan. Aan het einde geven we nog een aantal praktische tips en zetten die kunnen helpen bij het oplossen van de puzzel. De nadruk ligt echter op het eerdergenoemde bewijs; we geven dan ook zeker niet de meest efficiënte manier om tot een oplossing te komen.

Bewijs

Ons uiteindelijke doel is om iets te kunnen zeggen over de oplosbaarheid van een WrapSlide-puzzel gegeven de grootte van het speelbord en de kleuringen. Daarvoor bekijken we eerst de variant waarin we alle vakjes als verschillend zien, om later terug te komen op de puzzel met meerdere vakjes van dezelfde kleur. Bovendien geven we een algemeen bewijs voor verschillende afmetingen van het speelbord: we kijken dus niet alleen naar de gewone puzzel van 6 bij 6, maar zoeken ook een algemene regel voor de oplosbaarheid bij iedere grootte. We noemen de helft van het aantal rijen/kolommen n: een 8×8 puzzel heeft $n = 4$ (zie figuur).



Allereerst geven we de vakjes van de puzzel namen, zodat we de zetten kunnen omschrijven. De rijen van de puzzel noemen we $A, B, C, \ldots$ de kolommen $1, 2, 3, \ldots$ Het vakje linksboven is $A1$, het derde van boven en tweede van links $C2$, enzovoort. Bekijk de verzameling X_n van vakjes in het n-speelveld. Door de schuifbewegingen die we met de puzzel kunnen maken voeren we op deze verzameling permutaties uit; dit zijn bijectieve functies die X_n op zichzelf afbeelden, in feite dus herschikkingen van de verzameling. Anders gezegd: de vakjes krijgen een nieuwe plek op het speelveld.

De notatie die we voor deze functies gebruiken is de *cykelnotatie*. Dit gaat als volgt: in de verzameling $\{A, B, C\}$ stelt $(A\ B\ C)$ de functie voor die A op B, B op C en C op A afbeeldt. Of, meer toegepast op WrapSlide: in een puzzel met $n = 2$ geeft de cykel $(A1\ A2\ A3\ A4)$ aan dat de bovenste rij één vakje naar rechts geschoven wordt, waarbij $A4$ dus op de plek van $A1$ terecht komt (de andere rijen blijven op hun plaats). Een cykel bestaande uit n elementen noemen we een n-cykel, het laatste voorbeeld is dus een 4-cykel. Uiteraard kunnen er meerdere permutaties na elkaar uitgevoerd worden, dit noemen we *samenstelling* van de permutaties (we zullen het ook wel *vermenigvuldiging* van permutaties noemen in het vervolg). In de cykelnotatie noteren we dit door de cykels na elkaar te zetten. Let wel: we lezen hierbij van rechts naar links, zoals gebruikelijk is bij samenstelling van functies: ab betekent dat eerst b, en dan a wordt uitgevoerd. Vaak is het resultaat weer korter op te schrijven, een voorbeeld: $(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 2)(1\ 5)$ is ook te schrijven als $(1\ 5\ 2)(3\ 4)$. We vinden dit door een element te kiezen en te kijken wat onder herhaald toepassen van de permutatie het beeld wordt. Met andere woorden, als we 5 in het voorbeeld

nemen, wordt dat in de eerste cykel 1, in de tweede cykel wordt 1 niet veranderd, maar in de laatste cirkel wordt het 2. Het element 5 wordt dus uiteindelijk afgebeeld op 2. Doen we dit voor alle elementen, dan zijn we dat uiteindelijk geldt: $1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1$ en $3 \mapsto 4 \mapsto 3$, wat op te schrijven is als $(1\ 5\ 2)(3\ 4)$. Merk op dat het bij de vereenvoudigde notatie niet uitmaakt in welke volgorde je de cykels plaatst, de ene laat de elementen van de andere op hun plaats. M.a.w., de cykels zijn *disjunct*. Iedere permutatie is slechts op één manier in disjuncte cykels uit te drukken.
De gegeven zetten van de puzzel voor $n = 2$ zijn

τ, het verschuiven van de bovenste helft: $(A1\ A2\ A3\ A4)(B1\ B2\ B3\ B4)$
β, het verschuiven van de onderste helft: $(C1\ C2\ C3\ C4)(D1\ D2\ D3\ D4)$
λ, het verschuiven van de linkerhelft: $(A1\ B1\ C1\ D1)(A2\ B2\ C2\ D2)$
ρ, het verschuiven van de rechterhelft: $(A3\ B3\ C3\ D3)(A4\ B4\ C4\ D4)$

en hun inversen: de tegengestelde cykels die de permutaties ongedaan maken, voor τ bijvoorbeeld $\tau^{-1} = (A4\ A3\ A2\ A1)(B4\ B3\ B2\ B1)$. De zetten voor $n > 2$ zijn op eenzelfde manier voor te stellen.

Door deze zetten te combineren zijn veel permutaties op de vakjes mogelijk. Het is eenvoudig te bewijzen dat de verzameling van die permutaties onder samenstelling een groepsstructuur heeft.

Definitie. Een groep is een verzameling G gesloten onder een bewerking $*$, met een element $e \in G$ waarvoor geldt:

- e is een *eenheidselement*: $a * e = e * a = a$ voor alle $a \in G$.
- Voor ieder drietal elementen geldt dat $a * (b * c) = (a * b) * c$ voor alle $a, b, c \in G$; de bewerking is *associatief*.
- Voor ieder element $a \in G$ is er een element $a^{-1} \in G$ waarvoor geldt dat $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, dit noemen we de *inverse* van a.

We kijken dus of deze drie voorwaarden van toepassing zijn op de verzameling G_n van door zetten verkregen permutaties onder samenstelling, gegeven de grootte n van het speelbord. Het eenheidselement is de identiteitsfunctie, die verkregen kan worden door niets te doen. Samenstelling van functies op dezelfde verzameling is altijd associatief. De inversen van de standaardzetten zijn de tegengestelde zetten; de inverse van samengestelde zetten AB is $B^{-1}A^{-1}$, want $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = e$, dus je kunt iedere reeks zetten inverteren. Daarmee is aangetoond dat G_n een groep is.

In het algemeen is de verzameling van alle bijectieve functies op een verzameling X met n elementen onder samenstelling een groep. Dit wordt de permutatiegroep $S(X)$ genoemd. Het aantal elementen in $S(X)$ is het aantal permutaties van de elementen van X, dus $n!$. We noemen de verzameling van vakjes van een n-speelveld X_n, dus $S(X_n)$ is in dit geval de groep van alle mogelijke permutaties op de vakjes, ook degene die volgens de regels van de puzzel niet gevormd zouden kunnen worden. Het aantal vakjes is $4n^2$, dus deze groep heeft $(4n^2)!$ elementen. De permutaties die binnen de puzzel mogelijk zijn vormen samen G_n. Dit is een ondergroep van $S(X_n)$, d.w.z. dat G_n een deelverzameling van $S(X_n)$ is die zelf ook een groepsstructuur onder samenstelling vormt. Preciezer zeggen we dat G_n de ondergroep is van $S(X_n)$ voortgebracht door $\{\tau, \beta, \lambda, \rho\}$, oftewel de ondergroep waarvan de elementen als product van deze permutaties en hun inversen geschreven kunnen worden.

De ondergroep G_n

Om te weten welke permutaties er op de puzzel uit te voeren zijn, moeten we er dus achter komen welke ondergroep $G_n \subseteq S(X_n)$ is.

Belangrijk bij het vaststellen van de groep G_n is het begrip *pariteit*. Om dit uit te leggen, is het van belang om te weten dat iedere permutatie geschreven kan worden als een product van 2-cykels, die we ook wel *transposities* noemen. Deze notatie in transposities is niet per permutatie uniek; zo kan (1 2 3 4) bijvoorbeeld geschreven worden als (1 4)(1 3)(1 2), maar ook als (2 3)(1 2)(1 3)(2 4)(2 3). Algemeen geldt dat het aantal 2-cykels niet gelijk blijft, maar dat het wel steeds een oneven aantal is. Met andere woorden, de cykel (1 2 3 4) heeft een oneven pariteit. In het algemeen geldt dat een cykel $(1\ 2\ 3\ \ldots\ k)$ geschreven kan worden als $(1\ 2)(2\ 3)\ldots(k-1\ k)$, dus een cykel met een even aantal elementen heeft oneven pariteit en andersom.

Bij het vermenigvuldigen van een even aantal cykels met oneven pariteit, is de pariteit van de uitkomst even. Dit is logisch te beredeneren. Schrijf de permutaties als een vermenigvuldiging van een oneven aantal transposities. Wanneer je nu een even aantal van deze permutaties samenstelt, heb je een even keer een oneven aantal transposities, samen dus een even aantal transposities. Twee even cykels geven wanneer ze vermenigvuldigd worden eveneens een even pariteit. Passen we dit nu toe op de WrapSlide-puzzel met een grootte n die even is, dan zien we dat iedere bewerking τ, β, λ of ρ een even pariteit heeft. Het zijn immers voor ieder van deze vier permutaties n cykels van $2n$ elementen, dus een even aantal cykels met oneven pariteit. Omdat geldt dat iedere permutatie in G_n een product is van deze vier, is iedere permutatie even. Voor oneven n geldt dit niet, immers, daarbij is iedere verschuiving een product van n aantal cykels met $2n$ elementen. $2n$ is altijd even, dus dit is een oneven aantal cykels met oneven pariteit. De basispermutaties τ, β, λ en ρ zijn daarom oneven, en een product hiervan kan zowel even als oneven zijn.

De ondergroep van de permutatiegroep $S(X)$ op een willekeurige verzameling X met alleen de even permutaties wordt de *alternerende groep* $A(X)$ genoemd. De alternerende groep heeft een aantal eigenschappen die we in ons verdere bewijs zullen gebruiken:

- $A(X)$ wordt voortgebracht door alle 3-cykels. Dat is te bewijzen door vast te stellen dat je ieder paar verschillende transposities x, y kan vervangen door een product van 3-cykels. Wanneer x en y verschillend zijn, maar niet disjunct, dus van de vorm $x = (a\ b)$ en $y = (b\ c)$, dan kan je met $xy = (a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$ zien dat xy als 3-cykel kan worden geschreven. Zijn x en y disjunct, van de vorm $x = (a\ b)$ en $y = (c\ d)$, dan zijn ze als volgt in een 3-cykel te schrijven: $xy = (a\ b)(c\ d) = (a\ b)(b\ c)(b\ c)(c\ d) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$. Aangezien iedere even permutatie per definitie als een product van paren transposities te schrijven is, moet elke even permutatie een product van 3-cykels zijn.

- $A(X)$ bevat precies de helft van de elementen van $S(X)$. Bekijk hiervoor eerst op een willekeurige groep G de afbeelding $\lambda_a : G \to G$ gegeven door $x \mapsto ax$ met $a \in G$, de *linksvermenigvuldiging* met a in G. Gegeven $p \in G$ is er precies een $q \in G$ zodat $p = aq$, namelijk $q = a^{-1}p$, dus de afbeelding is bijectief. Voor een willekeurige transpositie t in $S(X)$ is de linksvermenigvuldiging λ_t daarom een bijectieve afbeelding die de even en oneven permutaties met elkaar verwisselt, waardoor er van beide even veel moeten zijn. De ondergroep van even permutaties $A(X)$ moet dus precies de helft zijn van $S(X)$.

Stelling. Voor de groep G_n geldt: $G_n = A(X_n)$ voor even n en $G_n = S(X_n)$ voor oneven n.

Bewijs. Eerder zagen we dat voor even n alle permutaties in G_n even zijn. Met andere woorden: er geldt $G_n \subseteq A(X_n)$ voor alle even n. We zullen hieronder bewijzen dat alle 3-cykels in de WrapSlide-puzzel gemaakt kunnen worden voor elke n, waardoor geldt $G_n \supseteq A(X_n)$. Van daaruit kunnen we voor even n gemakkelijk een conclusie trekken: $G_n \subseteq A(X_n)$ en $G_n \supseteq A(X_n)$ dus $G_n = A(X_n)$. Voor oneven n hebben we oneven permutaties, zoals τ. De linksvermenigvuldiging met τ beeldt alle elementen uit $A(X_n) \subseteq G_n$ af op verschillende oneven elementen, waardoor de elementen van $A(X_n)$ op de andere helft van $S(X_n)$ worden afgebeeld. Voor oneven n geldt dus $G_n = S(X_n)$.
Om de stelling te bewijzen, hoeven we dus alleen nog aan te tonen dat in de puzzel alle 3-cykels gemaakt kunnen worden.

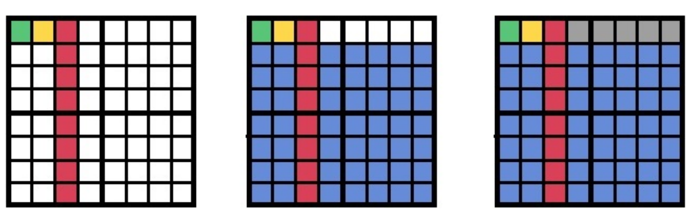
Lemma. In de groep G_n zijn alle 3-cykels bevat voor iedere n .

Bewijs. Om dit aan te tonen gebruiken we een stukje algemene theorie. Gegeven een groep G van permutaties op een verzameling X en een permutatie $h \in G$ (we schrijven hier $x' = h(x)$). Dan is voor $g \in G$ het element ghg^{-1} de permutatie die $g(x)$ afbeeldt op $g(x')$ voor alle $x \in X$. Om dit aan te tonen gaan we na waarop een element $g(x)$ afgebeeld wordt door de samenstelling van g^{-1}, h en g respectievelijk: er geldt $g(x) \overset{g^{-1}}{\mapsto} (g(x)) = x \overset{h}{\mapsto} x' \overset{g}{\mapsto} g(x')$. Het element ghg^{-1} noemen we een *geconjugeerde* van h. Minder abstract en toegepast op de

puzzel kan je je een geconjugeerde als volgt voorstellen: je zet eerst de vakjes van het bord met een permutatie g^{-1} op een andere plek, voert op dat bord de permutatie h uit en zet de vakjes vervolgens weer op hun oorspronkelijke plaats met g, waardoor h op het vervormde bord is uitgevoerd.
Een eenvoudig voorbeeld voor $n = 2$: wanneer we de cykel $(A1\ A2\ A3)$ kunnen maken en $(A1\ A2\ B3)$ willen vormen, kunnen we dit doen door de geconjugeerde van $(A1\ A2\ A3)$ met $g = \rho$ te gebruiken. Eerst wordt dus de permutatie ρ^{-1} uitgevoerd, zodat $B3$ op de plaats van $A3$ komt te liggen. Vervolgens voeren we $(A1\ A2\ A3)$ uit; $B3$ wordt dan afgebeeld op $A1$, $A1$ op $A2$, en $A2$ op $B3$. Ten slotte verschuiven we met ρ alle andere vakjes weer naar hun oorspronkelijke plaats.

Met behulp van geconjugeerden kunnen veel nuttige permutaties gevormd worden uit τ, β, λ en ρ. Zo kan je met $(\tau\beta)\lambda(\tau\beta)^{-1}$ niet de eerste n, maar de 2de t/m de $(n+1)$de kolommen naar beneden verschuiven. Je verplaatst eerst het hele bord een vakje naar links, voert vervolgens λ uit en verplaatst het bord weer terug naar rechts. Algemener kan je elke n aangrenzende rijen of kolommen verplaatsen met permutaties in de vorm van $(\tau\beta)^k\lambda(\tau\beta)^{-k}$ of $(\lambda\rho)^k\tau(\lambda\rho)^{-k}$.

Met een constructie die in de appendix na te lezen is, vormen we $(A1\ A2\ A3)$. Met geconjugeerden kunnen we voor elke permutatie $g \in G_n$ die $A1$ en $A2$ op hun plek laat $(A1\ A2\ g(A3))$ vormen. Met g de permutaties van de in vorige alinea besproken vorm en samenstellingen daarvan die $A1$ en $A2$ op hun plaats laten blijken zulke functies $A3$ op alle andere elementen van X_n te kunnen afbeelden. Met de geconjugeerde van λ met $g = (\tau\beta)^2$ en veelvouden daarvan (de derde t/m $(n+2)$de kolommen verticaal verschuiven) kunnen $(A1\ A2\ x_1)$ gevormd worden met x_1 de vakjes in de derde kolom (zie figuur). Met deze cykels kun je door op dezelfde manier de geconjugeerden die de rijen (behalve de eerste rij) horizontaal verplaatsen te gebruiken $(A1\ A2\ x_2)$ met x_2 de rest van de vakjes behalve die op de eerste rij vormen, blauw in het voorbeeld (zie figuur) en op eenzelfde manier zijn de cykels $(A1\ A2\ x_3)$ met x_3 de overige vakjes te maken uit $(A1\ A2\ x_2)$ met willekeurige vakjes x_2 in de 3de t/m $2n$de kolommen d.m.v. horizontale geconjugeerden van diezelfde vorm (zie figuur).



We kunnen dus alle cykels $(A1\ A2\ x)$ met alle $x \in X_n$ maken (behalve $A1$ en $A2$). Hieruit kunnen we snel alle mogelijke 3-cykels vormen: $(A1\ A2\ x)(A1\ A2\ y)$ $(A1\ A2\ x)^{-1} = (A2\ x\ y)$ met $x, y \in X_n$ geeft alle 3-cykels met $A2$ en twee willekeurige vakjes. Op dezelfde manier kunnen we $(A2\ x\ z)$ met $z \in X_n$ en van daaruit $(A2\ x\ y)(A2\ x\ z)(y\ x\ A2) = (x\ y\ z)$ vormen, waardoor 3-cykels met elke mogelijke $x, y, z \in X_n$ kunnen maken. We weten dus dat alle 3-cykels in G_n zitten.

We zagen eerder dat hierdoor G_n voor even n gelijk was aan de alternerende groep $A(X_n)$ en voor oneven n gelijk aan de permutatiegroep $S(X_n)$ op X_n. De stelling is hiermee bewezen. Samengevat weten we dus het volgende: wanneer de puzzel waarbij alle vakjes als verschillend worden gezien een oneven n heeft zijn alle permutaties mogelijk en is hij dus altijd oplosbaar, met een even n zijn alleen de even permutaties mogelijk; als je hier twee vakjes om zou wisselen, kan hij niet meer worden opgelost.

De oplosbaarheid met kleuring

We hebben nu bewezen dat de puzzel met oneven n altijd opgelost kan worden, en met even n zolang er geen oneven permutaties uitgevoerd hoeven te worden. Dit is echter alleen de oplosbaarheid van de puzzel wanneer alle vakjes verschillend zijn. Hiermee hebben we gedurende dit bewijs gewerkt, maar in de oorspronkelijke WrapSlide-puzzel zijn er voor $n \geq 2$ altijd meerdere vakjes van dezelfde kleur, dat wil zeggen, ze zijn niet van elkaar te onderscheiden. (Voor oneven n heeft dit natuurlijk voor de oplosbaarheid geen gevolgen; de puzzel is nog steeds altijd oplosbaar, met door kleuring identieke vakjes wordt dat nog eenvoudiger.)

Stelling. De WrapSlide-puzzel met kleuringen is voor iedere n oplosbaar.

Bewijs. Om dit te kunnen bewijzen, willen we een gekleurd bord kunnen beschrijven. Hiervoor introduceren we de verzameling H_n van permutaties die de kleuren op een opgelost bord op hun plek laten, dus de functies die binnenin de vier grote vierkanten op het bord vakjes permuteren. Om de kleuringen wiskundig te beschrijven hebben we een verzameling nodig waarin permutaties van een opgelost bord die op dezelfde kleuring uitkomen met hetzelfde element corresponderen. Hiervoor gebruiken we de volgende notatie, met G een groep en H een ondergroep: $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ waarbij $gH = \{gh \mid h \in H\}$ de *linkernevenklassen* van H zijn. De linksvermenigvuldiging $\lambda_g : G \to G$, die H op gH afbeeldt, is bijectief, dus alle linkernevenklassen van H zijn even groot als H zelf. In $S(X_n)$ corresponderen de linkernevenklassen van H_n bijectief met de verschillende kleuringen van het bord. Aan iedere kleuring kan immers een nevenklasse kH_n worden toegekend met k^{-1} een permutatie die de kleuring terugbrengt in de beginpositie van het spel, en aan iedere nevenklasse valt een kleuring toe te kennen, namelijk die kleuring die je krijgt door k op een opgelost bord uit te voeren.

Noem $G_nH_n = \{gh \mid g \in G_n, h \in H_n\}$ de met kleuring inbegrepen mogelijke permutaties op X_n. Dan corresponderen de oplosbare borden dus met G_nH_n/H_n. Als we nu kunnen laten zien dat $G_nH_n = S(X_n)$ voor alle n, dan weten we dat elk bord oplosbaar is. H_n bevat zowel even als oneven elementen; er zijn immers ook transposities die de oorspronkelijke kleuring gelijk laten. We hebben al gezien dat λ_g met g oneven alle even elementen van $S(X_n)$ op alle oneven elementen afbeeldt en met een even element alle even elementen permuteert, waardoor beide helften van $S(X_n)$ in G_nH_n bevat zijn, oftewel $G_nH_n = S(X_n)$. Een gekleurd bord kan dus vanuit elke positie opgelost worden, ongeacht de grootte; hiermee is de stelling bewezen.

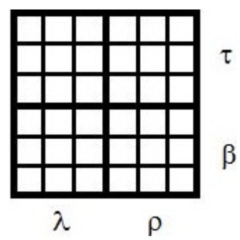
Met behulp van $S(X_n)$ en H_n kunnen we ook het aantal mogelijke kleuringen berekenen. Zoals gezegd corresponderen de linkernevenklassen van H_n bijectief met de kleuringen, met andere woorden, er zijn even veel nevenklassen als mogelijke kleuringen. Omdat nu geldt dat alle nevenklassen van H_n even groot zijn en ze bovendien disjunct zijn, is het aantal ervan gelijk aan het aantal elementen van G_n gedeeld door het aantal elemeten van H_n, oftewel $\#S(X_n)/\#H_n$. Het aantal permutaties in $S(X_n)$ is gelijk aan het aantal vakjes faculteit, dus $(4n^2)!$. H_n bestaat uit alle permutaties die de oorspronkelijke kleuring gelijk laten: dit zijn dus vier keer de permutaties binnen een vierkant van grootte $n \times n$, wat in totaal $(n^2!)^4$ permutaties geeft. Voor $n = 3$ geeft $\#S(X_n)/\#H_n$ dan bijvoorbeeld al 21.452.752.266.265.320.000 verschillende kleuringen, en dit aantal loopt uiteraard snel op als n groter wordt.

Overigens is de oorspronkelijke kleuring niet nodig om de puzzel altijd op te kunnen lossen. We hebben in de bovenstaande afleiding alleen maar een enkele even permutatie, die ook het element e kan zijn, en een enkele oneven permutatie, die elke transpositie kan zijn, gebruikt. Om elk bord oplosbaar te maken hoef je dus maar twee vakjes een identieke kleur te geven, voor de rest kunnen alle vakjes verschillen. Dit is makkelijker voor te stellen: met twee vakjes $K1$ en $K2$ met dezelfde kleur en een vakje L met een andere kleur komt een 3-cykel $(L\ K1\ K2)$ neer op een verwisseling van L met $K1$ en heeft de cykel hetzelfde effect als de transpositie $(L\ K1)$; we hebben al gezien dat de even elementen met een enkele transpositie de gehele permutatiegroep voortbrengen. Analoog aan de afleiding in de vorige alinea kan je zeggen dat $(K1\ K2) \in H_n$, waardoor $(L\ K1\ K2)(K1\ K2) = (L\ K1) \in G_nH_n$.

Samenvattend kunnen we zeggen dat de puzzel voor oneven n ongeacht kleuring altijd op te lossen is, en voor even n als er minstens twee vakjes identiek gekleurd zijn. De originele WrapSlide-puzzel is dus vanuit iedere beginconfiguratie op te lossen.

Oplossen

Zoals in de inleiding al aangekondigd, geven we ook nog een aantal zetten die nuttig kunnen zijn voor het oplossen van de puzzel. Omdat onze nadruk lag op het geven van een bewijs over de oplosbaarheid, is dit zeker niet de meest efficiënte manier – daar is waarschijnlijk ook geen algemeen algoritme voor te geven – maar hier valt uiteindelijk wel een oplossing mee te bereiken. We gaan bij deze zetten uit van de puzzel met $n = 3$ en kleuringen, omdat dit de officiële WrapSlide-puzzel is.
Ter herinnering hier nog een afbeelding van de zetten die we in de puzzel gebruiken (de beweging is naar rechts of omlaag):



Bij onderstaande tips is het altijd nuttig om de inversen, symmetrieën en geconjugeerden in gedachten te houden. Zoals gezegd is de inverse van een beweging de tegengestelde beweging, dus waar τ de verschuiving van de bovenhelft naar rechts is, is τ^{-1} de verschuiving naar links. Voor samengestelde zetten geldt dat $(\tau\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}\tau^{-1}$. Het kan daarnaast handig zijn een beweging gespiegeld te gebruiken. Hiervoor gelden de volgende regels: bij een horizontale spiegeling worden τ en β omgewisseld en worden in plaats van λ en ρ hun inversen gebruikt. Bij een verticale spiegeling is dit andersom. Voor de toepassing van geconjugeerden geldt ten slotte: om een cykel uit te voeren met andere vakjes dan een bekende cykel, moeten eerst die andere vakjes naar de plaatsen worden verschoven waar de cykel op werkt; na deze uitgevoerd te hebben, moet alles weer worden teruggeschoven.

Bij het oplossen van de puzzel is het handig om te beginnen met het maken van zo veel mogelijk blokken van meerdere vakjes van dezelfde kleur; het is daarin makkelijker om met cykels te werken, omdat bijvoorbeeld een 3-cykel als 2-cykel gebruikt kan worden door een vakje naar één van dezelfde kleur te verplaatsen. Het is over het algemeen redelijk eenvoudig om in ieder geval al één blok van negen vakjes te maken; dit vereist wat logisch nadenken en wordt ook makkelijker naarmate men meer ervaring met de puzzel krijgt. Handig is het in ieder geval om te bedenken dat verschillende vakjes ten opzichte van elkaar bewogen kunnen worden door ze in verschillende helften te zetten en dan één van die helften te verschuiven.

Een aantal nuttige zetten is verder:

- De geconjugeerde waarmee de helft van de puzzel verschuift; zo kun je met $(\lambda\rho)^k\tau(\lambda\rho)^{-k}$ de permutatie τ uitvoeren over iedere n naast elkaar liggende rijen. Met soortgelijke geconjugeerden kunnen natuurlijk ook ingewikkelder bewegingen verschoven worden.

- De *commutator* van verschillende permutaties. De commutator van twee permutaties a en b is het element $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. $[\tau, \lambda]$ is bijvoorbeeld gelijk aan $\tau\lambda\tau^{-1}\lambda^{-1}$ en geeft de 11-cykel ($A1$ $A2$ $A3$ $A4$ $B4$ $C4$ $D3$ $D2$ $D1$ $C1$ $B1$), als het ware een rondje. Eén vierkant van 3×3 wordt hierbij vast gelaten, het kan dus nuttig zijn om deze cykel te gebruiken wanneer één kwart van de puzzel al is opgelost.

- $[\lambda,\ [\beta^{-1}, \rho]]$. Deze commutator geeft $\lambda[\beta^{-1}, \rho]\lambda^{-1}[\beta^{-1}, \rho]^{-1}$, volledig uitgeschreven $\lambda\beta^{-1}\rho\beta\rho^{-1}\lambda^{-1}\rho\beta^{-1}\rho^{-1}\beta$. Dit geeft de permutatie ($A3$ $A4$)($D3$ $E3$), twee transposities die met geconjugeerde natuurlijk overal heen te verplaatsen zijn. Als $A3$ en $A4$ of $D3$ en $E3$ dezelfde kleur hebben, zie je de verwisseling hier niet en verwissel je als het ware maar twee vakjes.

- Verschillende samenstellingen van $[\tau, \lambda]$ en $[\tau^{-1}, \rho]$. Deze twee cykels zijn als het ware twee tegen elkaar in draaiende cirkels die alleen de vakjes $A3$ en $A4$ gemeen hebben, en zijn daarom ook erg geschikt om vakjes ten opzichte van elkaar te verplaatsen.

Wie zich echt met het oplossen van de WrapSlide-puzzel bezig gaat houden, zal snel handiger worden in het inschatten van individuele situaties, waar we in dit verslag niet op in zijn gegaan.

Appendix

We willen voor de puzzel met grootte n bewijzen dat de 3-cykel $(A1\ A2\ A3)$ element is van G_n.

Nu kunnen we voor deze algemene puzzel drie cykels maken die nuttig zijn voor het maken van $(A1\ A2\ A3)$. We noteren die, omdat we niet met een bord van vaste grootte werken, met een andere notatie dan we in de rest van het verslag gebruiken: ieder vakje krijgt in deze cykels een naam die bestaat uit twee cijfers die met rij respectievelijk kolom corresponderen, in plaats van een letter en een cijfer. Wat eerder $B1$ heette, noemen we nu dus $(2,1)$.
De drie gebruikte cykels zijn commutatoren van twee permutaties, of geconjugeerden daarvan:

- $a = [\tau^{-1}, \rho] = \tau^{-1}\rho\tau\rho^{-1}$. Schrijven we dit uit, dan vinden we de cykel $\big((1,2n)\ (1,2n-1)\ \dots\ (1,n)\ (2,n)\ (3,n)\ \dots\ (n,n)\ (n+1,n+1)\ (n+1,n+2)\ \dots\ (n+1,2n)\ (n,2n)\ (n-1,2n)\ \dots\ (2,2n)\big)$
- $b = (\tau\beta)^{n-1}[\tau,\lambda](\tau\beta)^{-(n-1)} = \tau^{n-1}\beta^{n-1}\tau\lambda\tau^{-1}\lambda^{-1}\tau^{-n+1}\beta^{-n+1}$. Dit geeft de cykel $\big((1,2n)\ (2,2n)\ \dots\ (n,2n)\ (n+1,2n-1)\ (n+1,2n-2)\ \dots\ (n+1,n)\ (n,n)\ (n-1,n)\ \dots\ (1,n)\ (1,n+1)\ (1,n+2)\ \dots\ (1,2n-1)\big)$
- $c = [\tau,\lambda] = \tau\lambda\tau^{-1}\lambda^{-1}$. Dit geeft de cykel $\big((1,1)\ (1,2)\ \dots\ (1,n+1)\ (2,n+1)\ \dots\ (n,n+1)\ (n+1,n)\ (n+1,n-1)\ \dots\ (n+1,1)\ (n,1)\ \dots\ (2,1)\big)$

We blijven deze cykels a, b en c noemen. Als we ze vermenigvuldigen in de volgorde $abcabc^{-1}$ krijgen we de cykel $\big((n+1,n-1)(n+1,n)(n+1,n+1)\big)$. We hoeven dan rondom dit proces dan alleen nog de geconjugeerde met $g = (\lambda\rho)^n(\tau\beta)^{n-2}$ toe te passen om deze cykel te verplaatsen naar $\big((1,1)\ (1,2)\ (1,3)\big)$, oftewel $(A1\ A2\ A3)$).

Nawoord

We hopen met dit verslag een goede indruk te hebben gegeven van de wiskunde die achter de WrapSlide-puzzel schuilgaat, en van de manier waarop we hier onderzoek naar gedaan hebben. Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het dictaat Algebra I van de Universiteit Leiden, geschreven door P. Stevenhagen.

Graag willen we onze begeleiders Floske Spieksma en Jinbi Jin bedanken voor alle hulp die we van hen gehad hebben bij het bestuderen van het semester Algebra I, het geven van ons eigen bewijs en het schrijven van dit verslag.

Voor wie nieuwsgierig is geworden en zelf met de WrapSlide-puzzel aan de slag wil: deze wordt in januari uitgebracht door de bedenker, Alewyn Burger van de Universiteit Stellenbosch. Voor die tijd is de puzzel ook beschikbaar op de webpagina van mevrouw Spieksma: http://www.math.leidenuniv.nl/~spieksma